Szimmetrikus kombinatorikus struktúrák MSc hallgatók számára

Extremális gráfelmélet gráfjai

Előadó: Hajnal Péter 5. hét

1. Az extremális gráfelmélet alapkérdése

Rögzítsünk egy gráfméretet (csúcsszámot), és vizsgáljuk ezen méretű egyszerű gráfokat. Ezen gráfok izomorfiatípusainak halmaza legyen $\mathcal{G}_n$. $\mathcal{G}_n$ elemeit abból a szempontból tekintjük, hogy egy $\mathcal{T}$ gráftulajdonsággal rendelkeznek-e. A nyilvánvaló esetek kizárása miatt a $\mathcal{T}$ tulajdonságról tegyük fel, hogy *nem triviális*, azaz van a tulajdonságot kielégítő és a tulajdonságot nem kielégítő gráf is.

Legyen p egy gráfparaméter (p egy $\mathcal{G}_n$-en értelmezett függvény). Legyen $m = \min_{G\in\mathcal{G}_n} p(G)$, és $M = \max_{G\in\mathcal{G}_n} p(G)$. A $p(G) \geq m$ feltételt az összes n pontú egyszerű gráf kielégíti. Így nem triviális $\mathcal{T}$ tulajdonság esetén a feltétel által megengedett gráfok között lesz $\mathcal{T}$-t kielégítő és nem kielégítő gráf is. A $p(G) \geq M + 1$ feltételt egyik gráf sem teljesíti. A formális logika szabályai alapján mondhatjuk, hogy a $p(G) \geq M + 1$ feltétel garantálja, hogy G-re teljesüljön a $\mathcal{T}$ feltétel. Ha a $p(G)$-re adott alsó becslést az m és $M + 1$ értékek között változtatjuk, akkor találunk egy (az $(n, \mathcal{T}, p)$ hármashoz tartozó) „fordulópontot”: egy minimális k értéket úgy, hogy tetszőleges $G \in \mathcal{G}_n$ esetén ha $p(G) \geq k$, akkor G rendelkezik a $\mathcal{T}$ tulajdonsággal, de van olyan $N \in \mathcal{G}_n$, hogy $p(N) = k - 1$, és N nem rendelkezik a $\mathcal{T}$ tulajdonsággal. Ebben az esetben ezt a k értéket jelöljük $p\text{-ext}(n;\mathcal{T})$-vel.

Az extremális gráfelmélet célja a $p\text{-ext}(n;\mathcal{T})$ értékek meghatározása. Extremális kérdések nemcsak gráfokra, hanem más struktúrákra is megfogalmazhatók.

A fenti igen általános célkitűzést konkrét esetekkel világítjuk meg. Látni fogjuk, hogy klasszikus gráfelméleti eredmények némelyike felfogható az extremális gráfelméleti vizsgálatok részeként.

⋆ ⋆ ⋆

Dirac tétele azt állította, hogy ha egy n pontú egyszerű gráf minden fokszáma legalább $\lfloor n/2 \rfloor$, akkor garantáltan tartalmaz Hamilton-kört. Könnyű meggondolni, hogy a tételben szereplő $\lfloor n/2 \rfloor$ érték nem csökkenthető. Legyen $\delta(G)$ a gráf minimális fokszáma, és $\mathcal{H}$ a „Hamilton-körrel rendelkezni” tulajdonság. Ekkor a Dirac-tétel azt állítja, hogy

$$\delta\text{-ext}(n;\mathcal{H}) = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor.$$

⋆ ⋆ ⋆

A második példában a $\mathcal{T}$ tulajdonság „egy adott G_0 részgráfot tartalmazni” lesz. (Természetesen ez a tulajdonság nemcsak gráfokban vizsgálható, hanem olyan struktúrákban is, ahol részstruktúrát lehet definiálni. Ekkor G_0 szerepét egy adott részstruktúra veszi át.)

A gráfparamétert válasszuk az élszámnak.

Olyan tételt szeretnénk bizonyítani, amely szerint bizonyos élszám biztosít G_0-val izomorf részgráfot. Ilyen tétel nyilván létezik, hiszen az élszámra $\binom{n}{2}$ alsó becslést adva biztosítjuk, hogy gráfunk teljes gráf legyen, és ekkor tartalmaz részgráfként tetszőleges, legfeljebb n pontú, egyszerű gráfot. Ha a kizárt részgráf pontszáma több, mint n, akkor az élszámra $\binom{n}{2}+1$ alsó becslést adva biztosítjuk, hogy feltételünk ne legyen kielégíthető, így a kívánt tétel automatikusan igaz lesz. Másik oldalról, ha az élszámról nem teszünk fel semmit, akkor az összes n pontú egyszerű gráfot megengedjük, és „érdekes G_0 gráfokra" nem garantált, hogy legyen G_0 részgráfunk. Természetesen a G_0 gráfhoz tartozó „fordulópontot" az eddigiek alapján $|E(.)|$-ext$(n;\mathcal{T}_{G_0})$-lal kellene jelölni, ahol $\mathcal{T}_{G_0}$ a „G_0-lal izomorf részgráfot tartalmazni" tulajdonság. A kérdés fontossága miatt célszerűbb egy egyszerűsített jelölést bevezetni.

