Szimmetrikus kombinatorikus struktúrák MSc hallgatók számára

Véges síkok extremális kérdései

Előadó: Hajnal Péter

1. Oválisok véges projektív síkokon

Definíció. A $\mathcal{H}$ halmazrendszer ponthalmazának egy I részhalmazát *ívnek* nevezzük, ha minden él legfeljebb 2 pontot tartalmaz I-ből.

Definíció. Legyen $\iota(\mathcal{H})$ a legnagyobb $\mathcal{H}$-beli ív elemszáma.

A definíció alapján síkunk egyeneseit egy I ívhez való viszonyuk alapján három kategóriába sorolhatjuk.

Definíció. Legyen I egy ovális és E egy egyenes.
Ha $|E \cap I| = 1$, akkor azt mondjuk, hogy E érinti I-t vagy E az I érintője.
Ha $|E \cap I| = 2$, akkor azt mondjuk, hogy E metszi I-t, vagy E az I szelője.
Ha $|E \cap I| = 0$, akkor azt mondjuk, hogy E elkerüli I-t.

1. Lemma. *Legyen $\mathcal{P}$ egy r paraméterű projektív sík. Ekkor*

$$\iota(\mathcal{P}) \leq \begin{cases} r+2 & \text{, ha } r \text{ páros,} \\ r+1 & \text{, ha } r \text{ páratlan.} \end{cases}$$

Bizonyítás. Legyen I egy ív az r paraméterű $\mathcal{P}$ projektív síkon. Legyen x az I ív egy tetszőleges eleme. Ekkor I ív volta miatt, az x-en átmenő $r+1$ egyenes mindegyike legfeljebb egy x-től különböző pontot tartalmazhat I-ből. Az x-en átmenő egyenesek lefedik az egész síkot, így az I ív elemszámára $r+2$-es becslés adható.

Ha r páratlan, akkor ez a becslés eggyel javítható: Amennyiben van olyan egyenes, amelynek csak egy közös p pontja van I-vel, a fenti gondolatmenetet a p ponttal ismételve el kapjuk a javított becslést. Tegyük fel, hogy minden egyenes 0 vagy 2 pontot tartalmaz I-ből. Ekkor egy I-n kívüli x ponton átmenő egyenesekkel „seperjük" a síkot, és kapjuk, hogy I-nek páros sok pontjának kell lenni. tehát ívünk nem lehet $r+1$-elemű ($r+1$ páratlan, ha r páros). ■

Definíció. Legyen $\mathcal{P}$ egy r paraméterű projektív sík. $\mathcal{P}$ egy $r+1$-elemű ívét oválisnak nevezzük.

Legyen r egy páros szám és $\mathcal{P}$ egy r paraméterű projektív sík. $\mathcal{P}$ egy $r+2$-elemű ívét hiperoválisnak nevezzük.

Oválisok és hiperoválisok esetén az egyenesek fenti osztályozása nem annyira esetleges mint egy általános ívnél. A fenti bizonyítás alapján egy H hiperoválisnak nincs érintő egyenese. A bizonyítás további következményeit már kiemeljük. A következő lemma azt írja le, hogy egy O oválisunk pontján átmenő egyenesek hogyan oszlanak meg a bevezetett kategóriák között.

2. Lemma. *Legyen $\mathcal{P}$ egy r paraméterű projektív sík. Legyen O egy ovális. Ha $p \in O$, akkor p-n áthaladó egyenesek közül egy érintő, a többi szelő.*

Egy oválison kívüli ponton áthaladó egyenesek esetén a kategóriák közötti megoszlás már függ a síkunk paraméterének paritásatól. Először a páros paraméter esetét vizsgáljuk meg.

