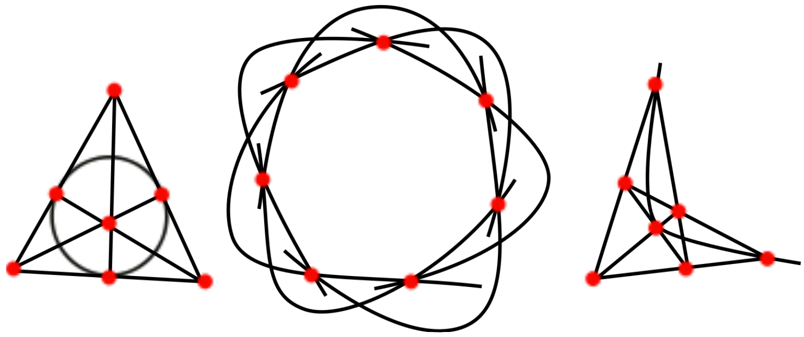
Szimmetrikus kombinatorikus struktúrák MSc hallgatók számára

Hoffman—Singleton-gráf: Fano-konstrukció

Előadó: Hajnal Péter 4. hét

1. Fano-sík

A Fano-síkkal már találkoztunk. Az alábbi ábra a megszokott lerajzolása mellett másik kettőt is mutat.



1. ábra.

2. A Fano-sík automorfizmuscsoportja

Legyen A, B, C három nem egy egyenesen lévő pont a Fano-síkon.

Észrevétel. A következő négy pont mindegyike különböző és mások mint a kiinduló ponthármas elemei:

(i) Az AB egyenes harmadik pontja. Jelölése legyen $A + B$.

(ii) A BC egyenes harmadik pontja. Jelölése legyen $B + C$.

(iii) A CA egyenes harmadik pontja. Jelölése legyen $C + A$.

(iv) Az AB, BC és CA egyenesek egyikére se eső pont: $A + B + C$.

Azaz az A, B, C ponthámas alapján elneveztük a síkunk összes (hét darab) pontját.

Észrevétel. A fenti jelöléset használva $\{A+B, C, A+B+C\}$, $\{B+C, A, A+B+C\}$, $\{C+A, B, A+B+C\}$, $\{A+B, B+C, C+A\}$ szükségszerűen egyenesek ponthalmaza. Amely egyenesek az $\{A, A + B, B\}$, $\{B, B + C, C\}$ és $\{C, C+, A\}$ egyenesekkel a síkunk összes egyenese.

Észrevétel. Legyen X, Y, Z három, nem egy egyenesre eső pont a Fano-síkon és α egy automorfizmusa a síknak (pontok permutációja, ami minden egyenes ponthármasát egyenes ponthármasába viszi). Ekkor $\alpha(X), \alpha(Y), \alpha(Z)$ is három, nem egy egyenesre eső pont.

1. Lemma. *Legyen X, Y, Z három, nem egy egyenesre eső pont a Fano-síkon. Hasonlóan legyen X', Y', Z' is három, nem egy egyenesre eső pont a Fano-síkon. Ekkor létezik egyetlen automorfizmusa síkunknak, amelyre $X \mapsto X'$, $Y \mapsto Y'$ és $Z \mapsto Z'$.*

Az automorfizmusok csoportja $\mathbb{S}_7$ egy részcsoportja. A fenti feladatok alapján ez egy 2-tranzitív, de nem 3-tranzitív permutációcsoport.

2. Feladat. *Hány automorfizmusa van a Fano-síknak?*

Az előző feladat nagyon fontos. Megadjuk a választ: 168. (Egy kis teszt: $168|7!$.)

