Szimmetrikus kombinatorikus struktúrák MSc hallgatók számára

Moore-gráfok

Előadó: Hajnal Péter 3. hét

1. Reguláris, nagy derékbőségű gráfok kis méretben: Moore-gráfok, cage-ek

Kárteszi Ferenc észrevette, hogy a három reguláris gráfok, ha derékbőségük legalább öt, akkor legalább tíz csúcsúak. Továbbá a Petersen-gráf az egyetlen tíz csúcsú ilyen gráf. Azaz ismét az extremális gráf nagyfokú szimmetriával rendelkezik. Az alapészrevétel egy fontos kutatási irányt indított el.

Észrevétel. Legyen G egy d reguláris gráf, amely derékbősége legalább öt. Ekkor csúcsainak száma legalább $d^2 + 1$.

Valóban legyen v egy tetszőleges csúcs. Ekkor v-nek a szomszédai egy d elemű N halmazt alkotnak. N mindegyik elemének van $d - 1$ a v csúcstól különböző szomszédja (v másodszomszédai) Ezek alkossák az M halmazt. Ha az N csúcshalmaz d elmeére felsoroljuk, mindegyik v-től különböző $d-1$ szomszédját, akkor M elemeit pontosan EGYSZER soroljuk fel (ismétlődés ötnél rövidebb kört jelentene). Azaz $|M| = d \cdot (d - 1)$. Így $|V| \geq |\{v\}| + |N| + |M| = 1 + d + (d^2 - d) = d^2 + 1$.

A d-reguláris, öt derékbőségű gráfok között a d^2+1 pontúak extremálisak. Ezek az észrevételek könnyen általánosíthatók nagyobb derékbőségre.

Észrevétel. Legyen G egy d reguláris gráf, amely derékbősége legalább $2k+1$. Ekkor csúcsainak száma legalább

$$1 + d + d(d-1) + d(d-1)^2 + \ldots + d(d-1)^{k-1}.$$

1. Lemma. *Az alábbiakban egyszerű gráfok három tulajdonságát soroljuk fel.*

(i) G minden foka legalább d, girth-e legalább $2\gamma + 1$,

(ii) G minden foka legfeljebb d, átmérője legfeljebb γ,

(iii) G pontjainak száma $1 + d + d(d-1) + d(d-1)^2 + d(d-1)^3 + \ldots + d(d-1)^{\gamma-1}$.

Ekkor a fenti három tulajdonság közül bármelyik kettő magával hozza a harmadik tulajdonságot.

Bizonyítás. Ha egy egyszerű gráfban minden fok legalább d, akkor egy x csúcs szomszédai legalább d-en vannak. Másodszomszédai (kettő távolságra lévő pontok) száma már változatos lehet. Ha azonban a girth legalább 5, akkor a szomszédok új szomszédai legalább d darab diszjunkt, legalább $d - 1$ elemű csúcshalmazt adnak. Így a másodszomszédok száma legalább $d(d - 1)$. Ha a girth legalább $2\gamma + 1$, akkor a legfeljebb γ távolságra lévő csúcsok száma, így az összes csúcs száma hasonlóan becsülhető. Kapjuk, hogy $|V| \geq 1+d+d(d-1)+d(d-1)^2+d(d-1)^3+\ldots+d(d-1)^{\gamma-1}$.

Ha egy egyszerű gráfban minden fok legfeljebb d, akkor egy x csúcs szomszédai legfeljebb d-en vannak. Másodszomszédai (kettő távolságra lévő pontok) száma legfeljebb $d(d-1)$. Hasonlóan becsülhető a legfeljebb γ távolságra lévő csúcsok száma, így ha az átmérő γ, akkor az összes csúcs száma. Kapjuk, hogy $|V| \leq 1 + d + d(d-1) + d(d-1)^2 + d(d-1)^3 + \ldots + d(d-1)^{\gamma-1}$.

Ha (i) és (ii) is tudott, akkor mindkét becslés ismert és együtt (iii)-t kapjuk.

Ha (iii) mellett (i) vagy (ii) ismert, akkor tudjuk, hogy a fenti becslések élesek. Ennek részletes analízise adja a három tulajdonság közül a hiányzót. ■

Definíció. A G egyszerű (d, γ)-Moore-gráf, ha a fenti három tulajdonsága (azaz a fenti kettőből bármelyik kettő) megvan, továbbá $d, \gamma \geq 2$.

Megjegyzés. A definióció ekvivalens azzal, gráfunk d reguláris. Továbbá tetszőleges p pont esetén egy szélességi filozófiával felépitett p gyökerű feszítőfa γ mélységű és benne a gyökértől és a γ mélységű csúcsoktól eltérő csúcsoknak $d-1$ gyereke lesz. Azaz különböző szomszédokból eredő másodszomszédok halmazai diszjunktak, a különböző másodszomszédokból eredő harmadszomszédok halmazai diszjunktak ... A fenti leírt feszítőfát a p középpontú szimmetrikus feszítőfának nevezzük, jele T_p. A feszítőfa élein túl G-nek csak a γ mélységű csúcsok között vannak élei. A γ mélységű csúcsok halmazát *a p-hez tartozó horizontnak* nevezzük, jele H_p. H_p egy $d-1$ reguláris gráfot feszít.