Definíció. Legyen $\mathrm{ext}(n;G_0)$, az a minimális szám, amelyre minden n pontú, $\mathrm{ext}(n,G_0)$ élű egyszerű gráf tartalmaz G_0-lal izomorf részgráfot.

Egy alternatív definíció lehet az $\mathrm{ext}^-(n;G_0)$ érték bevezetése: a G_0-t részgráfként nem tartalmazó egyszerű gráfok között a legtöbb élű gráf élszáma $\mathrm{ext}^-(n;G_0)$. Ezen megközelítés alapján időnként G_0-ra mint *kizárt/tiltott részgráfra* hivatkozunk. Nyilván $\mathrm{ext}^-(n;G_0)=\mathrm{ext}(n;G_0)-1$.

A fejezet legnagyobb részét azon vizsgálatok foglalják el, amelyek során a fent bevezetett $\mathrm{ext}(n;G_0)/\mathrm{ext}^-(n;G_0)$ értéket becsüljük. Ezeket a kérdéseket Turán-típusú kérdéseknek nevezzük, a kutatási irányt elindító eredmény szerzője után.

⋆ ⋆ ⋆

Hogy harmadik példánkat is leírjuk, szükségünk lesz néhány fogalomra.

Definíció. Egy G gráfban egy $e=xy$ *él felosztásával* nyert H gráf az a gráf, amelynek csúcshalmaza $V(G)\dot\cup\{u\}$, élhalmaza $(E(G)\setminus\{e\})\dot\cup\{e_1,e_2\}$ (az $E(G)\setminus\{e\}$ élhalmaz elemeit „régi éleknek", e_1-et és e_2-t „új éleknek" nevezzük), és a régi élek illeszkedése ugyanaz, mint G-ben, az új élek illeszkedése pedig a következő: e_1 x-et és u-t, e_2 pedig u-t és y-t köti össze.

A fenti definíció jóval egyszerűbb operációt ír le, mint ahogy azt hosszúsága miatt gondolnánk. Az u pontot egy új csúcsnak is tekinthetjük „az e él közepén", ami természetesen a régi e élt két élre osztja.

Definíció. A H gráf a G gráf *felosztása*, ha H megkapható G-ből az élfelosztás operáció ismételt alkalmazásával.

Azt is mondhatjuk, hogy H felosztása G-nek, ha megkapható úgy, hogy G éleit legalább 1 hosszú pontfüggetlen utakkal helyettesítjük.

Definíció. A G_0 gráf a G gráf *topologikus részgráfja*, ha G tartalmazza részgráfként G_0 egy felosztását.

Az extremális gráfelmélet témájára harmadik példánkban a $\mathcal{T}$ tulajdonság a „tartalmaz G_0 topologikus részgráfot" tulajdonság lesz.

A paramétert ismét az élszámnak választjuk. A megfelelő extremális függvényt top-ext$(n;G_0)$-val jelöljük.

$\star$

A fenti példák csak kis ízelítőt adnak az extremális gráfelmélet témájából. A gráfelméletnek ezek a kérdései, igen széleskörű alkalmazásaik miatt, a kutatások egyik legfontosabb irányát adják.

Definíció. Legyen $\mathcal{G}$ gráfok egy halmaza. $\mathrm{ext}(n;\mathcal{G})$ az a legkisebb m szám, amelyre teljesül, hogy egy n pontú, m élű egyszerű gráf biztosan tartalmaz $\mathcal{G}$-beli részgráfot.

1. Feladat. *Legyen $\mathcal{T}_n$ az n pontú fák halmaza. Bizonyítsuk be, hogy*

$$ext(n;\mathcal{T}_n) = \binom{n-1}{2} + 1.$$

2. Feladat. *Legyen $\mathcal{C}_k$ a k-szorosan összefüggő gráfok halmaza. Bizonyítsuk be, hogy*

$$ext(n;\mathcal{C}_k) \leq (2k-1)\big(n-(k-1)\big).$$

3. Feladat. *Legyen $\mathcal{K}$ a körök halmaza. Határozzuk meg $ext(n;\mathcal{K})$ értékét.*

4. Feladat. *Legyen $\mathcal{K}_1$ a páratlan hosszú körök halmaza. Határozzuk meg $ext(n;\mathcal{K}_1)$ értékét.*

5. Feladat. *Legyen $\mathcal{K}_0$ a páros hosszú körök halmaza. Határozzuk meg $ext(n;\mathcal{K}_0)$ értékét.*

2. Turán tétele

Célunk egy k természetes szám esetén a K_k-t részgráfként nem tartalmazó egyszerű gráfok maximális élszámának meghatározása. A következőkben megadunk nagy élszámú egyszerű gráfokat, amelyek nem tartalmazzák K_k-t részgráfként. Ezeket Turán Pál emlékére *Turán-gráfoknak* nevezzük.