3. Lemma. *Legyen $\mathcal{P}$ egy r paraméterű projektív sík, ahol r egy páros szám. Legyen O egy ovális. Ekkor az oválison kívüli pontok között van egy kitüntetett p_0 pont, amelyen áthaladó összes ($r+1$ darab) egyenes érintő (azaz az oválisunk összes érintője áthalad a p_0 ponton). Az oválison kívüli összes p_0-tól különböző pont olyan, hogy a rajta áthaladó egyenesek között egy érintő, $r/2$ szelő és $r/2$ elkerülő egyenes van.*

Bizonyítás. Először is megjegyezzük, hogy páros r esetén az érintők az összes pontot lefedik. Valóban, ha lenne olyan pont, amelyen nem halad át érintő, akkor ennek oválison kívüli pontnak kell lennie. Továbbá a rajta áthaladó egyenessereg elemeinek az oválisból kimetszett részei 0- és 2-elemű halmazokba osztályoznák oválisunk pontjait. Ez viszont nem lehetséges, hiszen az oválisunk pontjainak száma $r+1$, páratlan. (Igazából egy kicsit többet is bizonyítottunk: az oválison kívüli pontokon áthaladó érintők száma páratlan.)

Az előző lemma alapján $r+1$ érintő van. Ezek csak úgy fedhetik le az összes pontot, ha az érintők egy ponton áthaladó egyenessereg összes elemét alkotják. Valóban, vegyünk két érintőt, és tegyük fel, hogy m metszéspontjukon keresztül halad egy e egyenes, amely nem érintő. Ekkor az e egyenes m-től különböző pontjaihoz tartozik rajtuk áthaladó érintő. Így legalább r darab különböző érintőt kapunk. Az m-en áthaladó két érintő ezektől különböző. Ez ellentmond annak, hogy pontosan $r+1$ érintő van.

Megjegyezzük, hogy egy olyan egyeneshalmaz, amely az összes pontot lefedi, duális fogalma a lefogó ponthalmaznak. Így a fenti tulajdonság (egyenesek $r+1$-elemű halmaza csak úgy fedheti le az összes pontot, ha egy ponton áthaladó egyenesek halmaza) annak dualizáltja, hogy egy $r+1$ elemű ponthalmaz csak akkor lehet egy lefogó ponthalmaz, ha egy egyenes pontjainka halmaza. Persze ezen duális állítás is — például a fenti érvelés dualizálásával — könnyen belátható.

Legyen p_0 az érintőink közös pontja. Így egy p_0-tól különböző p ponton pontosan egy érintő halad át: a pp_0 egyenes. Ha p az O oválison kívüli pont, akkor a p-n áthaladó r darab egyenes, amely nem érintő, 0 vagy 2 pontot tartalmaz O-ból. Ezek a pontok kiadják az O ponthalmaz p-n átmenő érintőjének O-beli pontján kívüli összes pontot az oválisból. Ez az r darab pont csak úgy adódhat ki, ha pontosan $r/2$ szelő és $r/2$ elkerülő egyenes halad át p-n (az egy érintőn kívül). ■

Most a pártalan paraméterű sík esetét tisztázzuk.

4. Lemma. *Legyen $\mathcal{P}$ egy r paraméterű projektív sík, ahol r egy páratlan szám. Legyen O egy ovális. Ekkor az oválison kívüli pontok között $(r^2+r)/2$ olyan van, amelyeken kettő érintő, $(r-1)/2$ szelő és $(r-1)/2$ elkerülő egyenes halad át. Az oválison kívüli további $(r^2-r)/2$ pont mind olyan, amelyen $(r+1)/2$ szelő és $(r+1)/2$ elkerülő egyenes halad át. (Speciálisan érintő nem halad át ezeken a pontokon.)*

Bizonyítás. Akárcsak az előző lemma bizonyításában, most is egy oválison kívüli ponton áthaladó érintők számát vizsgáljuk. Ez a szám az előző lemma bizonyításának gondolatmenetét követve páros. Legyen e egy érintő, és m a rá illeszkedő oválisbeli pont. Ekkor e minden m-től különböző pontjára illeszkedik még legalább egy érintő. Mivel összesen $r+1$ érintő van, ezért ez csak úgy lehetséges, hogy ha az

m-től különböző pontokon pontosan két érintő halad át: e és még egy. Azaz minden oválison kívüli ponton 0 vagy 2 érintő halad át.

