Szimmetrikus kombinatorikus struktúrák MSc hallgatók számára

Hoffman—Singleton-gráf: Pentagon-pentagram konstrukció

Előadó: Hajnal Péter 3. hét

1. Hoffman—Singleton-gráf pentagonjai és pentagramjai

A $d = 7$ eset vizsgálatát Hoffman és Singleton végezte. Eredményük: létezik $(7, 2)$ paraméterű Moore-gráf, sőt a struktúra egyértelmű. A gráf a Hoffman-Singleton gráf. A definíció (és az elnevezés jogosságának bizonyítéka) azonban hosszú út végállomása.

Az alábbiakban feltesszük, hogy G egy $(7, 2)$ paraméterű Moore-gráf.

1. Lemma. *(o)* $|V(G)| = 50$, $|E(G)| = 175$.

(i) G egy erősen reguláris gráf $(7, 0, 1)$ *paraméterekkel.*

(ii) G-ben az öthosszú körök száma 1260.

(iii) G-ben a hathosszú körök száma 5250.

Bizonyítás. (o) $\gamma = 2$ esetén a d-reguláris Moore-gráf pontszáma $d^2 + 1$. Így $d = 7$ esetén $|V| = 7^2 + 1 = 50$. A gráfunk fokainak összege $50 \cdot 7$, azaz éleinek száma $350/2 = 175$.

(i) A korábbiak alapján nyilvánvaló.

(ii) Induljunk ki egy tetszőleges e élből (175 lehetőség). Mindkét irányba folytassuk egy-egy éllel ($6 \cdot 6$ lehetőség). Szükségszerűen két különböző, össze nem kötött csúcshoz jutunk. A három hosszú út pontosan egy módon fejezhető be egy öt hosszú körré (lásd erősen összefüggő tulajdonság). Ezzel minden egy e élében gyökereztetett 5-kört pontosan egyszer megkapunk. Így az 5 hosszú körök száma $175 \cdot 36/5 = 1260$.

(iii) Induljunk ki egy tetszőleges v csúcsból (50 lehetőség). Mindkét irányba folytassuk egy-egy éllel ($\binom{7}{6} = 21$ lehetőség). Majd folyassuk a két szomszédba vezető két élt egy-egy további éllel ($6 \cdot 6$). Szükségszerűen egy négy hosszú úthoz jutunk. Ha ez két összekötött csúcs, akkor kialakul egy 5 hosszú kör és nincs lehetőseg az utunk 6 hosszú körré zárására. Ha ez két nem összekötött csúcs, akkor egy 6 hosszú körré való bezárás egyértelmű (erősen reguláris tulajdonság) és nincs lehetőség az utunk 6 hosszú körré zárására. Így a felsorolt $50 \cdot 21 \cdot 36$ lehetőség pontosan az egy csúcsukban gyökereztetett öt- és hat-hosszú köröket sorolja fel. Legyen c_5, c_6 az öt-, illetve hat-hosszú körök száma ($c_5 = 1260$). Kaptuk, hogy

$$37800 = 50 \cdot 21 \cdot 36 = 5 \cdot c_5 + 6 \cdot c_6 = 5 \cdot 1260 + 6 \cdot c_6 = 6300 + 6 \cdot c_6.$$

Ebből c_6 értéke adódik: $(37800 - 6300)/6 = 31500/6 = 5250$. ■

2. Lemma. *Legyen C egy öthosszú kör G-ben (csúcshalmaza legyen $\{v_0, v_1, v_2, v_3, v_4\}$, élhalmaza legyen $\{v_0v_1, v_1v_2, v_2v_3, v_3v_4, v_4v_0\}$). Legyen N_i a v_i csúcs nem C-re eső szomszédainak halmaza.*

(i) *Az N_i halmazok diszjunkt ötelemű független halmazok. Így $N := \cup_{i=0}^{4} N_i$ egy 25 elemű halmaz. Legyen $M := V(G) - N$ (speciálisan $V(C) \subset M$). (Gráfunkat felosztottuk két „oldalra" (N és M). Éleinket is osztályozhatjuk: oldalélek (N, illetve M-beli élek) és keresztélek (N és M közti élek). Természetesen ez az osztályozás függ a kiinduló öt hosszú körtől.)*