$\star$

Észrevétel. $\mathbb{GL}(3, \mathbb{F})$ a 3×3 méretű $\mathbb{F}$ feletti invertálható mátrixok csoportja hat $\mathbb{F}^3$-n, a három hosszú $\mathbb{F}$-vektorok halmazán. Ez a hatás permutálja $\mathbb{F}^3 - \{(0,0,0)\}$-ban az origón átmenő egyenesek halmazát (amely halmazt azonosítottunk $\mathcal{PG}(2, \mathbb{F})$ pontjaival). Így $\mathbb{GL}(3, \mathbb{F})$ hat $\mathcal{PG}(2, \mathbb{F})$ pontjain. Ez a hatás egy egyenestartó transzformáció. Egy M mátrix és λM mátrix esetén a megfelelő két transzformáció ugyanaz (ugyanúgy permutálja a $\mathcal{PG}(2, \mathbb{F})$ pontjait). Legyen $Z = Z(3, \mathbb{F}) = \{\lambda I : \lambda \in \mathbb{F}^*\}$. Ez $\mathbb{GL}(3, \mathbb{F})$ centruma (miért?). Legyen $\mathbb{PGL}(3, \mathbb{F}) := \mathbb{GL}(3, \mathbb{F})/Z$. $\mathbb{PGL}(3, \mathbb{F})$ egyenestartóan hat $\mathcal{PG}(2, \mathbb{F})$ pontjain. Ez a hatás *effektív*, azaz különböző csoportbeli elemek különböző pont-permutációkat határoznak meg.

Észrevétel. $\mathbb{PGL}(3, \mathbb{F}_2)$-nek 168 eleme van.

3. Feladat. *Határozzuk meg $\mathbb{PGL}(3, \mathbb{F}_q)$ elemszámát.*

A fentiekből a Fano-sík automorfizmuscsoportja és $\mathbb{PGL}(3, \mathbb{F}_2)$ izomorf csoportok.

4. Feladat. *Hogyan viszonylik $\mathcal{PG}(2, \mathbb{F}_4)$ automorfizmuscsoportja és $\mathbb{PGL}(3, \mathbb{F}_4)$?*

$\star$

Nézzük meg közelebbről ezt a 168 transzformációt.

5. Tétel. *A 168 csoportelem a következő (egymást kizáró) típusokból adódik össze:*

(i) 1 *darab identitás,*

(ii) 21 *darab transzformáció/permutáció, amelyek típusa* $\langle 1^3, 2^2 \rangle$,

(iii) 56 *darab transzformáció, amelyek típusa* $\langle 1, 3^2 \rangle$,

(iv) 42 *darab transzformáció, amelyek típusa* $\langle 1, 2, 4 \rangle$,

(v) 48 *darab transzformáció, amelyek típusa* $\langle 7 \rangle$.

A fenti transzformációk egyben a pontokat permutálják. A fenti ciklus struktúra megadja ezeknek a permutációknak a konjugáltsági osztályát $\mathbb{S}_7$-ben. $\mathbb{A}ut(\mathcal{F})$ csoportban ez a konjugátsági osztályok tovább bomolhatnak.

Érdemes a fenti transzformációk mögé geometriai képet rakni. Ez a geometriai kép azt mutathatja, hogy az azonos ciklus struktúrával együttjár az $\mathbb{A}ut(\mathcal{F})$ csoportban való konjugátság.

(ii) minden eleme egy e egyenes pontjait fixálja és az egyik pontján átmenő másik két egyenesen felcseréli az e-n kívül fekvő két pontot. (Ez egy „párhuzamos eltolás”, amennyiben e-t végtelen távoli egyenesnek tekintjük és az ezen kiválasztott pont határozza meg az eltolás irányát.)

(iii) elemi egy p pontot fixálnak, az ezen át nem menő egyenesek közül egy e-t kiválasztanak. A p-n átmenő egyenesek ponthalmazait egy három hosszú ciklusban permutáljuk úgy, hogy e pontjainak képei e-re essenek (és így az e-n kívüli, p-től eltérő pontok e-n kívülre kerüljenek). (Ez egy „harmadrendű elforgatás”, amennyiben e-t végtelen távoli egyenesnek tekintjük és a közönséges p pont a forgatás középpontja.)

(iv) alatt leírt leképezések kiválasztanak egy e egyenest és rajta egy p pontot. e-n, a p-től eltérő két pont felcserélődik, a maradék négy pont pedig egy négy hosszú ciklusban permutálódik úgy, hogy a permutáció mindig elmozdítja a pontot az őt p-vel összekötő egyeneséről. (Ez egy „csúsztatva tükrözés”, amennyiben e-t végtelen távoli egyenesnek tekintjük és az ezen kiválasztott pont határozza meg az eltolás irányát.)