Definíció. Legyen $T_{n,k}$ a következő, n pontú egyszerű gráf ($k \geq 1$): Legyen $V(T_{n,k}) = \{1, 2, \ldots, n\} = V$, és $V = A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_{k-1} \cup A_k$ a ponthalmaz k darab majdnem egyenlő halmazra való osztályozása (tehát $A_i \cap A_j = \emptyset$, ha $i \neq j$, és $\big||A_i| - |A_j|\big| \leq 1$ bármely i, j-re), és $E(G) = \{xy : x \in A_i,$ és $y \in A_j$ valamely $i \neq j$ esetén$\}$, azaz a különböző halmazok közt az összes lehetséges élt behúzzuk, míg egy halmazon belül nem vezet él.

$n \leq k$ esetén $T_{n,k}$ a teljes gráf, és $T_{n,1}$ az üres gráf.

Megjegyzés. Az egyes $|A_i|$ osztályok elemszámainak összessége (mint multihalmaz) egyértelműen meghatározott. Ha $n = q \cdot k + r$, ahol $0 \leq r < k-1$, akkor r darab A_i halmaz elemszáma lesz $q+1$, és a többi ($k-r$ darab) osztályé q. Így a fenti definíció izomorfia erejéig meghatározza a Turán-gráfokat.

Nyilvánvaló, hogy $T_{n,k-1}$ nem tartalmazza K_k-t részgráfként. Általában egy $k-1$-részes gráf nem tartalmaz k elemű klikket: A skatulyaelv alapján k pontot kiválasztva a ponthalmazból legalább kettő ugyanabba az A_i halmazba esik, tehát nincsenek összekötve. Többet is mondhatunk egy $k-1$-részes gráf nem tartalmaz olyan gráfot, mely kromatikus száma legalább k. Valóban: Egy $k-1$ részes gráf $k-1$-színezhető, így minden részgráfja is az.

Az extremális gráfelmélet jelöléseivel $\mathrm{ext}(n; K_k) > |E(T_{n,k-1})|$, azaz $\mathrm{ext}^-(n; K_k) \geq |E(T_{n,k-1})|$. Belátjuk, hogy ez a becslés éles.

6. Tétel (Turán-tétel). *$k \geq 2$ esetén*

$$ext^-(n; K_k) = |E(T_{n,k-1})|.$$

Továbbá, ha $G \in \mathcal{G}_n$ élszáma $|E(T_{n,k-1})|$ és nem tartalmaz k elemű klikket, akkor izomorf $T_{n,k-1}$-val.

7. Feladat. *Határozzuk meg $\mathbb{A}ut(T_{n,k})$-t.*

8. Feladat. *Egy $2n$ tagú társaságban n^2-nél több kézfogás történt (semelyik két ember sem fogott kezet egynél többször). Tudjuk, hogy senki sem fogott többször kezet, mint András. Bizonyítsuk be, hogy azok között, akikkel András kezet fogott, van két olyan ember, akik egymással is kezet fogtak!*

9. Feladat. *Legyen G egyszerű, k-reguláris gráf. Bizonyítsuk be, hogy a G-ben és a $\overline{G}$-ban szereplő háromszögek száma együtt*

$$\binom{n}{3} - \frac{n}{2}k(n-k-1).$$

10. Feladat. *Bizonyítsuk be, hogy egy n pontú, m élű egyszerű gráfban legalább*

$$\frac{4m}{3n}\left(m - \frac{n^2}{4}\right)$$

háromszög van.

3. Erdős—Stone-tétel

A Turán-gráf nem csak „nagy” teljes gráfot nem tartalmaz részgráfként. Egyszerű észrevenni, hogy a $T_{n,k-1}$ Turán-gráf minden részgráfja $k-1$ színezhető (hiszen $T_{n,k-1}$ egy $k-1$-színezhető gráf). Tehát ha a G_0 gráf kromatikus száma k, akkor G_0 nem részgráfja $T_{n,k-1}$-nek. Azaz $\mathrm{ext}(n; G_0) > |E(T_{n,\chi(G_0)-1})|$.