Nyilvánvaló, hogy a $d = 1$ eset érdektelen, a $\gamma = 1$ eset triviális. Az érdekes példak sora rövid. Erre később magyarázatot kapunk.

Példa. A $2\gamma + 1$-hosszú körök $d = 2$ paraméterrel (d, γ)-Moore-gráfok.

Példa. A Petersen-gráf $(3, 2)$-Moore-gráf.

Definíció. Egy G gráf Moore-gráf (d, k paraméterekkel), ha d reguláris gráf ($d > 1$), derékbősége legalább $2k+1$, továbbá csúcsainak száma $1 + d + d(d-1) + d(d-1)^2 + \ldots + d(d-1)^{k-1}$.

A kevés Moore-gráf léte a következő fogalomhoz vezet.

Definíció. Egy G gráf d, k paraméterű cage, ha d reguláris gráf ($d > 1$), derékbősége legalább $2k + 1$, továbbá csúcsainak száma a fenti feltételek mellett minimális.

Azaz a Moore-gráfok a tökéletes (páratlan derékbőségű) cage-ek. A következő tétel azt mondja, hogy $d = 2$ esetén csak kevés k paraméterre lehetséges Moore-gráf.

2. Tétel (Hoffman—Singleton-tétel (1960)). *Ha létezik d-reguláris, öt derékbőségű, $d^2 + 1$ pontú gráf, akkor $d \in \{2, 3, 7, 57\}$.*

Bizonyítás. Legyen G egy d-reguláris Moore-gráf, szomszédsági mátrixát jelölje A. (A egy $n \times n$ méretű mátrix, ahol $n = d^2 + 1$.)

Két összekötött csúcsnak nincs közös szomszédja (a girth 5, azaz nincs háromszög gráfunkban). Két nem összekötött csúcsnak van közös szomszédja (az átmérő 2), de csak egyetlen egy (a girth 5, azaz nincs négyhosszú körünk). Ezek a feltételek a szomszédsági mátrix segítségével az

$$A^2 + A = J + (d-1)I$$

feltétellel írható le, ahol J a csupa 1-et tartalmazó mátrix, míg I az egységmátrix (minden mátrixunk mérete $n \times n$).

Legyen v egy sajátvektor, a λ sajátértékkel. $\lambda = d$ (1 multiplicitású sajátvektor) esetén v lehet a csupa 1-et tartalmazó vektor. Tegyük fel, hogy $\lambda < d$. Ekkor v merőleges a csupa 1-est tartalmazó vektorra. A felírt mátrix egyenlőséget szorozzuk meg v-vel: $(A^2 + A)v = (J + (d-1)I)v$, $A(Av) + Av = Jv + (d-1)Iv$, azaz $A(\lambda v) + \lambda v = (d-1)v$, $\lambda^2 v + \lambda v = (d-1)v$. A v egy nem-nullvektor, így

$$\lambda^2 + \lambda = d - 1.$$

Ebből λ kifejezhető, kétféle értéket vehet fel: $\frac{-1 \pm \sqrt{4d-3}}{2}$.

A három lehetséges sajátérték multiplicitással: d, multiplicitása 1; $\lambda_1 = \frac{-1-\sqrt{4d-3}}{2}$, multiplicitása μ_1; $\lambda_2 = \frac{-1+\sqrt{4d-3}}{2}$, multiplicitása μ_2. Tudjuk, hogy az n darab (multiplicitásokkal számolva) sajátértékek összege az A mátrix nyoma, azaz 0. Szükséges megállapításainak a továbbaikban szétágaznak.

1. eset: λ_1 (és így λ_2 is) irracionális. Ekkor a sajátértékek összege csak úgy lehet 0/racionális, ha $\mu_1 = \mu_2 = \frac{n-1}{2}$. Ekkor $d - \frac{n-1}{2} = 0$. Tudva, hogy $n = d^2 + 1$ a d/n paraméterek egy másodfokú egyenletnek tesznek eleget. Ebből $d = 2$ $(n = 5)$.

