Szimmetrikus kombinatorikus struktúrák MSc hallgatók számára

Csoportok hatása

Előadó: Hajnal Péter

1. Véges halmazokon ható csoportok

A kocka lapjainak színezését vizsgáljuk. A kocka egy szimmetriája a kocka lapjait permutálja. A színezéseket a lapok hatelemű halmazán értelmezett függvényeknek fogva fel, két függvényt (színezést) akkor tekintünk azonosnak, ha egy, a kocka szimmetriájából eredő permutáció (a függvény értelmezési tartományának, azaz a lapok halmazának permutációja) „megőrzi a függvényt”. A következőkben ezen gondolatokat általánosan fogalmazzuk meg.

Definíció. Legyen N egy halmaz, és G egy csoport. *G hat az N halmazon*, ha adva van egy $m : G \times N \to N$ leképezés, amelyre

(i) $m\big(h, m(g,x)\big) = m(hg, x)$ minden $g, h \in G$ és $x \in N$ esetén,

(ii) $m(1, x) = x$, ahol 1 a G csoport egységeleme és $x \in N$ tetszőleges.

A továbbiakban $m(g, x)$-et csak gx-szel jelöljük.

Példa. A kockát megőrző mozgások csoportja a kocka lapjain hat. Ugyanez a csoport hat a kocka élhalmazán is.

Példa. Az A_n alternáló csoport hat $[n]$-en.

Példa. Egy n elemű halmaz permutációi (S_n elemei) hatnak az alaphalmaz részhalmazain. $g \in S_n$ és $A = \{a_1, \dots, a_k\}$ esetén $gA = \{ga_1, \dots, ga_k\}$.

Példa. Tegyük fel, hogy G hat az N halmazon. Ekkor G hat az $\{\, f : N \to X \,\}$ függvényhalmazon. $g \in G$ esetén gf az a függvény, amely az $x \mapsto f(g^{-1}x)$ hozzárendeléssel van definiálva.

Definíció. Tegyük fel, hogy G hat az N halmazon, és legyen $g \in G$. Ez definiál egy $\pi_g : N \to N$ leképezést: $x \mapsto gx$.

1. Lemma. *π_g az N halmaz egy permutációja.*

Bizonyítás. $\pi_g(g^{-1}x) = x$, tehát π_g ráképezés.
$\pi_g(x) = \pi_g(y)$ $(gx = gy)$ esetén $x = g^{-1}gx = g^{-1}gy = y$, azaz π_g injektív.
Összefoglalva: π_g bijekció, azaz permutáció. ■

Megjegyzés. Ezzel definiáltunk egy $G \to S(N)$, $g \mapsto \pi_g$ leképezést. Könnyen ellenőrizhető, hogy ez egy csoporthomomorfizmus lesz.

Definíció. Tegyük fel, hogy a G csoport hat N-en. Ez a csoporthatás *effektív*, ha a $G \to S(N)$, $g \mapsto \pi_g$ leképezés injektív.

Megjegyzés. Egy effektív csoporthatás azonosítható egy permutációcsoporttal. Leggyakrabban effektív csoporthatásokkal lesz dolgunk. Ennek ellenére legtöbbször általánosan fogalmazzuk meg definícióinkat és eredményeinket.

Definíció. Tegyük fel, hogy a G csoport hat az X halmazon, a H csoport pedig hat az Y halmazon. A *két hatás izomorf*, ha létezik $\alpha : G \to H$ csoportizomorfizmus és $\beta : X \to Y$ bijekció, amelyekre $\beta(gx) = \alpha(g)\beta(x)$.

A továbbiakban N mindig egy véges halmazt, G pedig egy, az N halmazon ható csoportot jelöl.

$\star \quad \star \quad \star$

Tudjuk, hogy minden $g \in G$ elemhez tartozik N egy π_g permutációja. Legyen $(k_1(g), k_2(g), \ldots, k_n(g))$ a π_g permutáció típusa, azaz $k_i(g)$ a π_g permutáció i hosszú ciklusainak száma.

A G csoport esetén egy $|G|$ elemű típushalmazt kapunk. Ezt az információt egy polinomban foglalhatjuk össze.