A Turán-gráfok élszámára felírható egy képlet, de ez igen hosszú, és benne a függvény nagyságrendje „el van bújtatva ”. Könnyen adható azonban egy becslés:

$$|E(T_{n,k})| \geq \binom{k-1}{2}\left(\frac{n}{k-1}\right)^2 \sim \frac{k-2}{k-1} \cdot \frac{n^2}{2} \sim \left(1 - \frac{1}{k-1}\right)\binom{n}{2}.$$

Egyszerű belátni, hogy a kapott becslés aszimptotikus lesz, ha k fix, és n tart a végtelenhez, azaz tetszőleges k-ra:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|E(T_{n,k})|}{\binom{n}{2}} = 1 - \frac{1}{k-1}.$$

Tehát az $\mathrm{ext}(n; G_0)$-ra adott alsó becslés nagyságrendje $\left(1 - \frac{1}{\chi(G_0)-1}\right)\binom{n}{2}$. Erdős Pál és A. H. Stone következő tétele azt mondja ki, hogy ez a becslés éles.

11. Tétel (Erdős—Stone-tétel). *Ha a G_0 egyszerű gráf nem üres, akkor*

$$\lim_{n>\infty} \frac{ext(n;G_0)}{\binom{n}{2}} = 1 - \frac{1}{\chi(G_0)-1}.$$

A tételt nem bizonyítjuk. Megemlítjük, hogy az $\mathrm{ext}(n;G_0)$ értékének aszimptotikus viselkedését a $\chi(G_0) = 2$ eset kivételével a tétel megadja. A $\chi(G_0) = 2$ esetben „csak” az $\mathrm{ext}(n;G_0) = o(n^2)$ formulát kapjuk. Tehát az aszimptotikus viselkedés szempontjából csak a páros G_0 gráfok esete marad hátra.

4. További eredmények

Bizonyítás nélkül összefoglaljuk az $\mathrm{ext}(n;G_0)$ függvényről ismerteket:

- Legyen G_0 a k pontú üres gráf. Ekkor

$$\mathrm{ext}(n;G_0) = \begin{cases} \binom{n}{2}+1, & \text{ha } k > n, \\ 0, & \text{ha } k \le n. \end{cases}$$

- Legyen G_0 egyetlen egy élt és izolált pontokat tartalmazó k pontú gráf. Ekkor

$$\mathrm{ext}(n;G_0) = \begin{cases} \binom{n}{2}+1, & \text{ha } k > n, \\ 1, & \text{ha } k \le n. \end{cases}$$

- Legyen G_0 egy legalább két élt tartalmazó erdő. Ekkor alkalmas $\alpha(G_0)$ és $\beta(G_0)$ (G_0-tól függő, de n-től nem függő) pozitív számokra

$$\alpha(G_0)\cdot n \le \mathrm{ext}(n;G_0) \le \beta(G_0)\cdot n.$$

- Legyen G_0 egy kört tartalmazó páros gráf. Ekkor alkalmas, csak G_0-tól függő pozitív $\alpha(G_0), \beta(G_0), \gamma(G_0)$ és $\delta(G_0)$ számokra

$$\alpha(G_0)\cdot n^{\gamma(G_0)} \le \mathrm{ext}(n;G_0) \le \beta(G_0)\cdot n^{\delta(G_0)},$$

ahol $1 < \gamma(G_0) \le \delta(G_0) < 2$.

- Legyen G_0 egy nem páros gráf ($\chi(G_0) \ge 3$). Ekkor

$$\mathrm{ext}(n;G_0) \sim \left(1 - \frac{1}{\chi(G_0)-1}\right)\binom{n}{2}.$$

Látható, hogy az alsó és felső becslések között a legnagyobb „hézag” a nem erdő, páros gráfok esetében van. Sok konkrét G_0 esetén az $\mathrm{ext}(n;G_0)$ függvény nagyságrendje pontosan nem ismert. Egy nevezetes eset, amikor G_0 a kocka élváza által alkotott (8 pontú, 12 élű) gráf. Ezt a kérdést már Turán Pál is megfogalmazta. Egy másik máig megoldatlan eset a nyolc hosszú kör: C_8.

12. Feladat. *(a) Határozzuk meg $ext(n;P_2)$ értékét.*
(b) Határozzuk meg $ext(n;S_k)$ értékét.
(c) Határozzuk meg $ext(n;P_3)$ értékét.
(c) Határozzuk meg $ext(n;M_2)$ értékét, ahol M_2 négy pontot és két független élt tartalamzó gráf.