Egy adott oválison kívüli p ponton áthaladó egyenesek szerint osztályozhatjuk oválisunk $r+1$ darab pontját. Ha tudjuk a p-n áthaldó érintők számát, akkor kiszámolhatjuk ezen osztályozás kételemű, illetve üres osztályainak számát is (azaz a ponton áthaladó szelők és elkerülő egyenesek számait). A „két érintős" pontok száma $\binom{r+1}{2}$, hiszen ezek a pontok azonosíthatók az érintőpárokkal. Ebből könnyen számolható a másik típusú oválison kívüli pontok száma. A bizonyítandó állítás igazolásához csak elemi számolások vanak hátra. Ezek végrehajtását az olvasóra hagyjuk. ∎

A fenti tétel lehetőséget ad páratlan paraméterérték esetén az ovális külső és belső pontjainak definiálására. Ezeket a fogalmakat nem használjuk, de mindenképpen érdekes megjegyzeni, hogy egy kombinatorikus fogalom (egy speciális blokkrendszer maximális elemszámú íve) esetén több folytonos geometriából jövő fogalom bevezethető.

Definíció. Legyen r egy páratlan szám, és $\mathcal{P}$ egy r paraméterű projektív sík. Legyen O egy ovális $\mathcal{P}$-ben. Legyen $p \notin O$.

p az O ovális külső pontja, ha O két érintője halad át p-n.

p az O ovális belső pontja, ha p-n nem halad át O érintője.

⋆

Az alábbiakban $\mathcal{PG}(2, \mathbb{F}_q)$ síkok vizsgálatára szorítkozunk. Definiáljuk a kúpszelet fogalmát. A valós sík kúpszeleteinek analitikus leírását „másoljuk le".

Definíció. Legyen q egy páratlan prímhatvány. A $\mathcal{PG}(2, \mathbb{F}_q)$ projektív sík egy K ponthalmaza kúpszelet, ha található olyan 3×3 méretű, nem elfajuló A mátrix az $\mathbb{F}_q$ test felett, amelyre akkor és csak akkor teljesül, hogy $(a : b : c) \in K$, ha a $\overrightarrow{v} = (a, b, c)$ vektorra $\overrightarrow{v} A \overrightarrow{v}^T = 0$.

A következő bizonyítás nélkül közölt lemma egyszerűen kiszámolható.

5. Lemma. *Kúpszeletek oválisok.*

A témakör lezárásaként kimondjuk Segre nevezetes, mély tételét:

6. Tétel (Segre-tétel). *Legyen q egy páratlan prímhatvány. Ekkor $\mathcal{PG}(2, \mathbb{F}_q)$ minden oválisa kúpszelet.*

7. Feladat. *Legyen r egy páros szám, és $\mathcal{P}$ egy r paraméterű projektív sík. Legyen H egy hiperovális $\mathcal{P}$-ben. Ekkor*

(i) H minden pontján $r+1$ szelő halad át,

(ii) minden $p \notin H$ ponton $(r+2)/2$ szelő és $r/2$ elkerülő egyenes halad át.

8. Feladat. *Legyen r páros szám és $\mathcal{P}$ egy r paraméterű projektív sík. Legyen O egy ovális. Ekkor O egyértelműen kiegészíthető egy hiperoválissá $\mathcal{P}$-ben.*

9. Feladat. *Legyen r egy páratlan szám, és O egy ovális egy r paraméterű projektív síkon. Határozzuk meg, hány belső, külső és oválisbeli pont esik egy szelőre, érintőre, illetve elkerülő egyenesre.*

2. Lefogó ponthalmazok, részsíkok

Az r paraméterű projektív sík bármely két egyenese metsző, így bármely egyenesének $r+1$-elemű ponthalmaza lefogó ponthalmaz. Minden pont $r+1$ egyenest fog le, így r pont nem képes az összes $r(r+1)+1$ egyenes lefogására. A következő eredményt kaptuk.

