Szimmetrikus kombinatorikus struktúrák MSc hallgatók számára

A Hoffamn—Singleton-gráf és külső automorfizmusok

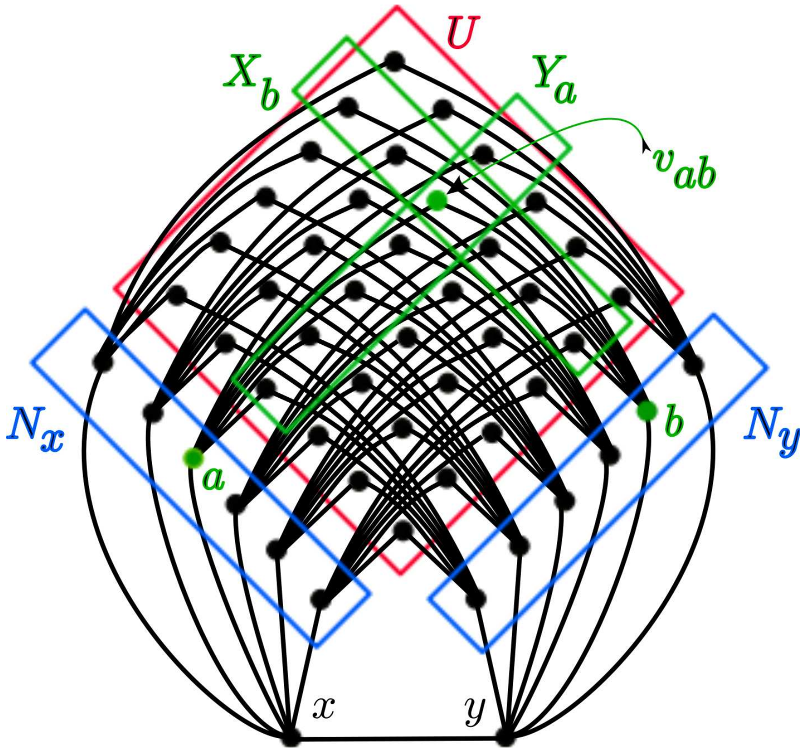
Előadó: Hajnal Péter 4. hét

1. A Hoffman-Singleton gráf egy új nézete

Legyen $e = xy$ egy éle egy $(2,7)$ paraméterű Moore-gráfnak. Legyen N_x és N_y x y-tól, illetve y x-től különböző szomszédainak halmaza. $|N_x| = |N_y| = 6$, sőt azonsítsuk N_x és $[6]$, illetve N_y és $[6]$ halmazokat. Még további 36 csúcsunk van. Ezeknek pontosan egy szomszédja esik N_x-be és pontosan egy N_y-ba. Fordítva is igaz: $a \in N_x$ és $b \in N_y$ esetén pontosan egy közös szomszéd van, ami az eddig el nem számolt 36 elemből kerül ki. Legyen ez a csúcs v_{ab}. A gráfunk csúcshalmaza

$$\{x, y\}\dot{\cup}N_x\dot{\cup}N_y\dot{\cup}\{v_{ab} : a \in N_x, b \in N_y\}.$$

Legyen $U = \{v_{ab} : a \in N_x, b \in N_y\}$. Az U-n kívüli csúcsokra ileszkedő éleket látjuk. U-n belül egy 5-reguláris gráffal kell a leírást befejeznünk. Erről sok mindent ismerünk.



1. ábra.

1. Lemma. *(i) A $Y_a = \{v_{ab} : b \in N_y\}$ és $X_b = \{v_{ab} : a \in N_x\}$ halmazok függetlenek.*

(ii) A $X_b = \{v_{ab} : a \in N_x\}$ és $X_{b'} = \{v_{ab'} : a \in N_x\}$ halmazok között vezető élek egy párosítást adnak.