13. Feladat. *Bizonyítsuk be, hogy minden T fa esetén létezik olyan c_T konstans, amelyre $ext(n;T) \le c_T n$ teljesül.*

5. Négyszögeket nem tartalmazó páros gráfok, Heawood-gráf

Mielőtt a négy hosszú kört nem tartalmazó gráfokat vizsgálatát elkezdjük megemlítjük a páros gráfok univerzumára voantkozó eredményeket.

Legyen $\mathcal{G}_{n,n}$ a két n pontú színosztályt tartalmazó egyszerű gráfok osztálya.

14. Tétel. *Legyen $G \in \mathcal{G}_{n,n}$ egy C_4-et nem tartalmazó gráf. Ekkor*

$$|E(G)| \leq \sqrt{n^3 - \frac{3}{4}n^2} + \frac{1}{2}n = n^{3/2} + \frac{1}{2}n + \mathcal{O}(\sqrt{n}).$$

Bizonyítás. Legyenek a két színosztály pontjai alsó és felső pontok. Két különböző él alkosson V-alakot, ha közös az alsó végpontjuk. Hány V-alak lehet G-ben?

Először is minden felső csúcspárra egyetlen V-alak illeszkedhet, hiszen két ilyen egy C_4-et alkotnak. Azaz a V-alakok száma legfeljebb $\binom{n}{2}$.

Másrészt legyen $d_1, d_2, \ldots, d_n$ az alsó pontok fokai. A d_i fokú csúcsot tartalmazó V alakok száma $\binom{d_i}{2}$. Különböző alsó csúcsra illeszkedő V-alakok halmaz diszjunkt. Így a V-alakok pontos száma $\sum_{i=1}^{n} \binom{d_i}{2}$. Ez alúlról becsülhető a Jensen-egyenlőtlenséggel ($\binom{x}{2} = x(x-1)/2$ egy konvex függvény), mint $n\binom{\overline{d}}{2}$, ahol $\overline{d}$ az alsó fokok átlaga, azaz $|E|/n$.

A kétféle gondolatmenete összevetéséből kapjuk, hogy

$$|E|\left(\frac{|E|}{n} - 1\right)/2 = n\binom{|E|/n}{2} \leq \binom{n}{2} = n(n-1)/2.$$

Rendezés után kapjuk, hogy

$$|E|^2 - n|E| - (n^3 - n^2) \leq 0.$$

Középiskolai eszközökkel adódik az állítás. ■

Észrevétel. Legyen $n > 3$. $|E(G)| = \sqrt{n^3 - \frac{3}{4}n^2} + \frac{1}{2}n$ akkor és csak akkor, ha létezik n pontú (és így n egyenesű) véges projektív sík. Továbbá az egyetlen extremális gráf ezen projektív sík pont-él illeszkedési páros gráfja.

Valóban: Ha a fenti tétel felső becslése egyenlőséggel teljesül, akkor minden felső pontpárnak egyetlen közös szomszédja van, továbbá az alsó pontok fokai ugyanazok. Azaz a felső csúcsokat pontoknak, az alsókat egyeneseknek nevezve, az összekötést illeszkdésnek olvasva kapjuk, hogy bármely két ponton pontosan egy egyenes halad át és mindegyik egyenesen ugyanannyi pont van. Az ilyen struktúrák pontosan a véges projektív síkok, amiből észrevételünk adódik.

Konstrukció (Projektív síkok pont-él illeszkedési gráfja). I_q gráf csúcsainak halmaza $\mathcal{P} \cup \mathcal{L}$, ahol $\mathcal{P}$, illetve $\mathcal{E}$ a $\mathcal{PG}(2, \mathbb{F}_q)$ projektív sík pontjai, illetve egyenesei.

Konstrukció (Heawood-gráf). I_2 a Heawood-gráf. Azaz a Heawood-gráf a Fano-sík pont-egyenes illeszkedési gráfja.

15. Feladat. *Rajzoljuk fel a Heawood-gráfot.*

6. Négyszögeket nem tartalmazó gráfok, Reiman-gráf

Először az elemi felső becslést bizonyítjuk. A bizonyítás ötlete megegyezik a páros gráfok univerzumára vonatkozó megfelelő tételéével.

16. Tétel (Kőváry—T.Sós—Turán-tétel). *Legyen $G \in \mathcal{G}_n$ egy négy hosszú kört nem tartalmazó gráf. Ekkor*

$$|E(G)| \leq \frac{1}{2}n^{3/2}\sqrt{1-\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{n}}+\frac{1}{4}\cdot n.$$

Speciálisan

$$ext(n;C_4) \leq \frac{1}{2}n^{3/2}+\mathcal{O}(n).$$

Bizonyítás. Legyen G egy n pontú, C_4-et részgráfként nem tartalmazó egyszerű gráf.