10. Lemma. *Legyen $\mathcal{P}$ egy r paraméterű projektív sík. Ekkor*

(i) $\nu(\mathcal{P}) = 1,$

(ii) $\tau(\mathcal{P}) = r + 1.$

A (ii) pont élességét az egyenesek ponthalmazai mutatják. Ezek alkotják az összes $r+1$-elemű lefogó halmazt? Igen, ezt említettük a korábbiakban (az alábbi feladatok ennek egy formális bizony'tását kérik).

11. Feladat. *Legyen $\mathcal{P}$ egy r paraméterű projektív sík. Legyen L egy lefogó halmaz, amely nem tartalmazza az E egyenest (mint egy ponthalmazt). Ekkor $|L \setminus E| \geq r$*

12. Feladat. *Legyen $\mathcal{P}$ egy r paraméterű projektív sík. Igazoljuk, ha L egy $r+1$-elemű lefogó halmaz, akkor L egy egyenes ponthalmaza.*

A fentiek után természetes az alábbi definíció.

Definíció. Legyen $\mathcal{P}$ egy r paraméterű projektív sík. Egy L lefogó halmaz nem-triviális, ha nem tartalmaz egyenest.

A fenti észrevételek a következőképpen is megfogalmazhatók.

13. Következmény. *Legyen $\mathcal{P}$ egy r paraméterű projektív sík. Legyen L egy nem-triviális lefogó halmaz. Ekkor $|L| \geq r+2$.*

Milyen kicsi lehet egy nem-triviális lefogó halmaz?

Az alábbi tétel azt mutatja, hogy jóval nagyobbnak kell lennie mint egy optimális lefogó halmaznak, azaz egy egyenes ponthalmazának.

14. Tétel (Bruen és Pelikán tétele). *Legyen $\mathcal{P}$ egy r paraméterű projektív sík. Legyen L egy nem-triviális lefogó halmaz. Ekkor $|L| \geq r + \sqrt{r} + 1$.*

Bizonyítás. Legyen L egy nem-triviális lefogó halmaz. Legyen E egy egyenes és $\ell_E = |L \cap E|$. Számoljuk össze az (l, E) párokat, ahol l a lefogó ponthalmazunk egy E egyenesre eső eleme. Kétféle módon gondolkozunk.

I) l választása $|L|$-féle lehet. l kiválasztása után $r+1$ lehetséges E lesz. Azaz a válasz $(r+1)|L|$.

II) Egy másik okoskodás a következő. E választása után l-re ℓ_E lehetőség lesz. Azaz a válasz $\sum_{E \in \mathcal{P}} \ell_E$.

A kétféle helyes gondolatmenetnek természetesen ugyanahhoz az eredményhez kell vezetnie, azaz

$$\sum_{E: E \in \mathcal{P}} \ell_E = (r+1)|L|.$$

Számoljuk össze az (l, l', E) hármasokat, ahol l és l' a lefogó ponthalmazunk két különböző eleme, és az ezeket összekötő egyenes. Ismét kétféle gondolatmenetet ismertetünk.

I) l-re $|L|$ lehetőség van, l választása után l' $|L|-1$-féle lehet. l és l' egyértelműen meghatároz egy E-t. Így a válasz $|L|(|L|-1)$.

II) Másképpen is okoskodhatunk. E r^2+r+1-féleképpen választható. Ezek után l választása ℓ_E lehet, míg ezután l' ℓ_E-1-féle lehet. Ez a gondolatmenet a $\sum_{E:E\in\mathcal{P}}\ell_E(\ell_E-1)$ válaszhoz vezet.

A kétféle helyes gondolatmenetnek természetesen ugyanahhoz az eredményhez kell vezetnie, azaz

$$\sum_{E:E\in\mathcal{P}}\ell_E(\ell_E-1)=|L|(|L|-1).$$

A Mivel L nem-triviális lefogó halmaz egy korábbi lemma alapján $\ell_E+r\leq|L|$, azaz $\ell_E\leq|L|-r$.