(ii) *Minden $x \in N_i$ csúcsnak legfeljebb két szomszédja van N-ben. Ezek $N_{i-2} \cup N_{i+2}$-ba esnek. Sőt a két szomszéd közül legfeljebb egy esik N_{i-2}-be és legfeljebb egy esik N_{i+2}-be. Speciálisan minden $x \in N$ csúcsnak legalább öt szomszédja van M-ben.*

(iii) *Minden $x \in M - V(C)$ csúcsnak legfeljebb egy szomszédja esik minden N_i halmazba. Speciálisan minden $x \in M$ csúcsnak legfeljebb öt szomszédja van N-ben.*

(iv) *A fenti fokszám becslések mindegyike egyenlőséggel igaz. Azaz minden $x \in N$ csúcsnak pontosan öt szomszédja van M-ben. Minden $x \in N$ csúcsnak pontosan öt szomszédja van M-ben. Így $G|_N$ és $G|_M$ is 2-reguláris gráf. (Speciálisan C egy komponens $G|_M$-ben.) Továbbá minden $x \in N_i$ csúcsnak pontosan egy szomszédja van N_{i-2}-ben és pontosan egy szomszédja van N_{i+2}-ben (további szomszéd nincs N-ben, így $G|_N$ minden körének hossza 5-tel osztható).*

(v) *G-ben kétféle öthosszú kör van: (1) egyik éle az egyik oldalra esik, míg a két szomszédos él (a körön) keresztél (ezeket kereszt-köröknek nevezzük), (2) három szomszédos éle egy oldalra esik (ezeket oldal-köröknek nevezzük). Továbbá 1250 darab kereszt-kör van. Így 10 darab oldal-kör van.*

(vi) *$G|N$ és $G|M$ is öt komponensű gráf, amelyben minden komponens öthosszú kör. Azaz a 10 oldal-kör mindegyike teljesen az egyik oldalra esik.*

(vii) *Legyen C_N és C_M egy-egy tetszőleges komponens $G|_N$, illetve $G|_M$-ből. Ekkor $V(C_N) \cup V(C_M)$ egy Petersen-gráfot feszít.*

Bizonyítás. (i) Az N_i halmazok nyilván öteleműek. Függetlenségük és diszjunktságuk is egyszerű következménye az erősen reguláris tulajdonságnak.

(ii) Legyen i és j két különböző index. Ha $x \in N_i$ és $y = v_j$, akkor x és y nem összekötöttek. Azaz x-nek és y-nak egyetlen közös szomszédja van. Ha $i - j = \pm 1$, akkor ez v_i, speciálisan x-nek nincs N_j-ben szomszédja. Ha $i - j = \pm 2$, akkor y-nak v_{j-1} és v_{j+1} szomszédja x-nek nem szomszédja. A közös szomszédnak N_j-ben kell lenni. Az állítások adódnak.

(iii) $x \in M - V(C)$ és $y = v_j$ nem szomszédosak. Egyetlen közös szomszéduk van. Így x-ből legfeljebb egy él mehet N_j-hez. Ebből adódik az állítás.

(iv) A (ii) alapján az N-M élek száma legalább $5 \cdot |N| = 125$. A (iii) alapján az N-M élek száma legfeljebb $5 \cdot |M| = 125$. Tehát mindenütt egyenlőség teljesül. Az állítás könnyen adódik.

(v) Az (1) típusú köröket a következő módon listázhatjuk: Kiválasztunk egy oldal élt (50 lehetőség), majd mindkét irányban folytatjuk egy-egy keresztéllel ($5 \cdot 5$ lehetőség), majd bezárjuk a kiválasztott éleket egy öt hosszú körré (egyértelmű lépés). Így kapjuk, hogy a kereszt-körök száma $50 \cdot 25 = 1250$. Az oldal-körök száma $1260 - 1250 = 10$.

(vi) Kétféle oldalkör van. Az egyiknek mind az öt éle ugyanarra az oldalra esik (így $G|_N$, illetve $G|_M$ 2-reguláris gráfok egy komponenséről van szó). Ezeket nevezzük teljes-oldal-körnek, számuk legyen t. A többi oldal-körnek három, egy ívre eső éle ugyanarra az oldalra esik, míg másik két éle keresztél. Ezeket nevezzük félig-oldal körnek, számuk legyen f. Az előző pont alapján tudjuk, hogy $t+f=10$. Listázzuk az oldal-köröket: vegyünk egy oldalélt (50 lehetőség), folytassuk mindkét irányban az oldalon maradva (egyértelmű folytatás), majd zárjuk be egy öt-hosszú körré. Az így felsorolt 50 gyökeres kör között minden teljes-oldal-kör ötszörösen szerepel (5 lehetséges gyökér) és minden félig-oldal-kör egyszeresen szerepel (egyértelmű gyökér). Azaz 5t+f=50. Ebből $t=10$ és $f=0$, amiből az állítás egyszerűen adódik.

