Szimmetrikus kombinatorikus struktúrák MSc hallgatók számára

Véges síkok

Előadó: Hajnal Péter

1. Véges projektív síkok

A projektív geometriai szemlélet a középkorban alakult ki, a festészet és az építészet fejlődéseképpen. Az elmélet kialakításához a perspektíva törvényeinek tanulmányozása vezetett. A projektív sík, mint az euklideszi geometria egy továbbfejlesztése jelent meg. Mi nem az euklideszi geometriára építünk, hanem egy axiómarendszert megadva dolgozzuk ki az elmélet alapjait. Axiómarendszerünk csak illeszkedési axiómákat tartalmaz. Ennek következményeképen véges struktúrák is kielégíthetik az axiómánkat. Célunk ezen véges „modellek” vizsgálata.

Definíció. A $\mathcal{P}$ *projektív sík* egy (P, E, I) hármas, ahol P és E nem üres halmazok, és $I \subseteq P \times E$ egy reláció, amelyre az alábbiak teljesülnek:

$(o)_1$ $\forall e \in E,\ \exists p \neq q \neq r \neq p \in P : pIe, qIe, rIe,$

$(o)_2$ $\forall p \in P,\ \exists e \neq f \neq g \neq e \in E : pIe, pIf, pIg,$

$(i)_1$ $\forall p \neq q \in P,\ \exists! e \in E : pIe, qIe,$

$(i)_2$ $\forall e \neq f \in E,\ \exists! p \in P : pIe, pIf.$

P elemeit *pontoknak*, E elemeit *egyeneseknek*, az I relációt *illeszkedési relációnak* nevezzük.

Megjegyzés. A $\exists! p$ jelölés jelentése: „pontosan egy olyan p létezik, hogy …”.

A pIe relációt úgy is olvashatjuk, hogy *az e egyenes áthalad a p ponton*, illetve *p az e egyenes pontja*. A pIe és pIf relációkat úgy is kimondhatjuk, hogy *p az e és f egyenesek metszése*. A pIe és qIe relációkat úgy is olvashatjuk, hogy *e egy pq egyenes*, illetve az $(i)_1$ axióma alapján *e a pq egyenes* vagy „e a p és q pontokat összekötő egyenes”.

Nagyon fontos, hogy az axiómák fenti formális leírását minden érdeklődő olvasó le tudja és le is fordítsa olvasó elfordítsa a „hétköznapi nyelvre”:

$(o)_1$ Minden egyenes legalább három különböző ponton áthalad.

$(o)_2$ Minden ponton legalább három különböző egyenes halad át.

$(i)_1$ Két különböző ponton pontosan egy egyenes halad át.

$(i)_2$ Két különböző egyenesnek pontosan egy metszéspontja van.

Mi az eredeti formalizálással azt szerettük volna hangsúlyozni, hogy tárgyalásunk az axiómatikus szemléletet követi.

A továbbiakban az illeszkedési axiómáknak eleget tevő véges modelleket vizsgáljuk.

Definíció. Egy $\mathcal{P} = (P, E, I)$ projektív sík *véges*, ha P véges halmaz.

A továbbiakban véges projektív síkokkal foglalkozunk. A projektív síkok ábrázolása a következőképpen történik. Természetesen a lerajzoláshoz az euklideszi síkot használjuk. P elemei pontoknak felelnek meg az euklideszi síkon. Az egyeneseknek görbék felelnek meg az euklideszi síkon úgy, hogy egy e egyenesnek megfelelő g_e görbe pontosan az e egyenesre illeszkedő P-beli elemeknek megfelelő pontokon haladjon át.

Az alábbi ábra egy projektív síkot ábrázol. Ezt a projektív síkot *Fano-síknak* nevezzük.

1. ábra.

Már említettük, hogy az axiómák megtekintése után nyilvánvaló, hogy az egyenesek és pontok szerepe felcserélhető. Ez az észrevétel vezet el a következő definícióhoz.

Definíció. Legyen $\mathcal{P} = (P, E, I)$ egy projektív sík. Ekkor $\mathcal{P}^* = (E, P, I^*)$ a $\mathcal{P}$ sík duálisa, ahol I^* az a reláció, amelyre eI^*v akkor és csak akkor, ha vIe.