Definíció. Egy n elemű N halmazon ható G csoport g elemére legyen $m(g)$ a következő monom:

$$m_g(x_1, \ldots, x_n) = x_1^{k_1(g)} x_2^{k_2(g)} \ldots x_n^{k_n(g)}.$$

A G *csoport hatásának ciklusszámláló polinomja*:

$$P_G(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} m_g(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} x_1^{k_1(g)} x_2^{k_2(g)} \ldots x_n^{k_n(g)}.$$

Megjegyzés. A ciklusszámláló polinom csak a csoporthatás izomorfiatípusától függ. Egy csoporthatást izomorfizmus erejéig sem határozza meg a ciklusszámláló polinomja. Ennek belátását az egyik feladatra bízzuk.

Jelölje (N_n, G_n) halmazok és ezeken rendre ható csoportok egy sorozatát. Ekkor ciklusszámláló polinomok sorozatát kapjuk. Nézzük meg a következő egyszerű esetet: $([n], S_n)$ (S_n hatása egy n elemű halmazon a természetes hatás). Legyen $P_{S_n}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ ezen csoporthatás ciklusszámláló polinomja ($P_{S_0} = 1$).

Példa. $P_{S_0} = 1$, $P_{S_1} = x_1$, $P_{S_2} = \frac{1}{2}\left(x_1^2 + x_2\right)$,
$P_{S_3} = \frac{1}{6}\left(x_1^3 + 3x_1x_2 + 2x_3\right)$, $P_{S_4} = \frac{1}{24}\left(x_1^4 + 6x_1^2x_2 + 8x_1x_3 + 3x_2^2 + 6x_4\right)$.

A következőkben a $P_{S_n}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ sorozatra egy rekurziót adunk:

2. Lemma.

$$P_{S_n}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \frac{1}{n} \sum_{l=1}^{n} x_l P_{S_{n-l}}(x_1, x_2, \ldots, x_{n-l}).$$

Bizonyítás. Az $n!P_{S_n} = \sum_{\pi \in S_n} m_\pi$ polinom tagjai azonosíthatók egy n elemű halmaz permutációival. Ezen összeg tagjai csoportosíthatók aszerint, hogy π-ben az n elemet tartalmazó ciklus milyen hosszú. Legyen l egy lehetséges hossz ($1 \le l \le n$). Az ehhez tartozó permutációk, illetve $n!P_{S_n}$ megfelelő tagjai a következő polinomot határozzák meg:

$$x_l \cdot [(n-1)(n-2)\ldots(n-l+1)][(n-l)!P_{S_{n-l}}(x_1, \ldots, x_{n-l})].$$

Ha az n-et tartalmazó permutáció hossza l, akkor a megfelelő monom tartalmaz egy x_l tényezőt. Ezt kiemelve kapjuk a fenti formula első tényezőjét. A második szorzótényező annak felel meg, hogy az n-et tartalmazó l hosszú ciklust hányféleképpen választhatjuk meg. Ha ez a választás rögzített, akkor a maradék tagok összege egy $n-l$ elemű halmaz permutációinak megfelelő monomok összege lesz, azaz $(n-l)!P_{S_{n-l}}$. ∎

Ezek után egyszerű megadni ezen ciklusszámláló polinomsorozatot összefűző formális hatványsort.

3. Tétel.

$$\sum_{i=0}^{\infty} P_{S_i}(x_1, x_2, \ldots, x_i)y^i = \exp(x_1 y + x_2\frac{y^2}{2} + x_3\frac{y^3}{3} + \ldots + x_n\frac{y^n}{n} + \ldots).$$

Bizonyítás. Legyen $F \in \mathbb{R}[[y, x_1, x_2, \ldots]]$ az egyenlőség bal oldalán álló formális hatványsor. A P_{S_n} polinomokra vonatkozó rekurzió alapján a következő differenciálegyenletet F kielégíti:

$$\frac{\partial}{\partial y}F = (x_1 + x_2 y + \ldots + x_i y^{i-1} + \ldots)F \tag{1}$$

$$[y^0 x_1^0 x_2^0 \ldots]F = 1. \tag{2}$$

A tételben szereplő jobb oldali kifejezés is kielégíti a differenciálegyenletet, amelynek megoldása egyértelmű. Ebből az állítás adódik. ∎

Igen sok összeszámlálási feladat egy ciklusszámláló polinom bizonyos helyen felvett értékének meghatározásából áll, és így megoldható a fent kidolgozott technikával.