(vii) N minden 5 körének minden pontjából maximum egy él mehet M egy 5 köréhez (más esetben kialakulna háromszög vagy négy hosszú kör). De ennyinek menni is kell, hiszen N minden pontjából megy öt él M-hez. A gondolatmenet megfordítható, így minden N-beli C_N és minden M-beli C_M 5-kör között egy párosítás halad. A C_N-ből kiinduló párosítás „szabad" végpontjait C_M csak „hurkoltan" kötheti össze (másképpen túl rövid kör alakulna ki). Az állítást bizonyítottuk. ∎

Definíció. N öthosszú köreit *pentagonoknak* nevezzük. M öthosszú köreit *pentagramoknak* nevezzük. Az elnevezés függ attól, hogy melyik öthosszú körből indultunk ki. Bármelyik pentagon bármelyik pentagrammal együtt egy Petersen-gráfot határoz meg (fenti lemma (vii) pontja).

A fenti lemma gráfunkat (egy tetszőleges öthosszú kör alapján) két oldalra bontja (M és N), továbbá leírja a két oldal által feszített részt. Mielőtt tovább megyünk néhány megjegyzést teszünk.

Megjegyzés. A kiinduló C öthosszú körünk végül elvezet tíz darab öthosszú körhöz (ezek egyike C maga). Ha ezen tíz kör bármelyikét vesszük és a lemma eljárását alkalmazzuk ugyanehhez a tíz körhöz és két oldalra történő partícióhoz jutunk. Azaz G 1260 darab köre 126 darab tízes csoporthoz, 126 darab oldalakra történő felbontáshoz vezet.

Speciálisan, ha egy pentagramból indulunk ki, akkor az pentagonként lesz azonosítva. A tíz kör a kiinduló tíz kör lesz, de a pentagon/pentagram fogalom felcserélődik.

Megjegyzés. A fenti lemmából kiolvasható, ha C egy öthosszú kör és e egy C-hez nem tartozó él, ami C egy csúcsát köti össze egy C-n kívüli csúccsal, akkor pontosan egy Petersen részgráf van G-ben, amely tartalmazza C-t és e-t is.

3. Feladat. *Igazoljuk, hogy G-ben 525 darab Petersen részgráf van.*

Következő lépésünk a két oldal közötti élek leírása.

2. Hoffman—Singleton-gráf és $\mathcal{AG}(2,5)$

A továbbiakban N elemeit pontoknak nevezzük (25 darab pontunk van), M elemeit dölt egyeneseknek nevezzük. Továbbá $G|_N$ minden komponensére úgy hivatkozunk mint egy-egy függőleges egyenes (azaz összesen 30 darab egyenesünk van). Definiálunk egy illeszkedési relációt is a pontok és egyenesek között: Egy pont és egy dölt egyenes akkor és csak akkor illeszkedik, ha szomszédosak (csúcsként G-ben). Egy pont és egy függőleges egyenes pontosan akkor illeszkedik, ha a pont hozzátartozik a függőleges egyenessel azonosított $G|_N$-beli komponsenshez.

4. Lemma. *A fent leírt struktúra egy 5 paraméterű affin sík. Továbbá G_M öt komponensének megfelelő egyenes ötös egy-egy párhuzamos egyenessereg. A hatodik párhuzamos egyenessereg a függőleges egyeneseknek nevezett sereg.*

5. Feladat. *Igazoljuk a lemmát.*

Ha elfogadjuk, hogy 5 paraméterű affin sík egyetlen egy van (izomorf $\mathcal{AG}(2, \mathbb{F}_5)$-tel), akkor egyértelműen leírtuk az N és M közti éleket és viszonyukat $G|_N$, illetve $G|_M$ komponenseinek csúcshalmazaihoz. N egy elemét koordinátázhatjuk (x, y)-ként ha az (x, y) koordinátájú ponttal azonosított, M egy elemét (m, b)-ként, ha $y = mx + b$ dölt egyenessel koordinátázott, ahol $x, y, m, b \in \mathbb{F}_5$.