Hogy az axiómákban az egyenesek és pontok szerepe szimmetrikus, úgy is megfogalmazható, hogy $\mathcal{P}^*$ is egy projektív sík.

$\star \quad \star \quad \star$

Az a feltétel, hogy P és E nem üres, illetve az $(o)_1$ és $(o)_2$ axiomák lényege, hogy néhány elfajuló modellt kizárjunk. Ha csak az $(i)_1$ és $(i)_2$ axiómákat tesszük fel, akkor a következő modellek is „beleférnek” a definícióba:

$\mathcal{O}$: $P = \emptyset$, illetve $P = \{p\}$ és $E = \emptyset$.

$\mathcal{E}$: Egyetlen egyenesünk van, összes pontunk illeszkedik rá.

$\mathcal{C}$: Pontjaink egy e egyenes pontjai és egy e-n kívül fekvő p pont. Egyeneseink az e egyenes és azok az egyenesek, amelyekre pontosan p, illetve e egyenes egy-egy pontjára illeszkednek.

Könnyű meggondolni, hogy a „nem-ürességi feltételek”, illetve $(o)_1$ és $(o)_2$ elhagyásával csak ezek a „plussz modellek” keletkeznek. Így a nemürességi feltételek, $(o)_1$ és $(o)_2$ kikötése ezen modellek kizárását szolgálja. Ezen „elfajuló síkok” elkerülése másféle módon is megoldható. A következő lemmában az elfajuló síkok kizárásának ekvivalens módjait mutatjuk meg.

Mi azért választottuk az $(o)_1$ és $(o)_2$ axiómákat, mert ezzel is hangsúlyozzuk a pontok és egyenesek szerepének szimmetrikus voltát. A két axiómapár mutatja, hogy P, illetve E halmaz szerepe felcserélhető.

1. Lemma. *Legyen (P, E, I) egy $(i)_1$-t és $(i)_2$-t kielégítő struktúra. Ekkor a következők ekvivalensek:*

- (o) *legalább egy pontunk van, $(o)_1$ és $(o)_2$,*
- $(o)'$ *létezik 4 pont, amelyek közül semelyik 3 nincs egy egyenesen,*
- $(o)''$ *létezik 4 egyenes, amelyek közül semelyik 3 nem halad át közös ponton,*
- $(o)'''$ *legalább egy egyenesünk van (E nem üres) és tetszőleges egyenesen kívül található két különböző pont.*
- $(o)'^{v}$ *legalább egy pontunk van (P nem üres) és tetszőleges ponthoz van két olyan egyenes, amelyek egyike sem halad át a ponton,*
- $(o)^{v}$ *legalább két egyenesünk van és tetszőleges két különböző egyeneshez létezik olyan pont, amelyik egyiken sincs rajta,*
- $(o)^{v\prime}$ *legalább két pontunk van és tetszőleges két különböző ponthoz létezik olyan egyenes, amelyik egyik ponton sem halad át.*

A lemma axiómatikus látásmódot kívánó, egyszerű bizonyítása nem vág bele jegyzetünk fő sodrásába. Ezért nem ismertetjük, az érdeklődő olvasó számára egy feladatban tűzzük ki igazolását.

2. Feladat. *Bizonyítsuk be a fenti lemmát.*

Megjegyzés. Az elfajuló síkok kizárására a legelfogadottabb axióma $(o)'$.

⋆ ⋆ ⋆

Minden egyenes azonosítható a rajta lévő pontok halmazával: $e \in E \equiv \pi_e = \{p \in P : pIe\}$. Az $(o)_1$ axióma alapján minden e egyenes esetén $|\pi_e| \geq 3$. Az $(i)_1$ axióma alapján különböző egyenesek ponthalmaza különböző halmaz. Tehát a (P, E, I) hármas azonosítható a $\mathcal{B}_{\mathcal{P}} = \{\pi_e : e \in E\} \subseteq 2^P$ halmazrendszerrel.

3. Lemma. *$\mathcal{P}$ véges projektív sík esetén a $\mathcal{B}_{\mathcal{P}}$ halmazrendszer egy blokkrendszer.*

Bizonyítás. Csak azt kell belátni, hogy $\mathcal{B}_{\mathcal{P}}$ egy uniform halmazrendszer, azaz a véges projektív sík minden egyenesén ugyanannyi pont van.

