Szimmetrikus kombinatorikus struktúrák MSc hallgatók számára

Bevezetés

Előadó: Hajnal Péter

1. Mi is a szimmetria?

A szimmetria, szimmetrikus szavakat a mindennapi életben is használjuk. Az ilyen esetekben a megfelelő matematikai fogalom nem fedi a szokásos értelmezést (nem is fedheti, hiszen a szokásos értelmezés szubjektív, általában a történelem során át is alalkul). Az alábbiakban a gráfstruktúra esetén említünk meg néhány próbálkozást a fogalom matematikai megragadasára.

Definíció. Legyen G egy gráf $\mathbb{A}\mathrm{ut}(G)$ tartalmazza a gráf automorfizmusait (önmagára történő izomorfizmusait), amelyek a kompozícióra nézve csoportot alkotnak. $\mathbb{A}\mathrm{ut}(G)$ a G gráf automorfizmuscsoportja.

Egyszerű gráf esetén az automorfizmuscsoport az $S(V)$ (a csúcshalmaz feletti szimmetrikus csoport, azaz V összes permutációját tartalamzó csoport) egy részcsoportja. Egy adott V csúcshalmazon a teljes és az üres gráf az egyetlen, amely esetén $\mathbb{A}\mathrm{ut}(G) = S(V)$. $\mathbb{A}\mathrm{ut}(G)$ „gazdagsága” (például nagy elemszáma) jelentheti a G gráf „nagy fokú” szimmetriáját.

Definíció. G *ponttranzitív*, ha $\mathbb{A}\mathrm{ut}(G) \leq S(V)$ tranzitív, azaz tetszőleges u, v csúcsokra van olyan φ automorfizmus, aminél u képe v.

Azt is mondhatjuk, ha a G gráfban élünk és csak a csúcsok összekötéseit látjuk (sétálhatunk a gráfban és így megismerhetjük), akkor nem tudunk semmit sem mondani az aktuálisan elfoglalt csúcsról.

Definíció. *Éltranzitivitás* fogalma hasonlóan definiálható.

Legyen φ a G gráf egy autmorfizmusa. Nyilvánvaló, hogy $d(\varphi(x)\varphi(y)) = d(x, y)$, ahol d a gráf-távolság, azaz a két csúcs közötti legrövidebb út hossza.

Definíció. G *távolság tranzitív*, ha $d(x, y) = d(x', y')$ esetén van olyan φ automorfizmusa G-nek, amelyre $\varphi(x) = x'$ és $\varphi(y) = y'$.

A ponttranzitivatás esetén a gráfban sétálva minden csúcs azonosnak tűnik. Nem tudjuk megkülönböztetni a csúcsokat. Ha csak egy helyben állhatunk, akkor az ott összefutó éleket látjuk. A globális gráfról csak az aktuális helyünk (egy csúcs) foka, amit érzékelünk/kiszámolhatunk. Ha minden csúcsban ugyanazt a fok, akkor az is egy fajta (igen alacsony fokú) szimmetra.

Definíció. Egy G gráf reguális, ha minden csúcsának foka ugyanaz. Ha a fokszámok közös d értékét hangsúlyozni szeretnénk, akkor azt mondjuk, hogy G d-reguláris.

Egy jóval kifinomultabb szimmetria fogalmat írunk le a következő definícióban.

Definíció. Egy G gráf erősen reguláris, ha minden csúcsnak ugyanaz a foka (d), minden összekötött csúcspárnak ugyanannyi közös szomszédja van (d_1) és minden össze nem kötött csúcspárnak ugyanannyi közös szomszédja van (d_0). Ha az említett paramétereket hangsúlyozni szeretnénk, akkor erősen (d, d_1, d_0)-reguláris gráfról beszélünk.

Egy finomabb fogalom az alábbi.

Definíció. Legyen x és y két csúcs a G gráfban. Legyen $d(x.y) = k$. Ekkor y szomszédait három csoportba tudjuk csoportosítani x-től vett távolságuk szerint. Ez lehet $k-1$, k és $k+1$. Ha az egyes csoportokba eső szomszédok száma csak k-tól és a csoportjuktól függ, akkor azt mondjuk, hogy G távolság-reguláris.

Természetesen más struktúrák esetén is vizsgálhatók, hogy a szimmetriájuk hogyan formalizálható, a szimmetria különböző fokai/oldalai hogyan írhatók le. A szinte felsorolhatatlan változat közül a számunkra legérdekesebbeket írjuk le.

Definíció. $\mathcal{H}$ uniform halmazrendszer, ha minden él elemszáma ugyanaz. Ha a közös elemszám k, akkor k-unifrom halmazrendszerről beszélünk.

Definíció. Egy (v, k, λ)-blokkrendszer (alternatív módon 2-design) egy olyan k-unifrom halmazrendszer v darab csúcs felett, anelyre teljesül, hogy bármely két ponton pontosan λ él halad át.