6. Feladat. *Igazoljuk $\mathbb{A}ut(\mathcal{PG}(2,\mathbb{F}_2))$ konjugáltsági osztályai megegyeznek a fent leírt (i), (ii), (iii), (iv) osztályokkal, továbbá az (v) alatt leírt elemek két 24 elemű konjugáltsági osztályra bomolnak.*

7. Tétel. $\mathbb{PGL}(3,\mathbb{F}_2)$ *egyszerű csoport.*

Észrevétel. $\mathbb{PGL}(3,\mathbb{F}_2)$ nem eleme a $\{\mathbb{Z}_p : p \text{ prím}\}$, $\{\mathbb{A}_n : n \geq 5\}$ csoportok egyikének sem.

8. Feladat. *A Fano-sík egy α automorfizmusma permutálja a pontokat. Igazoljuk, hogy minden α-ra ez egy páros permutáció.*

9. Feladat. *Igazoljuk, hogy $\mathbb{S}_7$ egy 168 elemű részcsoportja szükségszerűen $\mathbb{A}_7$ egy részcsoportja.*

$\star \quad \star \quad \star$

Számozzuk be a Fano-sík ponthalmazát az $1,2,3,4,5,6,7$ számokkal. Két számozás megkülönböztethető, ha van olyan számhármas, amely az egyikben egy egyenesre esik, a másikban nem. Két számozás megkülönböztethetetlen, ha van olyan számhármas, amely az egyikben egy egyenesre esik, a másikban nem.

Másképpen a Fano-sík ponthalmazának számozása (az $1,2,3,4,5,6,7$ számokkal) leír egy halmazrendszert a [7] halmazon: az egyenesek ponthármasainak halmazrendszerét. Mind $7!$ számozás izomorf halmazrendszerhez vezet ($\mathcal{F}$). Különböző számozások azonban vezethetnek UGYANAHHOZ a halmazrendszerhez.

Észrevétel. A megkülönböztethetetlenség ekvivalenciareláció. Mindegyik ekvivalenciaosztálynak $|\mathbb{A}ut(F)|$ darab eleme van.

10. Következmény. 30 *ekvivalenciaosztály van.*

Azaz a Fano-sík 7! számozása 30 darab 168 elemű csoportba osztható. Egy csoportba eső számozások olyanok, hogy egyeneseik hármasai megegyeznek. Két különböző csoportból véve egy-egy számozást lesz olyan hármas ami megkülönbözteti őket: egyikben egyenes lesz, a másikban nem. Azaz van 30 különböző, de izomorf halmazrendszerünk.

Rögzítsünk egy alapszámozást. Ehhez képést minden másik számozás egy permutáció, ami lehet páros, illetve páratlan. A megkülönböztethetetlenek egy automorfizmussal való szorzással nyerhetők egymásból, így azonos paritásúak. A paritás a 7! sok számozást két azonos méretű halmazba sorolja. Így az azonos méretű osztályok között is ugyanannyi tartalmaz páros permutációkat (15 darab), mint amennyi páratlanokat tartalmaz (15 darab).

Definíció. Vegyük az alapszámozást. Ennek minden egyenesének pontjait (három pont) egy három ciklusú permutációval permutáljuk, a többi pont fixen marad. Minden egyeneshez (7-féle) kétféleképpen választhatjuk a három hosszú ciklust. A fenti módszer $2 \cdot 7$ másik számozást ad az alapszámozás mellé.

A fent leírt módon nyert $1 + 2 \cdot 7 = 15$ számozás mindegyike páros permutációval kapható az alapszámozásból.

11. Lemma. *A definícióban leírt számozások páronként megkülönböztethetők.*

Bizonyítás. Könnyű látni, hogy az alapszámozától eltérő számozások mindegyikének egyetlen egy egyenese fordul elő az alapszámozásban, az amely pontjainak permutálása alapján a listára került. Így megkülönböztethetetlenség csak olyan két számozás esetén fordulhat elő, amelyek ugyanazon egyenes menti különböző három hosszú ciklus alkalmazásával nyertünk. Ezekről azonban egyből látható a megkülönbötethetőség. ■

Ezzel azonosítottunk a 15 páros permutációkat tartalmazó osztályhoz egy-egy reprezentánst. Persze ez csak a 15 halmazrendszer egy-egy lerajzolással. Így azonban könnyen láttathatjuk a halmazrendszereinket. Az alábbi képen ezt mutatjuk meg (a „csúcson” látható az alapszámozás).