Legyen e és f két egyenes $\mathcal{P}$-ben. Legyen a két egyenes egyikére sem illeszkedő pont q. Vetítsük q-ból e-t f-re. Azaz legyen $v_{q,e,f} : \pi_e > \pi_f$ az a leképezés, amelynél $x \in \pi_e$ képe az xq egyenes és f metszéspontja. Könnyű meggondolni, hogy $x \neq q$, azaz az xq egyenes jól definiált, és nem azonos az f egyenessel, azaz az axiómák alapján xq és f metszése is jól definiált. Tehát a $v_{q,e,f}$ leképezés jól definiált.

Segédlemma. $v_{q,e,f}$ egy bijekció π_e és π_f között.

Bizonyítás. $v_{q,f,e} : \pi_f > \pi_e$ az f egyenes vetítése e-re: $x \in \pi_f$ esetén $v_{q,f,e}(x)$ az xq egyenes metszése e-vel. Könnyen belátható, hogy $v_{q,f,e} \circ v_{q,e,f} = \mathrm{id}_e$, és $v_{q,e,f} \circ \tilde{v}_{q,f,e} = \mathrm{id}_f$, ahol id_e és id_f a megfelelő egyenesek ponthalmazán lévő identitás leképezés. ■

Ezzel a lemmát beláttuk. ■

Definíció. Egy $\mathcal{P}$ projektív sík egyeneseinek közös pontszáma legyen $t + 1$. A t számot a projektív sík *paraméterének* vagy *rendjének* nevezzük.

4. Tétel. *Legyen $\mathcal{P}$ egy t paraméterű véges projektív sík és $\mathcal{B}_{\mathcal{P}}$ a megfelelő halmazrendszer. Ekkor a $\mathcal{B}_{\mathcal{P}}$ blokkrendszer paraméterei: $v = t^2 + t + 1$, $k = t + 1$ és $\lambda = 1$.*

Bizonyítás. A k értéke, a projektív sík paraméterének definíciója szerint $t + 1$.

$\lambda = 1$ a Az $(\mathrm{i})_2$ axióma alapján $\lambda = 1$.

Legyen v a pontok száma egy t paraméterű projektív síkon. A v paraméter kifejezéséhez legyen e egy egyenes, $\pi_e = \{p_1, \ldots, p_{t+1}\}$, és q egy rajta kívüli pont. Ekkor a q ponton pontosan $t + 1$ egyenes halad át: $f_1 = qp_1, f_2 = qp_2, \ldots, f_{t+1} = qp_{t+1}$. A $\pi_{f_i} - \{q\}$ ponthalmazok ($j = 1, 2, \ldots, t+1$) mindegyike t-elemű, diszjunktak, és lefedik a sík q-n kívüli részét. Ebből adódik, hogy a síkon $1 + (t + 1)t = t^2 + t + 1$ sok pont van. ■

5. Lemma. *A véges projektív síkok azonosíthatók a $(k^2 + k + 1, k + 1, 1)$ paraméterű ($k \geq 2$) blokkrendszerekkel.*

6. Feladat. *Bizonyítsuk be a fenti állítást.*

A tétel alapján egy projektív sík fefogható egy geometriai illeszkedési struktúrának és alternatív módon egy halmazrendszernek is. Mi a halmezrendszeres szemléletet helyezzük előtérbe. Például $\mathcal{F}$ a Fano-síkkal ekvivalens halmazrendszer lesz. Projektív síkok n paraméterét ismerve (általában) nem ismerjük a halmazrendszerünket izomorfia erejéig. Az n paraméterű projektív síko/halmazrendszerek összessége $\mathfrak{PG}(2, n)$.

A véges projektív síkok egyik alapkérdése, hogy milyen értékeket vehet fel egy véges projektív sík paramétere. A fentiek alapján ez speciális esete adott paraméterekkel rendelkező blokkrendszerek létezése problémájának. Ebben a konkrét esetben a Wilson-tétel nem ad semmilyen segítséget. Mivel k és λ rögzítése után a keresett sík paraméterét is rögzítettük. Így konkrét méretű ponthalmazon keresünk egy alkalmas blokkrendszert.