Két élt szomszédosnak nevezünk, ha van közös csúcsuk, azaz a gráf lerajzolásában a két él egy „$\wedge$ alakot” határoz meg. Két ilyen élt *cseresznyének* nevezünk. A két él közös csúcsa a cseresznye *középpontja.* Az a két pont, amely csak egy-egy élnek végpontja, a cseresznye *szemei.* Számoljuk meg a cseresznyéket a G gráfban. Először az összes pont esetén nézzük meg, hány olyan cseresznye van, amelynek középpontja az adott pont. Ilyen módon számolva $\sum_{i=1}^n \binom{d_i}{2}$ adódik a cseresznyék számára, ahol $\{d_i\}_{i=1}^n$ a G gráf fokszámsorozata. Egy másik módon számolva mindegyik pontpárra nézzük meg, hány olyan cseresznye van G-ben, amelynek szemei az adott két pont. Mivel G-ben nincs C_4-gyel izomorf részgráf, ezért egy pontpárra legfeljebb egy cseresznye „támaszkodhat”. Így a cseresznyék számára az $\binom{n}{2}$ felső becslést kapjuk. Tehát

$$\binom{n}{2} \geq \sum_{i=1}^n \binom{d_i}{2} \geq n\binom{\overline{d}}{2}, \quad \text{ahol} \quad \overline{d}=\frac{\sum_{i=1}^n d_i}{n},$$

a fokszámok átlaga, azaz $\frac{2|E|}{n}$. A második egyenlőtlenség az $\binom{x}{2}=\frac{x(x-1)}{2}$ függvény konvexségéből és a Jensen-egyenlőtlenségből adódik.

A fenti becslést rendezve m-re egy felső becslést (és így $\text{ext}(n;C_4)$-re egy felső becslést) kapunk. A becslés nagyságrendje $\frac{1}{2}n^{3/2}$. ■

Egy $\text{ext}(n;C_4)$-re vonatkozó alsó becsléshez egy „sok élű”, C_4-et nem tartalmazó gráfot kell megadnunk. Először feltesszük, hogy $n=q^2+q+1$, ahol q egy prímhatvány.

Konstrukció (Reiman-gráf). Ekkor az R_q gráf n pontja felfogható úgy, mint egy véges projektív sík pontjai. Két különböző u és v pontot kössünk össze, ha egy kúpszeletre (például az $x_1^2+x_2^2+x_3^2=0$ egyenlettel definiált kúpszeletre) nézve konjugáltak (azaz u polárisa áthalad v-n, az előző példában $u_1v_1+u_2v_2+u_3v_3=0$). Ebben a gráfban nincs C_4-gyel izomorf részgráf, hiszen ha az x,y,s,t pontokra xy,ys,st,tx élek a gráfban, akkor az x és s pontok polárisa is az yt egyenes lenne. Másrészt éleinek száma $\frac{1}{2}\big((q+1)q+q^2(q+1)\big)=\frac{1}{2}q(q+1)^2 \sim \frac{1}{2}n^{3/2}$.

17. Tétel. *(i)* $|V(R_q)|=q^2+q+1$, $|V(E_q)|=\frac{1}{2}(q^3+2q^2+q)$.

(ii) R_q nem tartalmaz négy hosszú kört.

Ha n nem a kívánt alakú, akkor vegyünk egy olyan q prímhatványt, amelyre $q^2+q+1<n$, de q-nak a következő prímhatványt választva ez a kifejezés már meghaladja n-et. Ezután $n-(q^2+q+1)$ izolált ponttal bővítsük ki a fenti példát. Számelméleti meggondolásokból adódik, hogy az így kapott gráf élszáma nagyságrendileg még mindig $\frac{1}{2}n^{3/2}$ lesz.

18. Feladat. *(a) Igazoljuk, hogy*

$$ext(n; K_{2,3}) \leq \frac{\sqrt{2}}{2}n^{3/2} + n,$$

(b) A Kőváry—T.Sós—Turán-tétel bizonyítása során bevezetett $\wedge$ fogalmát terjesszük ki k élre: k legyező. A Kőváry—T.Sós—Turán-tétel bizonyításának ötletével adjunk felső becslést a $ext(n; K_{k,\ell})$ függvényre.

19. Feladat. *Bizonyítsuk be, hogy*

$$ext(n; K_{r,r}) \leq c_r n^{2-\frac{1}{r}},$$

ahol c_r egy r-től függő konstans.

7. $K_{3,3}$: Füredi-becslés, Brown-gráf

Ismét a felső becsléssel kezdjük. A Kőváry—T.Sós—Turán-tétel ötlete alkalmazható. A naív másolás az optimális nagyságrendhez vezet, de a konstansok javíthatók. Ha a Kőváry—T.Sós—Turán-tétel bizonyításához egy kis ötletet hozzáadunk, akkor az optimális konstanst is megkaphatjuk a főtag előtt. A részleteket először Füredi Zoltán végezte el.