2. Lemma. *Az X_b és $X_{b'}$ halmazok közötti párosítás szimmetrikus, azaz a $v_{xb}v_{x'b'}$ éllel együtt a $v_{x'b}v_{xb'}$ élnek is szerepelni kell. Szemléletesen a hat párosító él három „X élpárként" valósul meg.*

Bizonyítás. (Bizonyítás kezdemény) Legyen $v_{ab} \in U$ tetszőleges csúcs és $e = v_{ab}v_{cd}$ egy U-n belüli, rá illeszkedő él. v_{ab} meghatároz egy öt-hosszú C kört, amely csúcsai rendre v_{ab}, a, x, y, b. C és e egyértelműen meghatároz egy Petersen-gráfot (lásd a pentagon-pentagram származtatást). Hol vannak ezen Petersen-gráf hiányzó élei? ■

3. Feladat. *Dolgozzuk ki a fenti lemmák bizonyításait.*

Hiányzik az U-n belüli élek leírása. Ez $X_b \equiv N_x$ halmaznak 15 párosítása, amelyek azonosítottak $\binom{N_y}{2}$ elemeivel. Ezt úgy kell megtennünk, hogy ne keletkezzen három-, illetve négy- hosszú kör teljes gráfunkban.

4. Lemma. *A 15 párosítás választása pontosan akkor lesz megfelelő, ha a következők teljesülnek:*

(i) i, j, k három különböző N_y-beli elem esetén $\{i, j\}$ és $\{j, k\}$-hoz rendelt párosításoknak nincs közös éle.

(ii) i, j, k három különböző N_y-beli elem esetén $\{i, j\}$, $\{j, k\}$ és $\{k, i\}$-hoz rendelt párosítások egy-egy éle nem alkot háromszöget.

(iii) i, j, k, ℓ négy különböző N_y-beli elem esetén $\{i, j\}$, $\{j, k\}$, $\{k, \ell\}$ és $\{\ell, i\}$-hez rendelt párosítások egy-egy éle nem alkot négy hosszú kört.

5. Feladat. *Igazoljuk az előző lemmát.*

A párosítások konstrukciója trükkös, ezt a következő szekcióban írjuk le.

2. Meccsek, fordulók, beosztások

Képzeljünk el egy hat személyes sakk-bajnokságot, amely során mindenki-mindenkivel játszik pontosan egyszer. A bajnokságot minél kevesebb fordulóban szeretnék megszervezni.

A hat játékos egy hat csúcsú teljes gráf csúcshalmazát alkotja. A meccsek ezen gráf élei. A (telített) fordulók teljes párosítások. A legrövidebb lebonyolítás öt fordulóra/teljes párosításra osztása a 15 meccsnek/élnek. Beosztásnak nevezzük a 15 él egy ekvivalenciarelációját („egy fordulóba lejátszott"), ahol minden ekvivalenciaosztály egy párosítás három élét tartalmazza (így 5 osztályba soroltuk éleinket).

Észrevétel. (i) Két forduló uniója egy Hamilton-kör a gráfunkban.

(ii) Egy Hamilton-kör élhalmaza egyértelműen „szedhető szét" két fordulóra.

(iii) Ha adott egy Hamilton-kör, akkor pontosan egyféle módon terjeszthető ki három további fordulóval egy beosztássá.

(iv) 6-féle beosztás van.

(v) Két különböző beosztásban legfeljebb egy közös forduló van.

(vi) Egy forduló pontosan két beosztásban szerepel.

(vii) Két különböző beosztásban pontosan egy közös forduló van.

6. Feladat. *Igazoljuk a fenti tulajdonságokat. Rajzoljuk fel a hat beosztást.*

A fentiek alapján már könnyen leírhatjuk a Hoffman—Singleton-gráf új leírását, azaz a korábbi észrevételeink kiegészítését az U-n belüli élek megadásával.

Definíció. N_y elemeit azonsítsuk a hat beosztással és N_x elemeit a hat jatékossal. Két beosztásnak megfelelő két szint között az élek menjenek a két beosztás közös fordulójának megfelelő szimmetrikus párosítás szerint.