4. Következmény. *Legyen a_n egy n elemű halmaz fixpont nélküli permutációinak a száma. Ekkor $a_n = \lfloor \frac{n!}{e} \rceil$. ($\lfloor x \rceil$ az x valós számhoz legközelebbi egész.)*

Bizonyítás. Könnyen látható, hogy

$$m_\pi(0, 1, 1, \ldots, 1) = \begin{cases} 0, & \text{ha } \pi\text{-nek van fixpontja,} \\ 1, & \text{ha } \pi\text{-nek nincs fixpontja.} \end{cases}$$

Ez alapján egyszerűen meggondolható, hogy

$$a_n = \sum_{\pi \in S_n} m_\pi(0, 1, \ldots, 1) = n! P_{S_n}(0, 1, 1, \ldots, 1).$$

Tehát a_n exponenciális generátorfüggvénye:

$$\exp(\frac{y^2}{2} + \frac{y^3}{3} + \ldots + \frac{y^n}{n} + \ldots) = \exp(-\log(1-y) - y) = \frac{\exp(-y)}{1-y}.$$

Ebből

$$a_n = n![y^n]\left(\frac{\exp(-y)}{1-y}\right) = n![y^n]\left(\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!}y^k\right)\left(\sum_{i=0}^{\infty} y^i\right)\right) = \tag{3}$$

$$= n!\sum_{i=0}^{n}\frac{(-1)^i}{i!} = \left\lfloor \frac{n!}{e} \right\rceil. \tag{4}$$

∎

5. Következmény. *Legyen b_n az n pontú, 2-reguláris, egyszerű gráfok száma. Ekkor b_n exponenciális generátorfüggvénye*

$$\frac{\exp(-\frac{1}{2}y - \frac{1}{4}y^2)}{\sqrt{1-y}}.$$

Bizonyítás. A $b_n = n! P_{S_n}(0, 0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{2})$ összefüggésből adódik az állítás. ∎

6. Feladat. *Legyen G egy N halmazon ható csoport, és $K = \{g \in G : \pi_g = id\}$. Bizonyítsuk be, hogy*

a) $K \triangleleft G$,

b) G/K *természetes módon hat N-en, és ez a hatás effektív.*

7. Feladat. *Határozzuk meg a következő halmazok és az azokon ható csoportok ciklusszámláló polinomjait:*

(a) egy szabályos tetraéder csúcsai és a szabályos tetraéder mozgáscsoportja,

(b) egy szabályos tetraéder élei és a szabályos tetraéder mozgáscsoportja,

(c) egy szabályos tetraéder lapjai és a szabályos tetraéder mozgáscsoportja,

(d) egy kocka csúcsai és a kocka mozgáscsoportja,

(e) egy kocka élei és a kocka mozgáscsoportja,

(f) egy kocka lapjai és a kocka mozgáscsoportja,

(g) egy szabályos n-szög csúcsai és a szabályos n-szög mozgáscsoportja.

8. Feladat. *Legyen H egy szabályos ötszög alapú egyenes hasáb. H mozgáscsoportja hat a hasáb élein. Írjuk fel ennek a ciklusszámlálópolinomját.*

9. Feladat. *a) Hányféleképpen állíthatjuk párokba a következő $2n$ számot:*

$$1, 1, 2, 2, 3, 3, \dots, n-1, n-1, n, n?$$

b) Hány párbaállítás van, ha egy páron belül egy sorrendet is megadunk?

(A fenti sorbaállítások számának exponenciális generátorfüggvényét adjuk meg.)

10. Feladat. *Legyen G és H egy-egy permutációcsoport X-n és Y-n, és legyen P_G és P_H a ciklusszámláló polinomuk.*

(a) $G \times H$ a következő módon hat $X \dot{\cup} Y$-n: $(g, h) \in G \times H$ esetén

$$(g,h)z = \begin{cases} gz, & ha\ z \in X, \\ hz, & ha\ z \in Y. \end{cases}$$

Fejezzük ki $P_{(G \times H, X \dot{\cup} Y)}$-t P_G és P_H segítségével.

(b)* *Legyen $h: X \to H$ tetszőleges függvény. Ekkor $g \in G$ és h definiálja $X \times Y$ egy permutációját: $(x, y) \mapsto (gx, h(x)y)$. Az összes lehetséges, $|G||H|^{|X|}$ sok (g, h) párok által definiált permutációk az $X \times Y$ halmazon egy permutációcsoportot adnak. Ezt $G[H]$-val jelöljük. Fejezzük ki $P_{(G[H], X\times Y)}$ ciklusszámláló polinomját P_G és P_H segítségével.*

11. Feladat. *Az A_n alternáló csoport természetes módon hat az $\{1, 2, \ldots, n\}$ halmazon. Legyen $P_{A_n}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ ennek a ciklusszámláló polinomja ($P_{A_0} = 1$, és $P_{A_1} = 2x_1$). Határozzuk meg a*

$$\sum_{n=0}^{\infty} P_{A_n}(x_1, x_2, \ldots, x_n) y^n$$

generátorfüggvényt.