7. Lemma. *Minden q prímhatványra létezik q paraméterű projektív sík.*

Bizonyítás. Tudjuk, hogy létezik q-elemű $\mathbb{F}_q$ véges test. Az $\mathbb{F}_q^3 - \{(0,0,0)\}$ halmazon definiálunk egy ekvivalencia relációt: $(x,y,z) \sim (x',y',z')$, ha létezik olyan $\lambda \in \mathbb{F}_q$, hogy $(x',y',z') = \lambda(x,y,z)$. Legyen $P = E = \mathbb{F}_q^3\big|_{\sim}$. Egy $p \in P$ pont legyen az (a,b,c) hármas ekvivalenciaosztálya, jelölésben $p = [a,b,c]$. Egy alternatív jelölés $p = (a:b:c)$. Egy $e \in E$ egyenes legyen az (α,β,γ) hármas ekvivalenciaosztálya. Jelöléssel $e = [\alpha,\beta,\gamma]^* = (\alpha:\beta:\gamma)^*$. Egy p pont akkor és csak akkor illeszkedik az e egyenesre, ha $\alpha \cdot a + \beta \cdot b + \gamma \cdot c = 0$. Ez egy jól definiált illeszkedési reláció P és E között.

Annak ellenőrzése, hogy P, E a fent leírt illeszkedési relációval egy véges projektív síkot alkot, az $\mathbb{F}_q$ feletti lineáris algebra segítségével könnyen megtehető.

Az így kapott véges projektív sík pontjainak száma $\frac{q^3-1}{q-1} = q^2+q+1$, hiszen $|\mathbb{F}_q^3 - \{(0,0,0)\}| = q^3 - 1$ és $\sim$ minden ekvivalencia osztálya $q-1$-elemű. Tehát a konstruált projektív sík paramétere q. ■

Megjegyzés. Egy P pont azonosítására használt aritmetikai számhármas skálázható. Nem-nulla számmal szorozva egy másik „nevet” kapunk ugyanarra pontra (ilyet a törtek általános iskolai tanulmányozásánál már láttunk). Igazából egy P pont egy (x,y,z) számhármas osztálya. x,y,z a P pont *homogén koordinátái.*

A tétel bizonyítása nem meglepő azok számára akik ismerik a véges projektív geometria alapjait. A „folytonos esetben” bevezetett koordináta geometriát másoltuk le egy véges testtel helyettesítve a valós számok testét.

Definíció. A fenti véges projektív síkot $\mathcal{PG}(2,\mathbb{F}_q)$-val jelöljük, az $\mathbb{F}_q$ felett koordinátázott véges projektív síknak nevezzük.

A fentiek alapján $\mathfrak{PG}(2,n)$ nemüres, ha n prímhatvány: q prímhatványra $\mathcal{PG}(2,\mathbb{F}_q) \in \mathfrak{PG}(2,q)$ Más paraméterértékekre létezik-e véges projektív sík?

Sejtés. Akkor és csak akkor létezik k paraméterű projektív sík, ha k prímhatvány.

A matematikában jártas olvasó minden nehézség nélkül megfogalmazhatja a projektív síkok izomorfizmusának fogalmát. Ezek után természetes a fenti sejtés élesítése: Igaz-e, hogy az összes véges projektív síkot leírja a véges testeken alapuló $\mathcal{PG}(2,\mathbb{F}_q)$ konstrukció.

Ez az élesített sejtés nem igaz: például a paraméter 9 értéke esetén létezik az általunk megkonstruált projektív síktól eltérő (nem izomorf) sík is. Ez a megjegyzés a sejtésben rejlő probléma nehézségét mutatja.

Korábbi eredményeink alapján a sejtés a blokkrendszerek nyelvén is megfogalmazható:

Sejtés. Akkor és csak akkor létezik $(k^2+k+1, k+1, 1)$ paraméterű blokkrendszer, ha k prímhatvány.