7. Tétel. *A fenti definíció korábbi megjegyzéseinkkel együtt leír egy* 7*-reguláris* 50 *pontú gráfot, amely nem tartalmaz háromszöget e;s négy-hosszú kört.*

Azaz a Hoffman—Singleton-gráfot írtuk le újra. A fenti leírás mögött mély matematikai összefüggések rejlenek. Ezekre mutatunk rá a következőkben.

3. Hoffman—Singleton-gráf és $\mathbb{S}_6$ külső automorfizmusai

Ez a rész Higman nem publikált megjegyzéseit tartalmazza.

A fenti leírás lényegi része az U-n belüli élek leírása volt. Gondoljunk N_x és N_y halmazokra mint [6]-re. Az $X_bX_{b'}$ halmazpárok azonosíthatók $\mathbb{S}_6$ transzpozícióival. Ezekhez kell $[6] \equiv N_x$ egy-egy permutációját rendelni, amely ciklus struktúrája $\langle 2^3 \rangle$.

8. Tétel (Higman). *(i) Ha ismerjük $\mathbb{S}_6$ egy külső automorfizmusát, akkor azt megszorítva a transzpozíciókra olyan hozzárendelést kapunk, ami a fenti módon a Hoffman—Singleton-gráf fenti módon történő leírásához vezet.*

(ii) Megfordítva egy $(2, 7)$ paraméterű Moore-gráfból kiolvasva a fenti hozzárendelést egyértelműen kiterjeszthetjük egy $\mathbb{S}_6 \to \mathbb{S}_6$ leképezésse, amely külső automorfizmus lesz.

$\mathbb{S}_6$ egy külső automorfizmusa olyan automorfizmus, ami nem egy elem konjugálásával írható le. A tétel alapján (amit nem bizonyítunk) a Hoffman—Singleton-gráf létezése „azon múlik”, hogy $\mathbb{S}_6$-nak van külső automorfizmusa. Ez egy meglepő/csodálatos tény. Az alábbiakban ezt világítjuk meg.

4. $\mathbb{S}_n$ automorfizmusai

Definíció. Legyen $\mathbb{G}$ egy csoport. $h = g^{-1}xg$ az x csoportelem konjugáltja g-vel. Ha g hangsúlyozására nincs szükség, akkor azt mondjuk, hogy h és x konjugáltak.

9. Feladat. *A konjugáltság ekvivalenciareláció $\mathbb{G}$-n.*

Definíció. Legyen $\mathbb{G}$ egy csoport. Ekkor minden g csoportelemre $\mathbb{G} \to \mathbb{G}$, $x \mapsto g^{-1}xg$ egy β_g automorfizmusa $\mathbb{G}$-nek. Az így kapott automorfizmusokat *belső automorfizmusoknak* nevezzük. A belső autorfizmusok $\mathbb{A}ut(\mathbb{G})$ egy részcsoportját alkotják, amely részcsoportot $\mathbb{I}nn(\mathbb{G})$-vel jelöljük. Egy automorfizmus *külső*, ha nem belső.

10. Feladat. *β_g akkor és csak akkor az identitás, ha g a $\mathbb{G}$ csoport centrumában van.*

11. Feladat. *$\mathbb{S}_n$ centruma triviális (csak az egységelemet tartalmazza), ha $n \geq 3$. Azaz ekkor $\mathbb{I}nn(\mathbb{S}_n) \simeq \mathbb{S}_n$*

12. Feladat. $\mathbb{I}nn(\mathbb{G}) \triangleleft \mathbb{A}ut(\mathbb{G})$.

Definíció. $\mathbb{O}ut(\mathbb{G}) := \mathbb{A}ut(\mathbb{G})/\mathbb{I}nn(\mathbb{G})$ a $\mathbb{G}$ csoport külső-automorfzimuscsoportja.

Megjegyzés. Azaz a külső-automorfizmuscsoport NEM a külső automorfizmusok csoportja. A külső automorfizmusok NEM is alkotnak csoportot. Látjuk, hogy előfordul, hogy nincs külső automorfizmus, azaz a külső automorfizmusok halmaza üres. Ekkor a külső-automorfizmuscsoport a triviális, egyelemű csoport.