A triviális esetek kizárása miatt feltesszük, hogy $k > 2$. Blokkrendszerek esetén az éleket blokkoknak is nevezzük.

A paraméterek értéke (ha megvalósítható) általában nem írja le izomorfizmus erejéig a blokkrendszerünket/halmazrendszerünket. λ-$\mathfrak{B}$-$\binom{v}{k}$ jelöli a megfelelő halmazrendszer-osztályt.

Egy fontos általánosítás az alábbi.

Definíció. $\mathcal{D}$ egy t-design (v, k, λ) paraméterekkel, ha k-uniform halmazrendszer v csúcs felett, amelyre teljesül, hogy tetszőleges t csúcs pontosan λ élnek/blokknak részhalmaza.

Ismét kizárjuk a triviális példákat a $2 \leq t < k$ feltétellel.

A paraméterek értéke (ha megvalósítható) általában nem írja le izomorfizmus erejéig a design-unkat/halmazrendszerünket. t-λ-$\mathfrak{D}$-$\binom{v}{k}$ jelöli a megfelelő halmazrendszer-osztályt.

Definíció. Egy t-design (v, k, λ) paraméterekkel Steiner-rendszernek nevezünk, ha $\lambda = 1$.

A paraméterek értéke (ha megvalósítható) általában nem írja le izomorfizmus erejéig a Steiner-rendszerünket/halmazrendszerünket. t-$\mathfrak{S}$-$\binom{v}{k}$ jelöli a megfelelő halmazrendszer-osztályt. A Steiner-rendszerek vizsgálata a $k = 3$ esettel kezdődött. Ebben az esetben Steiner-hármasokról beszélünk. Alaptétel, hogy 2-$\mathfrak{S}$-$\binom{v}{3}$ akkor és csak akkor nemüres, ha v hattal osztva 1 vagy 3 maradékot ad.

Még egy struktúrát emelünk ki, S_n-et, a szimmetrikus csoportot. A csoport alaphalmaza n elem (általában $[n] := \{1, 2, \ldots, n\}$) permutációinak halmaza. S_n legszimmetrikusabb részhalmazai természetesen a részcsoportok. A részcsoportok között is meglehet különböztetni „szimmetrikusabbakat”.

Definíció. Egy $R < S_n$ részcsoport k-tranzitív, ha tetszőleges $x_1, x_2, \ldots, x_k$ és $y_1, y_2, \ldots, y_k$ két rendszerre, amelyek különböző k elemet tartalmaznak van olyan $g \in R$, amelyre $gx_i = y_i$.

Megjegyzés. S_n természetesen (az egyetlen) n-tranzitív rész. A_n $n-2$-tranzitív.

Számunkra a fenti szimmetria fogalmak központiak lesznek. Persze további fogalmak is bevezethetők, illetve más struktúrák is vizsgálhatók például kódok, Boole-függvények, ponthalmazok.

1. Feladat. *Vizsgáljuk a fent definiált gráfokra vonatkozó szimmetria fogalmak viszonyait.*

2. Blokkrendszerek

Példa. $(V, \mathcal{B} = \binom{V}{k})$ egy blokkrendszer $(2 \leq k < |V|)$, ahol $\lambda = \binom{v-2}{k-2}$.

Példa. Legyen $V = \{1,2,3,4,5,6,7\}$ és $\mathcal{B} = \{\,\{1,2,3\}, \{3,4,5\}, \{5,6,1\}, \{1,7,4\}, \{3,7,6\}, \{5,7,2\}, \{2,4,6\}\,\}$. Ekkor $v = 7$, $k = 3$ és $\lambda = 1$.

Megjegyzés. Az előző példa első ránézésre egy egyedi konstrukciónak néz ki. Később majd látni fogjuk, hogy egy nagyon fontos példacsalád, a véges projektív síkok egy eleme. Ezek tárgyalására később kitérünk.

Egy természetes kérdés, hogy milyen (v, k, λ) számhármasok esetén létezik blokkrendszer. A következőkben szükséges feltételeket vezetünk le. A feltételekhez úgy jutunk el, hogy új paramétereket vezetünk be, és ezekre vonatkozó azonosságokat írunk fel.

Legyen $b = |\mathcal{B}|$ a blokkok száma. Ekkor az összes pontpárra összeszámolva az ezeket tartalmazó blokkokat $\binom{v}{2}\lambda$-t kapunk, és minden blokkot $\binom{k}{2}$-ször számoltunk. (Tehát $\lambda\binom{v}{2} = \binom{k}{2}b$.) Azaz $b = \frac{\lambda\binom{v}{2}}{\binom{k}{2}}$. Tehát $k(k-1)|\lambda v(v-1)$.