Térjünk vissza a geometriai nyelvezethez. $\mathcal{PG}(2,\mathbb{F}_q)$ konstrukció a sejtés egyik irányát nyilvánvalóvá teszi. A maradék (a nehéz) rész azt állítja, ha k nem prímhatvány, akkor nem létezik k paraméterű projektív sík. Speciális k számok esetén részeredmények vannak. A teljesség igénye nélkül megemlítjük a két legkisebb k érték esetére vonatkozó eredményeket.

8. Tétel. *(i) $k = 6$ paraméterű projektív sík nem létezik.*

(ii) $k = 10$ *paraméterű projektív sík nem létezik.*

Az (i) pont bizonyítását nem túl nehéz „klasszikus matematika". Az (ii) pont bizonyítása meghaladja egy előadás kereteit Ez a viszonylag friss — 1989-ban született — eredmény jelentősen használja a számítógépeket (az akkori idők leggyorsabb gépein futtatva, $\sim$2000 óra gépidőt használva látták be az állítást). A futtatott programok igényes matematikai háttéren alapunak. (Lásd C.W.H. Lam: The search for a finite projective plane of order 10, *American Mathematical Monthly*, 1991 január.)

9. Feladat. *Igazoljuk, hogy a Fano-sík és* $\mathcal{PG}(2, \mathbb{F}_2)$ *izomorf.*

10. Feladat. *Bizonyítsuk be, hogy a 2 paraméterű projektív síkok egymással izomorfak. (Speciálisan mind a Fano-síkkal, vagy ami ugyanaz* $\mathcal{PG}(2, \mathbb{F}_2)$*-vel izomorf.)*

11. Feladat. *Bizonyítsuk be, hogy a 3 paraméterű projektív síkok egymással izomorfak. (Speciálisan mind* $\mathcal{PG}(2, \mathbb{F}_3)$*-mal izomorf.)*

12. Feladat. *Rajzoljuk fel* $\mathcal{PG}(2, \mathbb{F}_3)$*-mat.*

13. Feladat. * *Bizonyítsuk be, hogy a 4 paraméterű projektív síkok egymással izomorfak. (Speciálisan mind* $\mathcal{PG}(2, \mathbb{F}_4)$*-gyel izomorf.)*

14. Feladat. * *Rajzoljuk fel* $\mathcal{PG}(2, \mathbb{F}_4)$*-gyet.*

15. Feladat. * *Bizonyítsuk be, hogy a 5 paraméterű projektív síkok egymással izomorfak. (Speciálisan mind* $\mathcal{PG}(2, \mathbb{F}_5)$*-tel izomorf.)*

16. Feladat. *Bizonyítsuk be, hogy a Fano-sík lerajzolása nem valósítható meg úgy, hogy az összes egyenest euklideszi egyenes reprezentálja.*

2. Véges affin síkok

Ebben az alfejezetben az affin síkoknak a projektív síkokhoz hasonló tárgyalását vázoljuk.

Definíció. Egy $\mathcal{A} = (P, E, I)$ hármast *affin síknak* nevezünk, amennyiben P és E nem-üres halmazok, és $I \subseteq P \times E$ egy reláció, amelyre az alábbiak teljesülnek:

$(o)_1$ $\forall e \in E,\ \exists p \neq q \in P : pIe, qIe,$

$(o)_2$ $\forall p \in P,\ \exists e \neq f \in E : pIe, pIf,$

(i) $\forall p \neq q \in P,\ \exists! e \in E : pIe, qIe,$

(ii) $\forall e \in E,\ \forall p \in P,\ ((\neg pIe) \rightarrow (\exists! f \in E : \nexists q \in P : qIe \wedge qIf)).$

P elemeit *pontoknak*, E elemeit *egyeneseknek*, az I relációt *illeszkedési relációnak* nevezzük.

Azaz szavakkal:

(o) Minden egyenesre legalább két pont illeszkedik, minden ponton legalább két egyenes halad át.

(i) Bármely két különböző pontra pontosan egy egyenes illeszkedik. (Azaz két különböző egyenesnek vagy egy közös pontja van (*metszők*), vagy egy sincs (*párhuzamosak*).)

(ii) Bármely e egyenes, és egy rajta nem fekvő p pont esetén pontosan egy e-vel párhuzamos egyenes halad át p-n.