12. Feladat. *Adjunk példát két nem izomorf permutációcsoportra, amelyek ciklusszámláló polinomja ugyanaz.*

13. Feladat. *Bizonyítsuk be, ha az $x_1, x_2, x_3, \ldots$ számok véges sok kivételével 1-gyel egyenlők, akkor a $\lim_{n\to\infty} P_{S_n}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ határérték létezik. Határozzuk is meg az értékét.*

2. A Pólya—Redfield-módszer

A Pólya—Redfield-módszer abban az esetben alkalmazható az $f: N \to X$ függvények megszámolására, ha az N halmazon egy G permutációcsoport hat, és a csoporthatásnál egymásba képződő függvények nem különböztethetők meg. A módszer ismertetése előtt csoportelméleti előkészületekre van szükségünk.

Definíció. Legyen $a, b \in N$. $a \sim b$, ha létezik olyan $g \in G$, hogy $a = gb$.

14. Lemma. *$\sim$ egy ekvivalenciareláció.*

Bizonyítás. $a \sim a$, hiszen $a = 1a$.

$a \sim b$ esetén alkalmas $g \in G$-re $a = gb$. Ekkor $g^{-1}a = g^{-1}(gb) = (g^{-1}g)b = 1b = b$, azaz $b \sim a$.

$a \sim b$ és $b \sim c$ esetén alkalmas $g, h \in G$-re $a = gb$, és $b = hc$. Tehát $a = gb = g(hc) = (gh)c$, azaz $a \sim c$. ■

Definíció. Legyen G az N-en ható csoport. A fent definiált $\sim$ ekvivalenciareláció ekvivalenciaosztályait *a csoporthatás pályáinak* nevezzük.

A pályák, $\Omega_1, \Omega_2, \ldots, \Omega_k$, az N alaphalmaz egy partícióját adják. A k szám a pályák száma.

A $k = 1$ esetben azt mondjuk, hogy a permutációcsoport *tranzitív*.

A Pólya—Redfield-módszer a következő csoportelméleti lemmán alapul:

15. Lemma (Burnside-lemma). *Legyen (N, G) egy halmaz és rajta ható csoport. Ekkor a pályák száma egyenlő G elemei fixpontjainak átlagos számával, azaz $\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G} k_1(g)$-vel.*

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy G-nek k darab pályája van: $\Omega_1, \Omega_2, \dots, \Omega_k$. Ekkor G elemeinél a fixpontok átlagos száma:

$$\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G} k_1(g) = \frac{1}{|G|}\sum_{x\in N} |\{g \in G : \pi_g(x) = x\}| = \tag{5}$$

$$= \frac{1}{|G|}\sum_{i=1}^{k}\sum_{x\in\Omega_i} |\{g \in G : \pi_g(x) = x\}|. \tag{6}$$

Legyen $S(x, G) = \{g \in G : \pi_g(x) = x\}$. Állítjuk, hogy $|S(x, G)| = \frac{|G|}{|\Omega_i|}$, ahol $x \in \Omega_i$. Ennek igazolásához elég azt belátni, hogy $x, y, z \in \Omega_i$ esetén az $S(x, y, G) = \{g \in G : \pi_g(x) = y\}$ és $S(x, z, G) = \{g \in G : \pi_g(x) = z\}$ halmazok elemszáma ugyanaz. Ekkor ugyanis az $\{S(x, y, G)\}_{y\in\Omega_i}$ halmazok a G csoport egyenlő méretű osztályokra történő osztályozását adják. Így minden osztály ugyanakkora ($\frac{|G|}{|\Omega_i|}$ elemszámú). Speciálisan $|S(x, x, G)| = |S(x, G)| frac|G||\Omega_i|$. $|S(x, y, G)| = |S(x, z, G)|$ bizonyításához megadunk egy $\phi : S(x, y, G) \to S(x, z, G)$ bijekciót. Legyen $g \in G$ olyan csoportelem, amelyre $gy = z$. (Ilyen létezik, hiszen y éz z ugyanabba a pályába esik.) Ha h az $S(x, y, G)$ halmaz egy eleme ($hx = y$), akkor gh az $S(x, z, G)$ halmaz egy eleme. Legyen $\phi : h \mapsto gh$. Könnyen igazolható, hogy ϕ egy bijekció, ami igazolja az $|S(x, y, G)| = S(x, z, G)|$ és így az $|S(x, G)| = \frac{|G|}{|\Omega_i|}$ egyenlőséget is.