2. eset: λ_1 (és így λ_2 is) racionális. Ekkor $4d - 3$ (páratlan) négyzetszám, $4d - 3 = (2\delta + 1)^2$ Ekkor $\lambda_1 = -1 - \delta$, $\lambda_2 = \delta$. A multiplicitások kiszámolhatók a $1 \cdot d + \mu_1 \cdot \lambda_1 + \mu_2 \cdot \lambda_2 = 0$ és $1 + \mu_1 + \mu_2 = n$ összefüggésből. Egy kis technikai számolás után a

$$32\mu_1 = 16\delta^4 + 24\delta^3 + 36\delta^2 + 30\delta + 7 + \frac{15}{2\delta + 1}$$

összefüggéshez jutunk. Azaz $\frac{15}{2\delta+1}$ egész. Mivel $2\delta + 1$ egynél nagyobb, így értéke $3, 5$ vagy 15. A három lehetőség $d = 3, 7, 5, 7$ lehetőségeknek felel meg. Így kapjuk a tétel bizonyítását. ■

A tétel csak lehetőséget fogalmaz meg. Megvalósíthatók-e? Ha igen, akkor egyértelműen, vagy egy fokszám mögött több gráf is rejlik?

2. $(2, 2)$ paraméterű Moore-gráf: C_5

A $d = 2$ eset egyszerű: Mivel a Moore-gráfok összefüggőek, ha van ilyen, akkor a körök között kell keresnünk. A girth értéke is ismert, ezt egyetlen gráf valósítja meg, az öthosszú kör, C_5.

Egy leírása: Csúcsok egy szabályos ötszög csúcspontjai, szomszédság az oldallal összekötöttség.

C_5-tel már találkoztunk a Ramsey-gráfok vizsgálatánál. Ez egy ön-komplementer, erősen reguláris, ponttranzitív gráf. Automorfizmuscsoportja D_5

3. $(3, 2)$ paraméterű Moore-gráf: Petersen-gráf

Kárteszi Ferenc mutatta meg, hogy $(3, 2)$ paraméterű Moore-gráf is egyértelmű.

3. Feladat. *Igazoljuk, hogy izomorfizmus erejéig egyetlen* $(3, 2)$ *paraméterű Moore-gráf van.*

Ez a Petersen-gráf. Legegyszerűbb definíciója az alábbi.

Definíció. Legyen P csúcshalmaza $[5]$ kételemű részhalmazainak halmaza. Két csúcs akkor és csak akkor összkötött, ha diszjunktak.

Egy ezzel ekvivalens leírás: A dodoekaéder szemköztes csúcsainak azonosításával kapunk egy csúcshalmazt. A szomszédság a dodekaéder csúcspontjai közötti szomszédságból ered.

Egy másik ekvivalens leírás: Csúcsai a Desargues-tétel konfigurációjának 10 egyenese (két pontra nézve perspektív háromszög három-három oldalegyenese, a pontra vonatkozó perspektivitást igazoló három egyenes és az egyenesre vonatkozó perspektivitást igazoló egyenes). Hasonlóan definiálhatóa Desargues-konfiguráció 10 pontja: két pontra nézve perspektív háromszög három-három csúcspontja, a pontra vonatkozó perspektivitást igazoló középpont és az egyenesre vonatkozó perspektivitás tengelyét kijelölő három pont. A szomszédság: két egyenes a Desargues-konfigurációból akkor és csak akkor szomszédos, ha nem illeszkedik rájuk közös pont a Desargues-konfigurációból.

1. ábra.

4. Lemma. *(i)* $|V(P)| = 10$,

(ii) P *egy* 3*-reguláris gráf,*

(iii) P *egy* $(3, 0, 1)$ *paraméterű erősen reguláris gráf,*

(iv) P *ponttranzitív.*

5. Feladat. *Határozzuk meg* $\mathbb{A}ut(P)$*-t.*

6. Feladat. *(i) Igazoljuk, a Petersen-gráf nem síkgráf.*

(ii) Igazoljuk, hogy a Petersen-gráf lerajzolható a projektív síkra és a lerajzolás megvalósítható úgy, hogy az automorfizmusok megvalósíthatók legyenek egyenestartó transzformációkkal.

7. Feladat. *(i) K_{10} élei nem színezhetők ki három színnel úgy, hogy mindegyik színosztály egy Petersen-gráf élhalmazát adja.*

(ii) K_{10}-ben megadható hat Petersen-gráf úgy, hogy minden él pontosan kettőben szerepeljen.

8. Feladat. *Igazoljuk, hogy a Petersen-gráfban nincs Hamilton-kör. A Petersen-gráfnak milyen hosszú körei léteznek és hány darab?*

4. $(7, 2)$ paraméterű Moore-gráf

9. Tétel. *Izomorfizmus erejéig egyetlen $(7, 2)$ paraméterű Moore-gráf van.*

A tétel felfogható egy 50 pontú gráf definíciójának is. Ezt a gráfot Hoffman-Singleton-gráfnak nevezzük. Leírására, vizsgálatára később térünk ki.

5. $(57, 2)$ paraméterű Moore-gráf

HA létezik, akkor 3250 csúcsa van, 58094400 darab öthosszú kört tartalmaz … Egy érvelést indítottunk el. Eddig senki sem tudta befejezni. A kimenetel sem ismert. Nem tudjuk, hogy az $(57, 2)$ paraméterű Moore-gráf létezik-e és ha igen, egyértelmű-e.