Megjegyzés. A továbbiakban a párhuzamosság fogalmát kiterjesztjük. Két egybeeső egyenest egymással párhuzamosnak nevezünk. Az e és f egyenes párhuzamosságának jele $e\|f$. Megjegyzésünk szerint $e\|e$ is teljesül.

Definíció. Egy (P, E, I) affin síkot véges affin síknak nevezünk, ha a P és E halmazok végesek.

Megjegyzés. A ponthalmaz végességéből E végessége is következik. Az egyenesek számosságának végességéből P végességére is következtethetünk.

Először a projektív síkok és affin síkok kapcsolatát írjuk le. Akik a projektív geometriát már korábban tanulmányozták ezen a szoros kapcsolaton nem fognak meglepődni. A projektív síkok bevezetése a $XVI - XVII$. században az affin síkok kiterjesztésére épült. Az általunk követett axiómatikus felépítés később alakult ki.

17. Lemma. *A párhuzamosság ($\|$) egy ekvivalenciareláció az egyenesek halmazán.*

Bizonyítás. Csak a tranzitivitás problémás. Tegyük fel, hogy $e\|f$ és $f\|g$. Ha $e\|g$ nem teljesül, akkor e és g metsző, azaz van mindkettőre illeszkedő m pont. Az f egyenes és m pont ellentmond az (ii) axiómának, ami az állítást bizonyítja. ∎

Definíció. Legyen $[e]$ a fenti ekvivalenciareláció e-t tartalmazó osztálya. Azaz $[e] = [f]$, $f \in [e]$ akkor és csak akkor teljesül, ha $e\|f$.

18. Következmény. *Az e egyenessel párhuzamos egyenesek $[e]$ halmaza osztályozza ponthalmazunkat. Pontosabban fogalmazva, minden pont pontosan egy $[e]$-beli egyenesre illeszkedik.*

Bizonyítás. A (ii) axióma alapján minden e-n kívüli ponton keresztül pontosan egy $[e]$-beli egyenes halad. Az e egyenes pontjait is egyetlen $[e]$-beli egyenes fedi le: e. ∎

Az alábbiakban minden affin síkhoz hozzárendelünk egy új illeszkedési struktúrát (erről majd kimutatjuk, hogy projektív sík). Továbbá minden projektív síkhoz is hozzárendelünk egy új illeszkedési struktúrát (erről majd kimutatjuk, hogy affin sík).

Először szemléletesen írjuk le projektív síkok származtatását affin síkokból. Minden párhuzamos egyenessereghez hozzárendelünk egy „végtelen távoli pontot”, amely a kiinduló párhuzamos egyenessereg összes elemére illeszkedik. Az egyenesek halmazát kibővítjük egy „végtelen távoli egyenessel”, amelyre pontosan a végtelen távoli pontok illeszkednek. Síkunk végtelen távoli elemeit *ideális elemeknek* (pontoknak és egyeneseknek) is nevezik.

A nem végtelen távoli pontokat közönséges pontoknak, a kiinduló síkjaink egyeneseit pedig közönséges egyeneseknek nevezzük. A közönséges egyenesek mindegyike pontosan egy végtelen távoli pontot tartalmaz. A közönséges egyenesek és pontok közötti illeszkedés a kiinduló affin sík geometriája szerint történik.

Most lássuk a formális definíciót.

Definíció. Legyen $\mathcal{A} = (P, E, I)$ egy affin sík. Legyen $\widehat{P} = P\dot{\cup}\{[e] : e \in E\} = P\dot{\cup}P_\infty$. Legyen $\widehat{E} = E\dot{\cup}\{e_\infty\}$. Továbbá $p\widehat{I}e$ akor és csak akkor, ha a következő esetek valamelyike teljesül:

(i) $p \in P, e \in E$ és pIe,

(ii) $p \in P_\infty, e \in E$ és $p = [e]$,

(ii) $p \in P_\infty$ és $e = e_\infty$.

Ezzel egy $(\widehat{P}, \widehat{E}, \widehat{I})$ illeszkedési struktúrát definiáltunk.