Így

$$\begin{aligned}|L|(|L|-1) &= \textstyle\sum_{E:E\in\mathcal{P}}\ell_E(\ell_E-1)\leq\sum_{E:E\in\mathcal{P}}(|L|-r)(\ell_E-1)\\ &= (|L|-r)\textstyle\sum_{E:E\in\mathcal{P}}(\ell_E-1)\\ &= (|L|-r)\left(\left(\textstyle\sum_{E:E\in\mathcal{P}}\ell_E\right)-(r^2+r+1)\right)\\ &= (|L|-r)\left((r+1)|L|-(r^2+r+1)\right).\end{aligned}$$

Az egyenlőtlenség rendezve

$$r\leq(|L|-(r+1))^2,$$

amiből adódik a bizonyítandó. ■

A tétel becslése éles. Ha q négyzetszám akkor $\mathbb{F}_q$-nak van $\sqrt{q}$-elemű részteste, amely résztestből eredő koordinátákat használva a $\mathcal{PG}(2,\mathbb{F}_q)$ sík egy $q+\sqrt{q}+1$-elemű ponthalmazát nyerjük, amelyek síkunk egy részsíkját alkotják. Ez a részsík lefogó ponthalmaz lesz.

Általában ha q és q' két prímhatvány, amelyekre q' osztja q-t, akkor $\mathbb{F}_q$-nak van $\mathbb{F}_{q'}$-vel izomorf részteste, így a $\mathcal{PG}(2,\mathbb{F}_q)$ projektív síknak van $\mathcal{PG}(2,\mathbb{F}_{q'})$-vel izomorf részsíkja.

Mielőtt továbbhaladunk pontosan definiáljuk a részsík fogalmát.

Definíció. Egy $\mathcal{P}=(P,E,I)$ projektív sík esetén, ha $P'\subset P$ és $E'\subset E$ halmazokra $(P',E',I'=I\cap(P\times E))$ egy projektív sík, akkor $\mathcal{P}'=(P',E',I')$ a $\mathcal{P}$ sík egy részsíkja.

Tehát, ha q négyzetszám, akkor $\mathcal{PG}(2,\mathbb{F}_q)$-nak van egy $\sqrt{q}$ paraméterű részsíkja. Ennek a részsíknak a $q+\sqrt{q}+1$-elemű ponthalmaza lefogó ponthalmaz lesz. Ez a következő tétel egy részeredménye.

15. Tétel (Bruck-tétel). *Ha egy r paraméterű projektív síknak van r' paraméterű valódi részsíkja, akkor $r'\leq\sqrt{r}$.*

Továbbá, ha $r'=\sqrt{r}$, akkor a részsík $r+\sqrt{r}+1$ pontja egy lefogó halmazt alkot.

Bizonyítás. A $\mathcal{P}=(P,E,I)$ r paraméterű projektív sík részsíkja legyen $(P',E',I'=I\cap(P\times E))$ ($P'\subset P$ és $E'\subset E$). Legyen p egy nem a részsíkba eső pont ($p\notin P'$). p-re legfeljebb egy részsíkbeli egyenes illeszkedhet. Valóban, ha az e és f különböző részsíkbeli egyenesek illeszkednének p-re, akkor e-nek és f-nek nem lenne metszéspontja a részíkon belül (e és f metszéspontja p, amit a részsíkon kívülről választottunk). Ez ellentmondana a projektív síkok $(i)_2$ axiómájának.