⋆

$\mathbb{S}_n$ elemei permutációk. Minden π permutáció osztályozza az alaphalmazt (általában $[n]$-et). Az osztályok a π által generált részcsoport ($\{\pi^i : i \in \mathbb{Z}\} = \{\pi^i : i \in \mathbb{N}\}$) pályáinak (az x elem pályája $\{\pi^i x : i \in \mathbb{Z}\}$) halmaza. Minden pályán egy ciklikus átrendezésként hat π. π ciklus-struktúrája alatt azt értjük, hogy minden hosszúságra megadjuk hány ilyen hosszúságú ciklus van (hány ekkora pálya van). Ha i hosszú ciklusból μ_i van, akkor a struktúra $\langle 1^{\mu_1} 2^{\mu_2} 3^{\mu_3} \ldots \rangle$ (azon ciklushosszakat nem tüntetjük fel, amelyek nem fordulnak elő, azaz multiplicitásuk (jelölésben kitevőjük) 0). Az identitás permutáció ciklus-struktúrája $\langle 1^n \rangle$. Az $\langle 1^{n-2} 2 \rangle$ típusú permutációkat *transzpozícióknak* nevezzük. A $\mathbb{S}_n$ elemeinek ciklus-struktúrái azonosíthatók az n szám partícióival.

13. Feladat. *g és h akkor és csak akkor konjugáltak, ha ciklus-struktúrájuk ugyanaz.*

Azaz az n számpartíciói, $\mathbb{S}_n$ elemeinek ciklus-struktúrái, $\mathbb{S}_n$ csoportban a konjugáltság ekvivalenciareláció osztályai azonosíthatók.

14. Feladat. *Írjuk fel $n = 2, 3, 4, 5, 6, 7$ esetén a lehetséges ciklus-struktúrákat $\mathbb{S}_n$-ben és adjuk meg, hogy hány elem rendelkezik ezzel a ciklus-stuktúrával.*

15. Lemma. *Legyen α az $\mathbb{S}_n$ csoport egy automorfizmusa. Legyen π és π' két azonos ciklus-struktúrájú csoportelem. Ekkor $\alpha(\pi)$ és $\alpha(\pi')$ ciklus-struktúrája is azonos.*

Belső automorfizmusokra erősebb is igaz.

16. Lemma. *$\mathbb{S}_n$ belső automorfizmusai megtartják az elemek a ciklus-struktúrát. Azaz $\mathbb{S}_n$ minden α belső automorfizmusára g és $\alpha(g)$ ugyanolyan ciklus-struktúrájú.*

A fenti állítás megfordítása is igaz. Mi egy erősebb állítást mondunk ki.

17. Tétel. *Legyen α az $\mathbb{S}_n$ csoport egy automorfizmusa. Ha α megtartja a transzpozíciókat, akkor belső automorfizmus.*

18. Feladat. *Igazoljuk ezt.*

19. Feladat. *$\mathbb{S}_n$-et generálják a transzpozíciók.*

20. Lemma. *$\mathbb{S}_n$ automorfizmusai megtartják az elemek rendjét. Azaz $\mathbb{S}_n$ minden α belső automorfizmusára g és $\alpha(g)$ rendje megegyezik.*

21. Feladat. *Legyen $g \in \mathbb{S}_n$. Fejezzük ki g rendjét ciklus-stuktúrája segítségével. Milyen ciklus-struktúrája van a másod-rendű elemeknek? Az egyes másod-rendű ciklus-struktúrák mögött hány csoport elem van?*

22. Tétel. *Ha $n \neq 6$, akkor $\mathbb{A}ut(\mathbb{S}_n) = \mathbb{I}nn(\mathbb{S}_n)$, azaz $\mathbb{O}ut(\mathbb{S}_n) = \mathbf{1}$.*

5. $\mathbb{S}_6$ külső automorfizmusai

A korábbiak alapján látjuk, ha $\mathbb{S}_6$-nek van külső automorfizmusa, akkor az felcseréli a transzpozíciókat ($\langle 1^4 2\rangle$ típusú permutációkat) és a $\langle 2^3\rangle$ típusú permutációkat.