A $(\widehat{P}, \widehat{E}, \widehat{I})$ struktúrában egy egyenes (e_∞) kitüntetett szerepet játszik. A fordított irányú viszonyban is egy kitüntetett egyenessel rendelkező projektív síkkal kezdünk. Ismét egy informális leírással kezdjük: Egy projektív síknak kiválasztjuk egy tetszőleges egyenesét, és az erre illeszkedő pontokat elhagyjuk. A korábbi illeszkedései reláció megszorítása, a maradék pontok és el nem hagyott egyenesek halmazára, adja az új struktúránkat. Most lássuk a formális definíciót.

Definíció. Legyen (P, E, I) egy projektív sík. Legyen $e_0 \in E$ egy kitüntetett egyenes. Legyen $P' = \{p \in P : p \not{I} e_0\}$, $E' = E \setminus \{e_0\}$ és $I' = I \cap (P' \times E')$.

Ezzel egy (P', E', I') új illeszkedési struktúrához jutottunk.

19. Tétel. *(i) Legyen (P, E, I) egy affin sík. Ekkor $(\widehat{P}, \widehat{E}, \widehat{I})$ egy projektív sík.*

(ii) Legyen (P, E, I) egy projektív sík. Ekkor (P', E', I') egy affin sík.

(iii) Legyen (P, E, I) egy affin sík, és $(\widehat{P}, \widehat{E}, \widehat{I})$ az ebből származtatott projektív sík. Ekkor $(\widehat{P}, \widehat{E}, \widehat{I})$-ből az $e_0 = e_\infty$ választással származtatott affin sík az (P, E, I) affin sík lesz.

(iv) Legyen (P, E, I) egy projektív sík, és (P', E', I') az ebből származtatott affin sík. Ekkor a (P', E', I') síkból származtatott projektív sík a (P, E, I) síkkal izomorf lesz.

Bizonyítás. (i) A $(\widehat{P}, \widehat{E}, \widehat{I})$-re vonatkozó projektív illeszkedési axiómák közül csak egyet ellenőrizünk. A többi hasonló módszerrel egyszerűen belátható. Igazoljuk, hogy tetszőleges két különböző egyenesre pontosan egy közös pont illeszkedik. Esetszétválasztással dolgozunk.

Két közönséges, metsző egyenesnek pontosan egy közös közönséges pontja van. A hozzájuk rendelt végtelen távoli pontok különbözőek, így a kívánt tulajdonság teljesül.

Két különböző közönséges, párhuzamos egyenesnek nincs közös közönséges pontja. Végtelen távoli pontjuk azonban azonos, így tulajdonságunk újra teljesül.

Egy közönséges egyenesnek és a végtelen távoli egyenesnek pontosan egy közös pontja van: közönséges egyenesünk egyetlen végtelen távoli pontja.

(ii) Ismét csak egyetlen (P', E', I')-re vonatkozó affin illeszkedési axióma ellenőrzését demonstráljuk. Belátjuk, hogy tetszőleges e egyeneshez és egy rá nem illeszkedő p ponthoz pontosan egy p-n átmenő e-vel közös pontot nem tartalmazó egyenes van.

A kívánt párhuzamos egyenes létezik: A kiinduló (P, E, I) projektív síkon e és e_0 egyetlen m közös pontját p-vel összekötő f egyenes (P', E', I')-ben nem metszi e-t. ((P, E, I)-beli egyetlen közös pontja e-vel a származtatás folyamán „el lett dobva”.) Más párhuzamos egyenes nem létezik. Ugyanis egy f-től eltérő, p-n áthaladó f' egyenes nem haladhat át m-en (m-et és p-t egyetlen egyenes köti össze, ez f). f'

és e (P, E, I) projektív síkban metszi egymást, az egyetlen metszéspont nem lehet m, így speciálisan nem lehet e_0-ra illeszkedő. Tehát a származtatás folyamán ez a metszéspont nem lett elhagyva, azaz f' és e (P', E', I')-ben is metszi egymást. Ezzel adódik a p-n áthaladó, e-vel párhuzamos egyenes egyértelműsége.

(iii) és (iv) igazolását az olvasóra hagyjuk. ■

Megjegyzés. A származtatás véges síkokból véges síkokat konstruál, míg végtelenekből végteleneket.

Az affin síkok egyeneseit azonosíthatjuk a rájuk illeszkedő pontok halmazával. Az egyeneseknek megfelelő ponthalmazok egy P feletti halmazrendszert alkotnak. Az affin síkok geometriai definíciója megfogalmazható a halmazrendszerek nyelvén is.