A fenti egyenlőségsorozatot folytatva:

$$\frac{1}{|G|}\sum_{i=1}^{k}\sum_{x\in\Omega_i} |\{g \in G : \pi_g(x) = x\}| = \frac{1}{|G|}\sum_{i=1}^{k}\sum_{x\in\Omega_i} \frac{|G|}{|\Omega_i|} = \frac{1}{|G|}\sum_{i=1}^{k} |G| = k.$$

■

A lemma alkalmazásaként visszatérünk a bevezető példára: a kocka lapjainak színezésére. Most már egy általánosabb környezetben dolgozunk:

Definíció. Legyen N és X egy n, illetve egy x elemű halmaz. Γ az N halmaz permutációinak egy csoportja. Γ elemeit úgy tekintjük, mint N szimmetriái (elemein végrehajtva a változtatás nem vehető észre).

Legyen $f, g \in X^N$, ahol X^N az N-en értelmezett, X értékkészletű függvények halmazát jelöli. Azt mondjuk, hogy $f \sim g$, ha létezik olyan $\gamma \in \Gamma$, amelyre $g = f \circ \gamma$.

Célunk a $\sim$ ekvivalenciareláció osztályai számának meghatározása. Ezt úgy is kifejezhetjük, hogy Γ hatását kiterjesztjük az $\{f : N \to X\}$ halmazra, és meghatározzuk a pályák számát.

Az alábbiakban erre a problémára ismertetünk egy módszert, az úgynevezett Pólya—Redfield-módszert.

A keresett szám a Burnside-lemmából:

$$\frac{1}{|\Gamma|}\sum_{\gamma\in\Gamma} |\{f : f \circ \gamma = f\}|.$$

Azonban $f \circ \gamma = f$ azt jelenti, hogy f a γ permutáció ciklusain konstans. Tehát a keresett szám:

$$\frac{1}{|\Gamma|}\sum_{\gamma\in\Gamma} |X|^{k_1(\gamma)+k_2(\gamma)+\cdots} = P_\Gamma(x, x, \dots, x).$$

Pólya—Redfield-módszer:
A probléma: Adott egy N halmaz és egy rajta ható Γ csoport. Határozzuk meg a Γ csoporthatásra nézve különböző $f : N \to X$ függvények számát!
A megoldás: Írjuk fel a Γ csoport N-en való hatásának ciklusszámláló polinomját. Ebbe helyettesítsünk minden változó helyébe $|X|$-et. A kapott érték a fenti problémára adandó válasz.

Példa. Legyen $n > 1$ páratlan szám. Egy tábla az $n \times n$-es táblázat mezőinek fekete-fehér színezése. Két táblát nem különböztetünk meg, ha azok egybevágósági transzformációval egymásba vihetők. Hányféle $n \times n$ méretű „tábla" létezik?

Legyen $N = \{\text{mezők}\}$, $X = \{\text{fekete, fehér}\}$, és

$$\Gamma = \{\rho_{k\frac{\pi}{2}} : k = 0,1,2,3\} \cup \{\tau_{t_i} : i = 0,1,2,3\},$$

ahol ρ_α a táblázat középpontja körüli α szögű elforgatás, τ_t pedig a t egyenesre való tükrözés (t_i $(i = 0,1,2,3)$ a táblázat két átlója és két középvonala). Γ hat a mezőkön. A Γ szerint különböző függvények számát szeretnénk meghatározni.

A Pólya—Redfield-módszer azt mondja, hogy először számoljuk ki Γ ciklusszámláló polinomját:

$$P_\Gamma = \frac{1}{8}(x_1^{n^2} + 2x_1x_4^{\frac{n^2-1}{4}} + x_1x_2^{\frac{n^2-1}{2}} + 4x_1^n x_2^{\frac{n^2-n}{2}}).$$

A Pólya—Redfield-módszer szerint ebbe a polinomba kell $|X| = 2$-t helyettesíteni. Tehát a keresett szám:

$$2^{n^2-3} + 2^{\frac{n^2-5}{4}} + 2^{\frac{n^2-5}{2}} + 2^{\frac{n^2+n-2}{2}}.$$

Megjegyzés. A példa kezdetén feltettük, hogy n páratlan szám. Ez a feltevés nem lényeges. A páros n-ek esete hasonlóan kezelhető, de ekkor a ciklusszámláló polinom felírásában eltérések lesznek. Ennek kidolgozását az egyik feladatra bízzuk.