Definíció. Legyen F^+ a fenti 15 osztály/reprezentáns/halmazrendszer halmaza.

3. A Fano-sík és a Hoffman—Singleton-gráf

Definiálunk egy $(7, 2)$ paraméterű Moore-gráfot. (Azaz egy alternatív leírását adjuk a Hoffman—Singleton-gráfnak.)

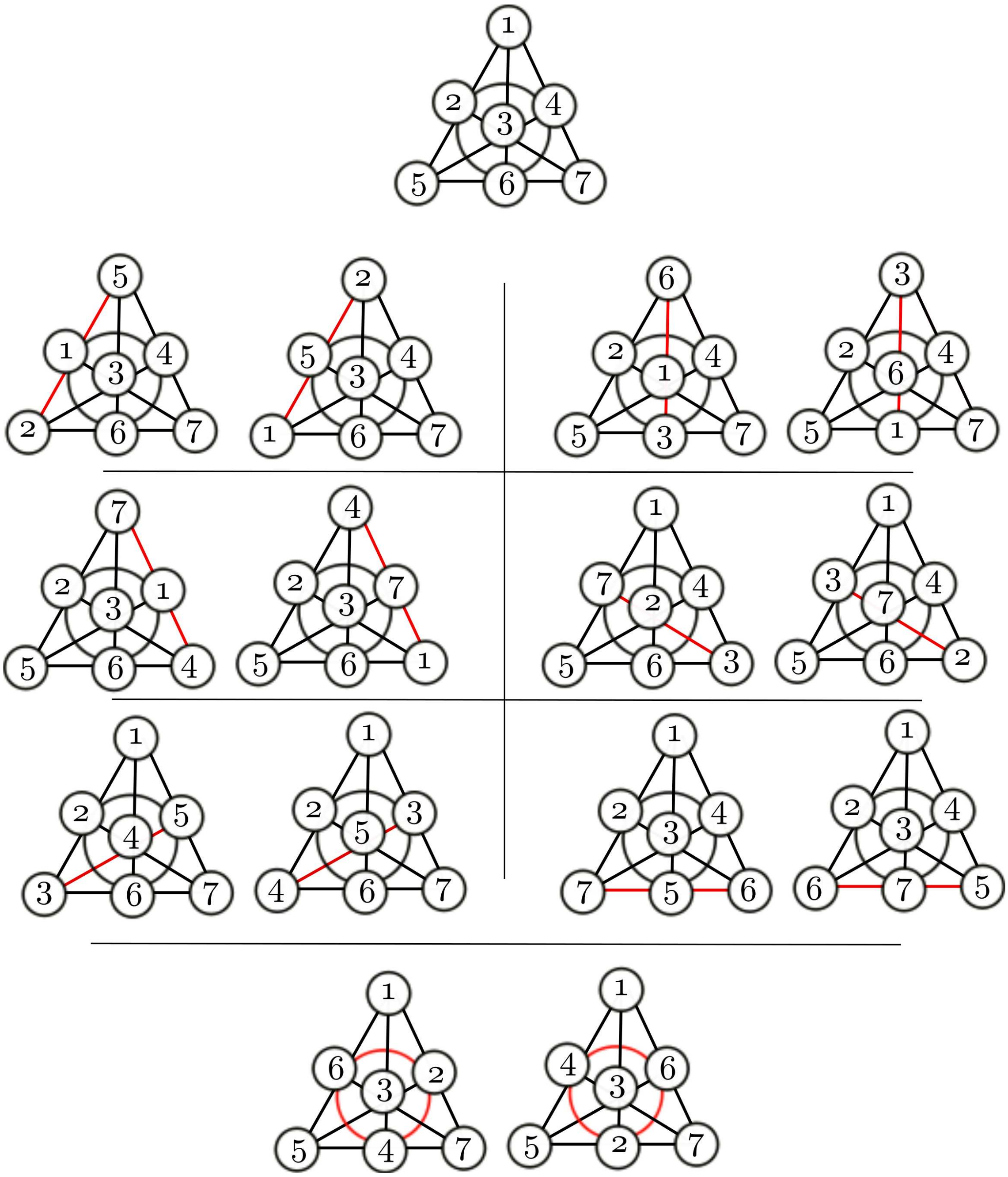
Definíció. A csúcsok halmaza $F^+ \cup \binom{[7]}{3}$.