Legyen $r_x = |\{B \in \mathcal{B} : x \in B\}|$ $(x \in V)$, az x csúcs fokszáma a $\mathcal{B}$ blokkrendszerben. Belátjuk, hogy r_x nem függ x-től, hanem egy, csak a blokkrendszer paramétereitől függő, r szám. Ehhez számoljuk össze a (v, B) párokat, ahol v egy x-től különböző csúcs, és B egy x-et, és v-t is tartalmazó blokk. Az x-en kívüli $v-1$ darab pont mindegyikén λ darab x-et is tartalmazó blokk halad át. Így $(v-1)\lambda$-t kapunk. Másrészt minden x-en átmenő blokk pontosan $k-1$ megszámolt párban szerepel. Tehát $(v-1)\lambda = (k-1)r_x$. Azaz $r_x = \frac{(v-1)\lambda}{k-1}$, független x-től. Speciálisan $k-1|(v-1)\lambda$.

2. Lemma. *Ha létezik (v, k, λ) paraméterű blokkrendszer, akkor*

(a) $k-1|\lambda(v-1)$,

(b) $(k-1)k|\lambda(v-1)v$.

A (v, k, λ)-ra vonatkozó fenti két feltételt *oszthatósági feltételeknek* nevezzük. Ez szükséges, de nem elegendő feltétel blokkrendszerek létézésére. Azonban a következő igen mély tétel azt mondja, hogy oszthatósági feltételeink bizonyos értelemben közel vannak az elegendőséghez.

3. Tétel (Wilson-tétel, 1971). *Legyen $k \geq 3, \lambda \geq 1$ két tetszőleges pozitív egész. Ekkor létezik olyan $v_0(k, \lambda)$ egész, hogy $v > v_0(k, \lambda)$ esetén az oszthatósági feltételeket teljesítő bármely (v, k, λ) számhármashoz létezik ezen paraméterekkel rendelkező blokkrendszer.*

4. Feladat. *Egy osztály létszáma n $(30 < n < 40)$. Az osztályban bizottságokat alakítanak úgy, hogy*

(i) bármely bizottságnak legalább 3 tagja legyen,

(ii) bármely két bizottságnak pontosan egy közös tagja legyen,

(iii) bármely két tanuló dolgozzon közös bizottságban.

Ezek után határozzuk meg:

a) Hányan járnak az osztályba?

b) Hány tanuló van egy-egy bizottságban?

c) Hány bizottság van?

d) Egy-egy tanuló hány bizottság tagja?

5. Feladat. *$\mathcal{B}$ egy k-uniform halmazrendszer V felett. Legyen $l \leq k$ egy természetes szám, amelyre teljesül, hogy bármely l-elemű $S \subset V$ halmaz esetén $|\{B \in \mathcal{B} : S \subset B\}|$ egy S-től nem függő szám. Bizonyítsuk be, ha $t < l$, akkor bármely $T \subset V$ t-elemű halmaz esetén $|\{B \in \mathcal{B} : T \subset B\}|$ csak t-től függ.*

6. Feladat. *Legyen n pozitív egész szám, és legyenek $A_1, A_2, \ldots, A_{2n+1}$ a B halmaz részhalmazai. Tegyük fel, hogy*

(a) mindegyik A_i-nek pontosan $2n$ eleme van,

(b) minden $A_i \cap A_j$ metszetnek $(1 \leq i < j \leq 2n+1)$ pontosan egy eleme van,

(c) a B halmaz minden eleme benne van legalább két A_i-ben.

Az n milyen értékeinél rendelhető B minden eleméhez a 0 és 1 számok egyike úgy, hogy minden A_i-nek pontosan n olyan eleme legyen, amelyhez a 0-t rendeltük?

7. Feladat. *A hételemű S halmaznak kijelöltük néhány valódi részhalmazát úgy, hogy azok eleget tesznek a következő két feltételnek:*

(i) S bármely két különböző eleméhez egyértelműen létezik őket tartalmazó kijelölt részhalmaz.

(ii) Bármely két kijelölt részhalmaz metszete S egy eleme.

Hány részhalmazt jelöltünk ki?

8. Feladat. *Egy halmazrendszert általánosított (v, λ)-blokkrendszernek nevezünk, ha halmazrendszer egy v-elemű alaphalmaz felett és bármely két különböző pontjára a két pontot egyszerre tartalmazó élek száma ugyanannyi (λ), azaz pontpártól független konstans. Azt is mondhatjuk, hogy az áltlánosított blokkrendszerek olyan blokkrendszerek, amelyekre „csak” az uniformitási feltétel hiányzik.*

(i) Mi az általánosított blokkrendszer fogalmának duálisa?

(ii) Bizonyítsuk be, hogy $\lambda > 0$ esetén egy általánosított (v, λ)-blokkrendszer blokkjainak száma legalább v.