20. Következmény. *A (P, E, I) véges affin síkokhoz rendelt $\mathcal{A}$ halmazrendszerek pontosan az $(n^2, n, 1)$-blokkrendszerek.*

Bizonyítás. A (P, E, I) véges affin síkból származtatott $(\widehat{P}, \widehat{E}, \widehat{I})$ véges projektív sík azonosítható alkalmas n-re egy $(n^2 + n + 1, n + 1, 1)$ paraméterű blokkrendszerrel. Ebből a blokkrendszerből visszakapható az $\mathcal{A}$ halmazrendszer egy blokk elhagyásával és ennek pontjainak letakarásával. Ezzel $(n^2 + n + 1) - (n + 1) = n^2$ ponthoz és $(n^2 + n + 1) - 1 = n^2 + n$ blokkhoz jutunk, amelyek mindegyikének mérete $(n + 1) - 1 = n$. A blokkok $\lambda = 1$ paraméterrel blokkrendszert alkotnak. ■

Definíció. A (P, E, I) affin síkhoz rendelt $\mathcal{A}$ halmazrendszerhez tartozó n paramétert az affin sík paraméterének nevezzük.

Egy affin sík adott paraméterértéke (általában) nem adja meg izomorfizmus erejéig a síkot/halmazrendszert. A paraméter egy halmazrendszer-osztályt ír le. $\mathfrak{AG}(2, n)$ az n paraméterű affin síkok osztálya.

Az affin sík paramétere egyeneseinek közös elemszáma. A következő lemma a paraméter függvényében megadja az affin sík további fontos számszerű jellemzőit.

21. Lemma. *Az n paraméterű affin sík*
(i) pontjainak száma n^2,
(ii) egyeneseinek száma $n^2 + n$,
(iii) minden egyenesére n pont illeszkedik,
(iv) minden pontjára $n + 1$ egyenes illeszkedik.

Az $\mathbb{F}_q$ véges test felhasználásával leírtunk egy $\mathcal{PG}(2, \mathbb{F}_q)$ projektív síkot. Ebből származtatható affin sík is. Az alábbiakban ezt a síkot írjuk le a $\mathcal{PG}(2, \mathbb{F}_q)$ síktól függetlenül. Akik a középiskolai koordináta geometriával megbarátkoztak, maguk is megkísérelhetik az $\mathbb{F}_q$ véges test feletti felépítést.

Definíció. $\mathcal{AG}(2, \mathbb{F}_q)$ pontjai $\mathbb{F}_q \times \mathbb{F}_q$ lesznek. Egyenesei $(m, b) \in \mathbb{F}_q \times \mathbb{F}_q$ esetén az $y = mx + b$, $a \in \mathbb{F}_q$ esetén az $x = a$ egyenletek. Egy számpárnak megfelelő pont akkor illeszkedik egy egyenlet által leírt egyenesre, ha a számpár kielégíti a megfelelő egyenletet.

A következő lemma az illeszkedési axiómák ellenőrzését jelenti. Ez az $\mathbb{R}$ feletti lineáris algebrában jártas olvasó számára semmi újat nem ad. Azt kell ellenőrizni, hogy a megszokott egyenletrendszerek megoldására szolgáló módszerek tetszőleges test felett működnek. Ennek a feladatnak a végrehajtását az olvasóra bízzuk.

22. Lemma. *$\mathcal{AG}(2, \mathbb{F}_q)$ egy affin sík q paraméterrel. Azaz $\mathcal{AG}(2, \mathbb{F}_q) \in \mathfrak{AG}(2, q)$*

23. Feladat. *Bizonyítsuk be az affin síkok és az $(n^2, n, 1)$-blokkrendszerek azonosítására vonatkozó tételünket tisztán affin geometriai megfontolásokkal (axiómákból levezetve).*

24. Feladat. *Rajzoljuk fel $\mathcal{AG}(2, \mathbb{F}_2)$-t és $\mathcal{AG}(2, \mathbb{F}_3)$-at.*

25. Feladat. * *Rajzoljuk fel $\mathcal{AG}(2, \mathbb{F}_4)$-et.*