A p-n átmenő egyenessereg végigsöpri a síkot, és a részsík P' ponthalmazát az egyenessereg elemei osztályozzák. Az egyenessereg részsíkbeli egyeneseire a részsíkból $r'+1$ pont illeszkedik. Az egyenessereg nem részsíkbeli egyeneseire legfeljebb egy-egy pont esik P'-ből. Valóban, két részsíkbeli ponton áthaladó egyenesnek a részsíkhoz kell tartoznia, hiszen a részsíkon belül is igaznak kell lennie a projektív síkok $(i)_1$ axiómájának. Így kapjuk, hogy

$$|P'| \leq (r'+1)+r. \tag{$\star$}$$

P' pontjai egy r' paraméterű projektív sík pontjait alkotják, azaz $|P'| = r'^2 + r' + 1$.

Eredményeinket összegezve kapjuk az r'-re vonatkozó becslést.

Ha $r' = \sqrt{r}$, akkor az $(\star)$ becslésben egyenlőség áll fenn. Speciálisan az összes p-n átmenő egyenes metszi a részsíkot. p egy tetszőleges részsíkon kívüli pont volt. Azaz a részsík pontjai lefogják a részsíkon kívüli pontokat tartalmazó egyeneseket. Így kapjuk P' lefogó tulajdonságát. ■

Definíció. Egy r paraméterű projektív sík egy $\sqrt{r}$ paraméterű részsíkját *Baer-részsíknak* nevezzük.

Azon síkok esetén, amelyeknek nincs Baer-részsíkja a Bruen—Pelikán-tétel élességét mutató példa nem működik. Valójában a Bruen—Pelikán-becslés több élesítése is ismert. Mi bizonyítás nélkül megemlítjük a prím elemszámú test felett koordinátázott projektív síkok esetét.

16. Tétel (Blokhuis-tétel). *Legyen p egy prímszám. Legyen L a $\mathcal{PG}(2,\mathbb{F}_p)$ sík egy nem-triviális lefogó halmaza. Ekkor $|L| \geq \frac{3p+3}{2}$.*

17. Feladat. *Legyen L az r paraméterű $\mathcal{P}$ projektív sík egy $r+\sqrt{r}+1$-elemű, nem-triviális lefogó ponthalmaza. Bizonyítsuk be, hogy L egy Baer-részsík ponthalmaza.*

18. Feladat (Bruck). *Legyen $\mathcal{P}'$ az r paraméterű $\mathcal{P}$ projektív sík egy r' paraméterű részsíkja. Tegyük fel, hogy $\mathcal{P}'$ nem egy Baer-részsík, azaz $r' < \sqrt{r}$. Ekkor $r' \leq \sqrt{r+1/4}-1/2$.*

3. $\mathcal{PG}(2,\mathbb{F}_4)$ hiperoválisai és részsíkjai

A fenti általános észrevételek után egy nagyon konkrét síkot vizsgálunk. Amit már tudunk: $\mathcal{PG}(2,\mathbb{F}_4)$-nek $4^2+4+1=21$ pontja, ugyanennyi egyenese van. Minden egyenesre $4+1=5$ pont illeszkedik, minden ponton 5 egyenes halad át. Vannak 7 elemű rész-síkok (a Fano-síkkal izomorfak). Ha vannak hiperoválisok, akkor azok 6 eleműek.

19. Lemma. *Minden általános helyzetű pontnégyes pontosan egy hiperoválisnak és egy Baer-részsíknak a részhalmaza.*

Bizonyítás. Legyen A,B,C,D az általános helyzetű pontnégyes. Ezek hat összekötő egyenest határoznak meg. Ekkor a sík néhány további pontjára rá tudunk mutatni: Az összekötő egyenesek három párba oszthatók, amelyek metszéspontjai „új" pontok. Ezek elnevezései legyenek: $AB|CD$, $AC|BD$ és $AD|BC$. Az AB egyenesnek van még két nem azonosított (A-n, B-n és $AB|CD$-n kívüli) pontja: $(AB)'$

és $(AB)''$. Hasonlóan a többi összekötő egyenesre. Így 19 nevünk van. Könnyű ellenőrizni, hogy ezek különböző pontok. A hiányzó két pont legyen X és Y. Könnyű ellenőrizni, hogy ezeknek és az $AB|CD$, $AC|BD$, $AD|BC$ pontoknak egy egyenesre kell illeszkedni.