23. Feladat. *Igazoljuk, hogy $\mathbb{O}ut(\mathbb{S}_6) = \mathbf{1}$ VAGY $\mathbb{O}ut(\mathbb{S}_6) = \mathbb{Z}_2$.*

24. Tétel. *$\mathbb{O}ut(\mathbb{S}_6) = \mathbb{Z}_2$, azaz $\mathbb{S}_6$-nak VAN külső automorfizmusa.*

Ennek a ténynek „egyszerű” az igazolása, fel kell mutatni egy külső automorfizmust. Ennek felismerése igen komoly szellemi tevékenység. Az alábbiakban ezt ismertetjük különböző módokon.

6. $\mathbb{S}_5$ ül az $\mathbb{S}_6$-ban

$\mathbb{S}_5$ felismerése mint $\mathbb{S}_6$ részcsoportja egyszerű. Tegyük fel, hogy a permutált halmaz $[6]$. Ekkor $\mathbb{S}tab(i)$ egy $\mathbb{S}_5$ lesz minden $i \in [6]$ esetén. ($\mathbb{S}tab_{\mathbb{G}}(x)$ az x elem stabilizátora, azon $g \in \mathbb{G}$ elemek halmaza, amikre $gx = x$, egy részcsoport $\mathbb{G}$-ben.)

Vannak azonban furcsa (másmilyen mint a fent leírt standard) előfordulásai ($\mathbb{S}_5 \simeq R < \mathbb{S}_6$) is $\mathbb{S}_5$-nek. Ha egy ilyet leírunk, akkor egy külső automorfizmushoz jutunk az alábbi módon. Vegyük R mellékosztályait. Ez egy 6 elemű $\{\mathbf{1}, \mathbf{2}, \mathbf{3}, \mathbf{4}, \mathbf{5}, \mathbf{6}\}$ halmaz. $\mathbf{i} = mR$ permutációk egy 120 elemű halmaza. Minden $\mathbb{S}_6$-beli g elem hat ezeken a permutációkon és egy mR mellékosztályt egy $g(mR) = (gm)R$ mellékosztályba visz. Azaz $\mathbb{S}_6$ hat $\{\mathbf{1}, \mathbf{2}, \mathbf{3}, \mathbf{4}, \mathbf{5}, \mathbf{6}\}$ halmazon.

25. Lemma. *(i) Ez a hatás effektív, azaz a fenti hatásból eredő $\mathbb{S}_6 \to \mathbb{S}_{\{\mathbf{1},\mathbf{2},\mathbf{3},\mathbf{4},\mathbf{5},\mathbf{6}\}} \simeq \mathbb{S}_6$ csoporthomomotfizmus izmorfizmus/automorfizmus.*

(ii) Ha R egy elem stabilizátora, akkor ilyen módon egy belső automorfizmushoz jutottunk.

(iii) Ha R nem egy elem stabilizátora, akkor ilyen módon egy külső automorfizmushoz jutottunk.

7. $\mathbb{S}_6$ egy külső automorfizmusa I: $\mathcal{PG}(1, \mathbb{F}_5)$

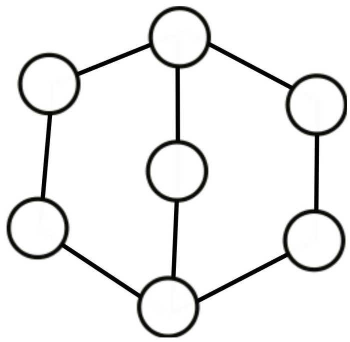
$\mathcal{PG}(1, \mathbb{F}_5)$ pontjainak halmaza $\{0, 1, 2, 3, 4, \infty\}$ vagy homogén koordinátákkal $\{(0 : 1), (1 : 1), (2 : 1), (3 : 1), (4 : 1), (1, 0)\}$. Ezen a ponthalmazon hat $\mathbb{PGL}(2, \mathbb{F}_5)$, amelynek $\frac{(5^2-1)(5^2-5)}{5-1} = 120$ eleme van.