16. Feladat. *Hányféleképpen színezhetők ki egy szabályos tetraéder*

(a) élei,

(b) lapjai,

(c) csúcsai

k színnel, ha a mozgással egymásba vihető színezéseket nem különböztetjük meg?

17. Feladat. *Hányféleképpen színezhetők ki egy kocka*

(a) élei,

(b) lapjai,

(c) csúcsai

k színnel, ha a mozgással egymásba vihető színezéseket nem különböztetjük meg?

18. Feladat. *Hányféleképpen színezhető ki egy $n \times n$-es tábla két színnel, ha a mozgással egymásba vihető színezéseket nem különböztetjük meg?*

Hányféleképpen színezhetünk, ha az egybevágósággal egymásba vihető színezéseket nem különböztetjük meg?

19. Feladat. *Egy T szabályos háromszög oldalait n egyenlő részre osztjuk, és ezeken keresztül az oldalakkal párhuzamosokat húzunk. Így kis szabályos háromszögekre osztottuk T-t. Hányféleképpen színezhetjük ki ezen kis háromszögeket három színnel, ha az egybevágósággal egymásba vihető színezéseket nem különböztetjük meg?*

20. Feladat. *Cédulákra felírjuk az összes n hosszú számjegysorozatot (10^n darab cédulánk lesz). Két cédulát nem tudunk megkülönböztetni, ha az egyiket fejtetőre állítva a másikat kapjuk (6 fejtetőre állítva 9, míg 0, 1 és 8 fejtetőre állítva ugyanaz marad). Hány lényegesen különböző cédulánk van?*

21. Feladat. *Az n jegyű számok (megengedjük, hogy egy szám a 0 számjeggyel kezdődjön) közül kettőt ekvivalensnek nevezünk, ha az egyik jegyeit visszafelé leírva a másikat kapjuk. Hány különböző szám van?*

22. Feladat. *Hányféleképpen oszthatunk szét n forintost k ember között?*

23. Feladat. *Legyen G egy S halmazon ható permutációcsoport. Határozzuk meg S lényegesen különböző részhalmazainak számát.*

24. Feladat. *Legyen G egy Ω-n ható csoport. Legyen $w : \Omega \to \mathbb{R}$ egy pályákon konstans súlyfüggvény. (Azaz, ha valamely $g \in G$ esetén $x = gy$, akkor $w(x) = w(y)$.) Legyenek $\Omega_1, \Omega_2, \ldots, \Omega_k$ a pályák. Ekkor $w(\Omega_i)$ az Ω_i pálya elemeinek közös súlya. Bizonyítsuk be, hogy*

$$\sum_{i=1}^{k} w(\Omega_i) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \sum_{x : \pi_g(x) = x} w(x).$$

25. Feladat. *Legyen Γ egy K-n ható csoport. $w : X \to \mathbb{Z}$ súlyfüggvény. Legyen $f : K \to X$ egy tetszőleges függvény, és legyen $w(f) = \prod_{k \in K} w(f(k))$. Bizonyítsuk be, hogy*

$$\sum w(f) = P_\Gamma\left(\sum_{x \in X} w(x), \sum_{x \in X} (w(x))^2, \ldots\right),$$

ahol a bal oldali összegezés a lényegesen különböző függvényekre történik.

26. Feladat. *Legyen Γ egy K-n ható csoport. $w : X \to \mathbb{Z}$ egy súlyfüggvény. Legyen $f : K \to X$ egy tetszőleges függvény, és legyen $w(f) = \sum_{k \in K} w(f(k))$, és $r_n = |w^{-1}(n)|$. Legyen a_n a lényegesen különböző, n súlyú függvények száma. Bizonyítsuk be, hogy*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = P_\Gamma\left(\sum_{n=0}^{\infty} r_n x^n, \sum_{n=0}^{\infty} r_n x^{2n}, \ldots\right).$$

27. Feladat. *Hányféleképpen színezhetők ki a kocka lapjai két piros és négy kék színű lapra, ha a mozgással egymásba vihető színezések nem különböznek?*

28. Feladat. *Legyen G egy S halmazon ható permutációcsoport. Határozzuk meg S lényegesen különböző, k elemű részhalmazainak számát.*