F^+ egy eleme pontosan egyeneseinek számhármasaival összekötött. Két $\binom{[7]}{3}$-beli hármas akkor és csak akkor összekötött ha diszjunktak.

Legyen $HoS(F)$ az így kapott gráf.

Kezdjük néhány egyszerű észrevétellel: Gráfunknak $15+35 = 50$ csúcsa van. F^+ minden elemének 7 a foka. F^+ egy 15 elemű független csúcshalmaz.

12. Lemma. $HoS(F)$ *egy 7 reguláris gráf.*



2. ábra.

Bizonyítás. F^+ elemeinek nyilván 7 a foka.

Legyen E egy hármas. Ez négy másik hármassal szomszédos (négy másik hármas diszjunkt tőle). A foka ismeretéhez látnunk kell, hogy F^+ hány eleme tartalmazza E-t egyenesként.

Ha E egyenes az alapszámozásban, akkor egyszerű a dolgunk: az alapszámozás mellett pontosan azon kettő tartalmazza E-t, amelyben éppen ezen egyenes ponthármását permutáltuk ciklikusan.

Ha $E = \{i, j, k\}$ nem egyenes, akkor is látunk három számozást, amely tartalmazza E-t: Amikor az alapszámozásban azon egyenesen permutálunk, amely k és az ij egyenes harmadik pontját köti össze, és úgy permutáljuk, hogy k az ij egyenesre kerüljön. Továbbá két másik számozás, amikor i, illetve j tölti be k szerepét. Az is egyszerű, hogy más számozás esetén E nem lesz egyenes. ■

13. Lemma. *$HoS(F)$ átmérője kettő.*

Bizonyítás. Igazából többet igazolunk. Két össze nem kötött csúcsnak pontosan egy közös szomszédja van.

Legyen $S \neq T \in F^+$. Ha $S = A$ az alapszámozás, akkor már tudjuk, hogy pontosan egy egyenese lesz T-ben is egyenes. Ha sem S, sem T nem az alapszámozás, akkor egy alkalmas α automorfizmusra $\alpha(S) = A$. $\alpha(S)$ és $\alpha(T)$ egyetlen közös egyeneséből kiolvasható S és T egyetlen közös egyenese.

Legyen $S \in F^+$ és egy H hármas, amely nem egyenes S-ben. Ekkor lesz egyetlen egyenes S-ben, ami diszjunkt H-tól. Ez közös szomszéd és más közös szomszéd nincs.

Legyen H, H' két hármas, amelyeknek egyetlen közös pontja van. Ekkor nincs olyan hármas, amely mindkettőtől diszjunkt lenne (a 7 elemű alaphalmaz túl kicsi). Viszont két olyan számozása is van a Fano-síknak, amiben mindkettő egyenes lesz. Ezek közül pontosan az egyik lesz F^+ eleme.

Legyen H, H' két hármas, amelyeknek két közös pontja van. Ekkor nem lehetnek egyazon síkban, viszont pontosan egy hármas diszjunkt mindkettőtől. ■

14. Következmény. *A fent leírt $HoS(F)$ gráf a Hoffman—Singleton-gráf.*

Megjegyzés. A fenti konstrukciót a $15 + 35$-konstrukcióként hivatkozzák.

⋆

15. Feladat. *Vezessük le, hogy a 7 reguláris, 2 átmérőjű Moore-gráf (azaz HoS) minden független halmaza legfeljebb 15 elemű. Levezetés alatt azt értjük, hogy a 7 reguláris, 2 átmérőjű Moore-gráf leírásában szereplő axiómákból érveljünk, ne valamelyik konstrukcióban indokoljunk.*

16. Feladat. *Mutassunk rá 15 elemű független halmazokra a pentagon-pentagram-konstrukcióban.*

Általában: A pentagon-pentagram-konstrukció (másképpen $25 + 25$-konstrukció) és a $15 + 35$-konstrukció mindegyike ad egy speciális képet a HoS gráfról. Az egyes konstrukció által sugalmazott fogalmakat próbáljuk azonosítani a másik leírásban.

17. Feladat. *Hány 15 pontú független halmaz van HoS gráfban?*