26. Lemma. *Tetszőleges három különböző p, q, r pontra és három különböző p', q', r' pontra pontosan egy $g \in \mathbb{PGL}(2, \mathbb{F}_5)$ elem létezik, amelyre $gp = p'$, $gq = q'$ és $gr = r'$.*

27. Tétel. *Ezen hatás effektív, csoportja $\mathbb{S}_5$, de nem egy csúcs stabilizátoraként hat.*

8. $\mathbb{S}_6$ egy külső automorfizmusa II: Egy tologatós játék

Tekintsük a következő hét mezőből álló táblát, amelyen egy tologatós játékot játszunk.



2. ábra.

A középső helyet üresen hagyjuk, a kerületi helyekre a $0, 1, 2, 3, 4, \infty$ jeleket tartalmazó kavicsokat helyezünk el. Ezek után minden lépésben az üres mezőre tolhatunk egy vele szomszédos mezőn álló kavicsot. Ilyen lépések sorozatával elérjük, hogy újra a középső mező legyen üres. Így a kiinduló elhelyezés egy permutációját alakíthatjuk ki. A kialakítható elhelyezések $\mathbb{S}_6$ egy részhalmaza, egy részcsoport.

28. Tétel. *(i) 120 darab kialakítható elhelyezés van.*

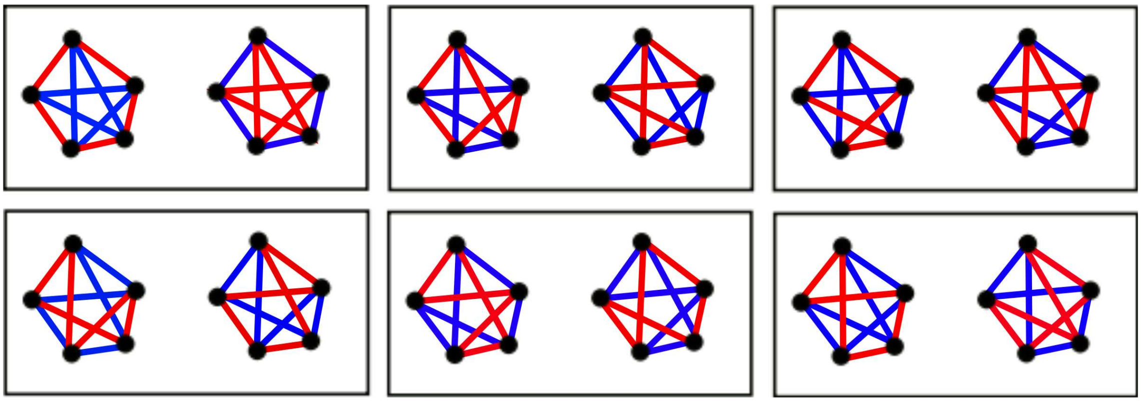
(ii) A kialakítható elhelyezések részcsoportja $\mathbb{S}_5$-tel izomorf.

A fenti részhalmaz/részcsoport megegyezik az előző pontban, $\mathbb{PGL}(2, \mathbb{F}_5)$ hatásából eredő részhalmazzal/részcsoporttal.

9. $\mathbb{S}_6$ egy külső automorfizmusa III: K_5 Hamilton-körei

K_5-nek $4!/2 = 12$ Hamilton-köre van, amelyek 6 komplementer párt alkotnak.

$\mathbb{S}_5$ hat K_5 csúcsai és így a Hamilton-kör-párokon is. $\mathbb{S}_5$ elemeit $\mathbb{S}_6$-be képeztük, amely leképezés nyilván csoporthomomorfizmus. Igazából $\mathbb{S}_5$ izmorf a kép részcsoporttal.