20. Tétel (Füredi Zoltán becslése). *Legyen G egy n pontú gráf $K_{3,3}$ részgráf nélkül. Ekkor*

$$|E(G)| \leq \frac{1}{2}n^{5/3} + n^{4/3} + \frac{1}{2}n$$

Bizonyítás. Ismét a cseresznyéket számoljuk össze. u és v két különböző csúcs esetén legyen $d(u,v)$ az u és v csúcsok közös szomszédainak száma, azaz az u-t és v-t szemként tartalmazó cseresznyék száma. A kérdés

$$\frac{1}{2}\sum_{(u,v)\in V\times V, u\neq v} d(u,v) = \sum_{(u,v)\in\binom{V}{2}} d(u,v)$$

összegről szól. Ismét két választ adunk, amelyek összevetéséből adódik a bizonyítandó.

Az első válasz a korábbi gondolatmenetben is szerepelt

$$\sum_{(u,v)\in\binom{V}{2}} d(u,v) = \sum_{v\in V}\binom{d(v)}{2} \geq n\binom{\overline{d}}{2},$$

ahol $\overline{d} = \frac{2|E|}{n}$.

A második válaszhoz egy újabb kérdést teszünk fel. Hány olyan K részgráf van G-ben, ahol $K \simeq K_{2,3}$ és u a két elemű színosztály egyik csúcsa? Először is u-nak a K-beli három szomszédja egyértelműen meghatározza K-t (ha a hiányzó csúcsra v és v' két alternatíva lenne, akkor G-ben lenne $K_{3,3}$ részgráf). Azaz a válasz nem több mint $\binom{d(u)}{3}$. Másrészt az u csúcs színosztálybeli társa szerint számolva a pontos válasz $\sum_{v\in V-\{u\}}\binom{d(u,v)}{3}$. A két válasz összevetéséből kapjuk, hogy

$$\sum_{v\in V-\{u\}}\binom{d(u,v)}{3}\le\binom{d(u)}{3}.$$

Ezek után egy egyszerű egyenlőtlenségből (ezt feladatként tűzzük ki a bizonyítás után) következik $\sum_{v\in V-\{u\}} d(u,v)$ becslése. Ebből:

$$2\sum_{(u,v)\in\binom{V}{2}} d(u,v)=\sum_{(u,v)\in V\times V, u\neq v} d(u,v)=\sum_u\sum_{v\in V-\{u\}} d(u,v)\le 2n^{2/3}|E|+2n^2.$$

■

21. Feladat. *Legyenek $r_1,\dots,r_k,r$ nem-negatív valós számok. Tegyük fel, hogy $\sum_{i=1}^k\binom{r_i}{3}\le\binom{r}{3}$. Ekkor*

$$\sum_{i=1}^k r_i\le k^{2/3}r+k.$$

Konstrukció (Brown-gráf). Legyen $\mathcal{AG}(3,\mathbb{F}_q)$-ban $\mathcal{F}: x^2+\alpha y^2+\beta z^2=1$ egy elliptikus másodrendű felület. $B_{q,\mathcal{F}}$ a következő egyszerű gráf: Csúcsai $\mathcal{AG}(3,\mathbb{F}_q)$ pontjai. Két különböző (u,v,w) és (u',v',w') pont akkor és csak akkor szomszédos, ha

$$(u-u')^2+\alpha(v-v')^2+\beta(w-w')^2=1.$$

22. Lemma. *(i) $|V(B_{q,\mathcal{F}})|=q^3$,*

(ii) $|E(B_{q,\mathcal{F}})|=\frac{1}{2}q^3(q^2-q)$,

(iii) $B_{q,\mathcal{F}}$ nem tartalmaz $K_{3,3}$ részgráfot.

8. C_6

Először felső becslést adunk n pontú egyszerű gráfok élszámára, ha nem tartalmaznak C_6-ot, azaz hat hosszú kört. Néhány bevezető feladattal kezdünk.

23. Feladat. *Igazoljuk, hogy egy n pontú egyszerű gráf párossá tehető legfeljebb élei felének elhagyásával.*

24. Feladat. *Igazoljuk, hogy egy n pontú egyszerű gráf kiegyensúlyozott párossá tehető legfeljebb élei felének elhagyásával.*

25. Feladat. *Legyen G egy egyszerű C_6-mentes páros gráf. Igazoljuk, hogy legfeljebb élei felének elhagyásával C_4-mentessé tehető.*

26. Tétel. *Legyen $G\in\mathcal{G}_{n,n}$. Tegyük fel, hogy G nem tartalmaz négy és hat hosszú kört. Ekkor*

$$|E(G)|\le n^{4/3}.$$

Bizonyítás. Hány három élű út van G-ben? A kérdésre két választ adunk (egy becslést és egy pontos választ). A két válasz összevetéséből adódik a tétel állítása.