Ahhoz, hogy magunk előtt lássuk a Hoffman—Singleton-gráfot csak össze kell rakni az affin sík illeszkedési gráfját és az oldalakon lévő tíz darab öthosszú kört. Igazából már láttuk, hogy az affin illeszkedés meghatározza az oldalakon lévő komponsensek ponthalmazát. A kérdés ezeken hogyan hurkolódnak az körök. A korábbiakból az is kiolvasható, hogy elég egy függőleges egyenes pontjain (mondjuk $x = 0$ függőleges egyenes $(0, 0), (0, 1), (0, 2), (0, 3), (0, 4)$ pontjain) meghatározni az összekötő öthosszú kör éleit. Célunk annak belátása, hogy ez kétféle módon tehető meg.

6. Lemma. *(a) Tegyük fel, hogy $(0, 0)$(-val koordinátázott) csúcs összekötött a $(0, 1)$ csúccsal. Ekkor $x = 0$ függőleges egyenes pontjainak megfelelő csúcsok közül kettő — $(0, i)$ és $(0, j)$ $(i, j \in \mathbb{F}_5)$ csúcsok — pontosan akkor szomszédos, ha $i = j \pm 1$. Ez azt kényszeríti ki, hogy (m, b) és (m', b') koordinátájú M-beli pontok pontosan akkor összekötöttek ha $m = m'$ és $b = b' \pm 2$, továbbá (x, y) és (x', y') koordinátájú N-beli pontok pontosan akkor összekötöttek ha $x = x'$ és $y = y' \pm 1$. Az így leírt gráf valóban teljesíti is a Hoffman—Singleton-gráftól elvártakat. Ugyanez teljesül, ha a $(0, 0)$(-val koordinátázott) csúcs összekötött a $(0, -1)$ csúccsal.*

(b) Tegyük fel, hogy $(0, 0)$(-val koordinátázott) csúcs összekötött a $(0, 2)$ csúccsal. Ekkor $x = 0$ függőleges egyenes pontjainak megfelelő csúcsok közül kettő — $(0, i)$ és $(0, j)$ $(i, j \in \mathbb{F}_5)$ csúcsok — pontosan akkor szomszédos, ha $i = j \pm 2$. Ez azt kényszeríti ki, hogy (m, b) és (m', b') koordinátájú M-beli pontok pontosan akkor összekötöttek ha $m = m'$ és $b = b' \pm 1$, továbbá (x, y) és (x', y') koordinátájú N-beli pontok pontosan akkor összekötöttek ha $x = x'$ és $y = y' \pm 2$. Az így leírt gráf valóban teljesíti is a Hoffman—Singleton-gráftól elvártakat. Ugyanez teljesül, ha a $(0, 0)$(-val koordinátázott) csúcs összekötött a $(0, -2)$ csúccsal.

(c) A fenti két esetben leírt két gráf izomorf.

7. Feladat. *Igazoljuk a lemmát.*

A lemma után HoS nem csak bizonyos tulajdonságokkal rendelkező gráfosztály egy eleme, hanem egy jól definiált gráf-izomorfiatípus.

8. Feladat. $|\mathbb{A}ut(HoS)| = 252{,}000$.

3. Singleton—Hoffman-gráf vegyes tulajdonságai

9. Feladat. *(i) A HoS gráfban van Hamilton-kör.*

(ii) Nézzük a H_v gráfot (azaz a v-től kettő távolságra lévő csúcsok által feszített (6 reguláris) gráfot). Ez három Hamilton-kör éldiszjunkt uniója.

10. Feladat. *Határozzuk meg HoS spektrumát. Határozzunk meg $\mathbb{R}^{50}$ egy ortogonális bázisát, amelyet sajátvektorok alkotnak.*

4. $(57, 2)$ paraméterű Moore-gráf

HA létezik, akkor 3250 csúcsa van, 58094400 darab öthosszú kört tartalmaz ... Egy érvelést indítottunk el. Eddig senki sem tudta befejezni (annyi ismeretet összegyűjteni, hogy magunk előtt lássunk egy megfelelő gráfot, ahogy fentebb tettük VAGY ellentmondásra jtuni). A kimenetel sem ismert. Nem tudjuk, hogy az $(57, 2)$ paraméterű Moore-gráf létezik-e és ha igen, egyértelmű-e.