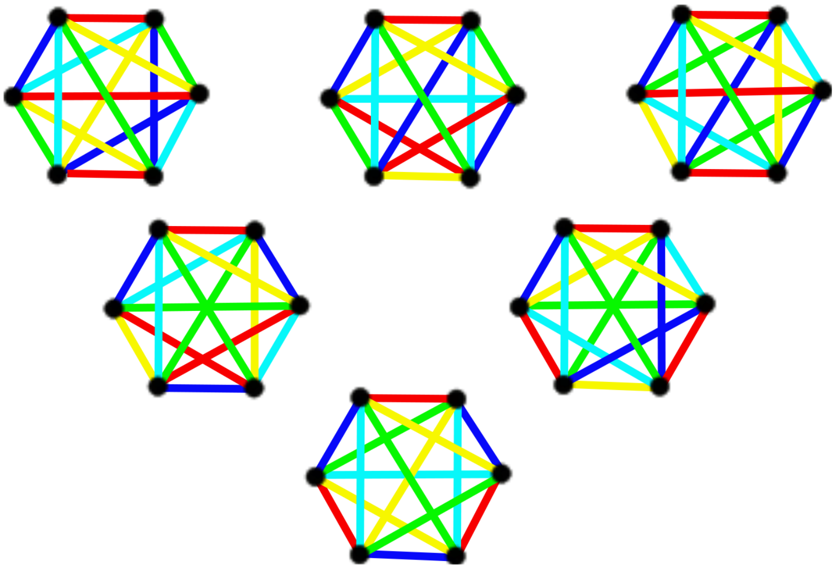


3. ábra.

29. Lemma. *A fenti $\mathbb{S}_5$-tel izomorf részcsoport nem egy elem stabilizátora.*

10. $\mathbb{S}_6$ egy külső automorfizmusa IV: K_6 élszínezései

K_6-nak 6 csúcsa, 15 éle, $5 \cdot 3 = 15$ teljes párosítása és 6 élszínezése van (két élszínezés megegyezik, ha a három színosztály halmaza ugyanaz). A hat élszínezést az alábbiakban láthatjuk.



4. ábra.

$\mathbb{S}_6$ hat a 6 csúcson és így a 6 élszínezésen. Ez a hatás effektív. $\mathbb{S}_6$-ot beágyaztuk a 6 élszínezés szimmetrikuscsoportjába.

30. Lemma. *Ez egy külső automorfizmus.*

11. $\mathbb{S}_6$ egy külső automorfizmusa V: K_6 háromszög színezései

Színezzük ki a $\binom{6}{3} = 20$ háromszöget két színnel (csak a két színosztály számít) úgy, hogy a csúcs diszjunktak ugyanazt a színt kapják. Továbbá minden négy-klikkben két háromszög legyen mindkét színből.

31. Feladat. *Soroljuk fel a lehetőségeket.*

$\mathbb{S}_6$ permutálja K_6 csúcsait és így hat a háromszögeken is és permutálja a hat lehetséges színezést.

32. Feladat. $\mathbb{S}_6$ *hatása a hat színezésen effektív és az ebből nyert automorfizmus nem belső automorfizmus.*

33. Feladat. *Adjunk bijekciót* K_5 *komplementer Hamilton-körpárjai és a fenti háromszög színezések között.*

12. $\mathbb{S}_6$ egy külső automorfizmusa VI: Az ikozaéder

Vegyük az ikozaédert: 12 csúcsa 6 szemköztes párba sorolható. 30 éle 15 szemköztes élpárba sorolható. 20 lapja van.

A középpontos tükrözés alapján megfeleltetett szemköztes csúcsokat nevezzük el ugyanúgy (a neveink legyenek mondjuk $1, 2, 3, 4, 5, 6$). A szemköztes élpárok ugyanazt a névpárt kötik össze. $\binom{[6]}{2}$ összes eleme előfordul összekötött élként (kétszeresen a szemköztes élpárok miatt). A 20 lap csúcshármasainak nevei az összes $\binom{[6]}{3}$-beli hármas.

A fentiek alapján a K_6-ról elmondott két konstrukció (élszínezések, háromszög színezések) „átvetíthetők” az ikozaéder nyelvezetére.

34. Feladat. *Végezzük el ezeket a nyelvi fordításokat.*