Speciálisan A, B, C, D és $AB|CD$, $AC|BD$, $AD|BC$ egy Fano-síkkal izomorf részsík. Természetesen más Baer-részsík nem tartalmazhatja A, B, C, D-t.

Könnyű ellenőrizni, hogy A, B, C, D-t tartalmazó hiperoválisban X és Y-n kívül nem lehet más pont. Továbbá $\{A, B, C, D, X, Y\}$ egy hiperovális. ■

20. Feladat. *Hány általános helyzetű pontnégyes van $\mathcal{PG}(2, \mathbb{F}_4)$-ben?*

21. Feladat. *Hány hiperovális van $\mathcal{PG}(2, \mathbb{F}_4)$-ben?*

22. Feladat. *Hány Baer-részsík van $\mathcal{PG}(2, \mathbb{F}_4)$-ben?*

Legyen H egy hiperovális $\mathcal{PG}(2, \mathbb{F}_4)$. Ekkor H alapján hivatkozhatunk síkunk összes pontjára, egy H-koordinátarendszert vezethetünk be:
K_H a H pontjain vett teljes gráf.

(P) **Pontok:** H elemein kívül minden csúcson átmenő öt egyenes közül hármon kettő-kettő H-beli pont van. Azaz a nem-H-beli pontok meghatároznak egy teljes párosítást H-n. Fordítva is igaz: A teljes párosít'Tasok adnak három egyenest, amelyeknek legfeljebb egy közös pontjuk lehet. De a fenti gondolatmenet alapján lennie is kell egy pontnak. Azaz a pontkoordináták K_H csúcsai és teljes párosításai.

(E) **Egyenesek:** H meghatároz $\binom{6}{2} = 15$ darab egyenest. Minden más egyenes öt H-ra nem menő ponton halad át, amik öt teljes párosításnak felelnek meg. Ebben az öt teljes párosításban nem lesz közös él, azaz a H-n lévő teljes gráf egy élszínezését írják le. Mint fent, ismét egy párbaállításról van szó. Azaz az egyenes-koordináták K_H élei és 5-élszínezései.

A szokásos koordinátázások a geometria/algebra nyelvezet között teremtenek egy kapcsolatot. Geométer szemlélettel lineáris algebrai tényeket láthatunk/magyarázhatunk. Illetve lineáris algebrai ismereteink alapján geometriai bizonyítások adhatók.

A fenti koordinátázás is hasonló. $K_H \simeq K_6$ ismerői ismereteik alapján síkunkról beszélhetnek. Minden leírható gráfelméletileg. A pontok a K_6 csúcsai és párosításai lesznek, egyenesei az élek és 5-élszínezések. Az illeszkedés: egy csúcs pontosan a rajta áthaladó öt élre illeszkedik. Egy párosítás a három élére és azon élszinezésekre illeszkedik, amik tartalmazzák őt mint színosztályt.

23. Feladat. *Gráfelméletileg ellenőrizzük, hogy a fent gráfelméletileg leírt pont-egyenes illeszkedési struktúra egy öt paraméterű projektív sík.*

A fenti koordinátarendszer a síkunk lerajzolására is hatékony eszközt ad. (A 21 pont és a 21 darab öt pontos egyenes éppen a határán van az áttekinthetően lerajzolható struktúráknak.)

A négy paraméterű projektív síkok unicitása is egyszerűen látható.

24. Feladat. *Igazoljuk, hogy tetszőleges* 4 *paraméterű projektív sík izomorf* $\mathcal{PG}(2, \mathbb{F}_4)$-*gyel.*

A fenti koordinátarendszer hasznos lesz ahhoz, hogy megértsük $\mathcal{PG}(2, \mathbb{F}_4)$ automorfizmuscsoportját.