Először is a $vww'v'$ utakat számoljunk össze a két végpontja által meghatározott $\{v, v'\}$ popnthalmazok szerint. Egy végpontpárhoz legfeljebb egy út tartozik, hiszen G párossága miatt két ilyen út létezése esetén négy vagy hat hosszú kör is létezne G-ben. Így az első válasz: legfeljebb $\binom{n}{2}$.

A második válasz igényesebb. Legyen A a gráf szomszédsági mátrixa. Könnyű belátni, hogy az A^3 mátrix uv pozíciójában álló szám a három hosszú uv-séták számát adja meg. Ezen séták közül a nem visszalépésesek pontosan a három élű utak. A visszalépéses séta csak szomszédos u és v csúcsok esetén létezik. Ekkor ezek száma $d(u) + d(v) - 1$. Legyen $\widetilde{A}_3$ az a mátrix, ahol az u és v találkozásában $d(u) + d(v) - 1$ áll, ha u és v szomszédos, különben 0. Ekkor az u-t és v-t összekötő háromhosszú utak számait tartalmazó mátrix $A^3 - \widetilde{A}_3$. Az összes három élű utak számának dupláját $1^T(A^3 - \widetilde{A}_3)1$ adja meg, ahol $1 \in \mathbb{R}^n$, a csupa 1 koordinátát tartalmazó vektor.

$1^T A^3 1 = n(\frac{1}{\sqrt{n}}1)^T A^3(\frac{1}{\sqrt{n}}1)$ számot a Blakley—Roy-egyenlőtlenség alapján becsülhetjük (lásd következő feladat).

$$1^T\widetilde{A}_3 1 = 2\sum_{u,v:uv\in E}(d(u) + d(v) - 1) = 2\sum_{v:v\in V} d^2(v) - 2|E|$$

becslése egyszerűbb. Könnyen adódik, hogy már a C_4 részgráfok hiánya miatt is nagyságrendje felülről becsülhető n^2-nel. ■

27. Feladat (Blakley—Roy-egyenlőtlenség). *Legyen $w \in \mathbb{R}^n_+$ egységvektor. Legyen $A \in \mathbb{R}^{n\times n}_+$ szimmetrikus mátrix. Legyen ℓ egy pozitív egész. Ekkor*

$$w^T A^\ell w \geq (w^T Aw)^\ell.$$

28. Következmény.

$$ex(n; C_6) = \mathcal{O}(n^{4/3}).$$

Végül leírunk egy gráf-sorozat konstrukcióját, amely sok élű, hat hosszú kört nem tartalmazó gráfokat ad meg. Élszámának nagyságrendje megegyezik a felső becslés nagyságrendjével.

Legyen $\mathcal{PG}(4, \mathbb{F}_p)$-ben $\mathcal{F}$ a következő felület:

$$\mathcal{F} = \{[x] : x^T x = 0\}.$$

29. Lemma. *Legyen $[u] \in \mathcal{F}$ és $[\ell]^*$ egy egyenes $[u]$-n keresztül ($u^T\ell = 0$). Ekkor a következők ekvivalensek:*

(i) $[\ell]^* \subset \mathcal{F}$,

(ii) van olyan $[v] \in [\ell]^* - \{[u]\}$, *hogy* $u^T v = 0$,

(iii) minden $[v] \in [\ell]^* - \{[u]\}$ *esetén* $u^T v = 0$, *azaz* $[\ell]^* \subset \Sigma_u = \{[v] : u^T v = 0\}$.

30. Lemma. *$\mathcal{F}$ rendelkezik az alábbi tulajdonságokkal:*

(i) Ha egy egyenes legalább három pontban metszi, akkor teljesen benne halad.

(ii) Nincs benne három olyan nem egy ponton áthaladó egyenes, ami páronként metsző. (Nincs benne háromszög.)

(iii) Minden pontján $p+1$ (belső) egyenes halad át.

Definíció. Legyen G_p az a páros gráf, amely két színosztályát $\mathcal{F}$ pontjai, illetve egyenesei alkotják. Egy pont akkor és csak akkor összekötött egy egyenessel, ha illeszkedik rá.

31. Tétel. *(i)* $|V(G_p)| = |E(G_p)| = p^3 + p^2 + p + 1$.

(i) G_p *egy* $p+1$ *reguláris gráf.*

(iii) G_p *nem tartalmaz hat hosszú kört.*

(iii) G_p *nem tartalmaz hat hosszú vagy rövidebb kört.*