⋆

25. Feladat. *Határozzuk meg* $\mathbb{A}ut(\mathcal{PG}(2, \mathbb{F}_4))$ *elemszámát.*

Legyen $\mathbb{GL}(n, \mathbb{F})$ az $n \times n$ méretű nem elfajuló (nem-nulla determinánsú) mátrixok csoportja (az $\mathbb{F}$ testre alapulva). Ezen csoport egy A elemére gondolhatunk mint $\mathbb{F}^n \to \mathbb{F}^n$, $x \mapsto Ax$ lineáris leképzésre. $\mathbb{GL}(n, \mathbb{F})$ neve általános lineáris csoport. Ennek centruma a λI alakú mátrixok halmaza, ahol $\lambda \in \mathbb{F}^*$. Ez egy normálosztó, amivel faktorizálva kapjuk $\mathbb{PGL}(n, \mathbb{F})$-et.

Az általános lineáris csoportnak van egy nevezetes részcsoportja és egy nevezetes „szupercsorportja".

A részcsoport $\mathbb{SL}(n, \mathbb{F})$, az 1 determinánsú mátrixok részcsoportja. λI alakú elemeivel ($\lambda \in \mathbb{F}^*$) faktorizálva kapjuk $\mathbb{PSL}(n, \mathbb{F})$-et.

A szupercsoport az invertálható szemilineáris leképezések csoportja. $\mathbb{F}^n$ egy transzformációja szemilineáris, ha mindent „tud", amit egy lineáris tarnszformációtól elvárunk, kivéve a skalár kiemelhetőséget. Ehelyett egy S szemilineáris tarnszformációtól azt várjuk el, hogy minden v vektorra

$$S(\lambda v) = {}^{\alpha}\lambda S(v),$$

ahol α egy S-hez tartozó automorfizmusa $\mathbb{F}$-nek, ${}^{\alpha}\lambda$ α hatása λ-n. $\mathbb{F}$ minden α automorfizmusához tartozik $\mathbb{F}^n$ egy szemilineáris transzformációja: $\langle\alpha\rangle : (a_1 : a_2 : \ldots : a_n) \mapsto ({}^{\alpha}a_1 : {}^{\alpha}a_2 : \ldots : {}^{\alpha}a_n)$. A lineáris transzformációk és $\langle\alpha\rangle$ alakú transzformációk generálják a szemilineáris tarnszformációk teljes $\Gamma\mathbb{L}(n, \mathbb{F})$ csoportját. A λI alakú elemekkel ($\lambda \in \mathbb{F}^*$) faktorizálva kapjuk a $\mathbb{P}\Gamma\mathbb{L}(n, \mathbb{F})$ csoportot.

26. Feladat. *Legyen q egy teteszőleges prímhatvány.*

(i) Ha $q = p$ prím, akkor $\mathbb{F}_p$-nek egyetlen automorfizmusa van, az identitás.

(ii) Ha $q = p^k$ nem prím ($k > 1$), akkor $\mathbb{F}_q$-nak van nemtriviális automorfizmusa. Egy példa az $\varphi : x \mapsto x^p$ leképezés (Frobenius automorfizmus). φ generálja az összes automorfizmust (azaz minden automorfizmus φ hatványa).

27. Feladat. *Határozzuk meg* $\mathbb{GL}(n, \mathbb{F})$, $\Gamma\mathbb{L}(n, \mathbb{F})$, $\mathbb{SL}(n, \mathbb{F})$, $\mathbb{PGL}(n, \mathbb{F})$, $\mathbb{P}\Gamma\mathbb{L}(n, \mathbb{F})$, $\mathbb{PSL}(n, \mathbb{F})$, *elemszámát.*

28. Feladat. *Igazoljuk, hogy* $\mathbb{A}ut(\mathcal{PG}(2, \mathbb{F}_4)) \simeq \mathbb{P}\Gamma\mathbb{L}(3, \mathbb{F}_4)$. *Általában* $\mathbb{A}ut(\mathcal{PG}(2, \mathbb{F})) \simeq \mathbb{P}\Gamma\mathbb{L}(3, \mathbb{F})$.