1. Véletlen gráfok automorfizmuscsoportja

Definíció. Legyen $\mathbf{G}_n$ az $\mathcal{G}_n$ halmazból (az $[n]$ ponthalmazú egyszerű gráfok halmazából) uniform eloszlással választott véletlen gráf. A $\mathbf{G}_n$ véletlen gráf generálása úgy is történhet, hogy az $\binom{n}{2}$ darab csúcspár mindegyikére függetlenül döntünk hogy összekötjük (1/2 valószínűséggel), illetve nem kötjük össze (1/2 valószínűséggel). $\mathbf{G}_n$ neve 1/2 paraméterű Erdős—Rényi véletlen gráf.

A véletlen gráfok nagy szimmetriával rendelkeznek: az összes csúcspár között ugyanolyan eloszlással döntünk gráfunkról. Ennek ellenére konkrét pénzfeldobások elvégzésével nem valószínű, hogy szimmetriát mutató gráfhoz jutunk.

1. Tétel.

$$\mathbb{P}(\mathbb{A}ut(\boldsymbol{G}_n) = 1) \to 1, \ \ ha\ n \to \infty,$$

azaz egy véletlen gráf 1 *valószínűséggel aszimmetrikus.*

Bizonyítás. Egy $v$csúcs kiterjesztett fokszáma legyen a $\widehat{d}(v) = (d, e_1, e_2, \ldots, e_d)$ sorozat, ahol d a v csúcs foka és $e_1 \leq e_2 \leq \ldots \leq e_d$ a v szomszédai fokainak rendezett sorozata. A G gráf $\widehat{d}$*-asszimmetrikus*, ha $\widehat{d}$ különböző értéket vesz fel minden csúcsra. Belátjuk, hogy $\mathbf{G}_n$ 1 valószínűséggel $\widehat{d}$-aszimmetrikus. Ebből nyilván következik az állítás.

Egy a és b csúcs $\widehat{d}$-megkülönböztetett, ha $\widehat{d}(a) \neq \widehat{d}(b)$, illetve $\widehat{d}$-megkülönböztethetetlen, ha $\widehat{d}(a) = \widehat{d}(b)$. A továbbiakban a és b tetszőleges két különböző, de lerögzített csúcspár. Legyen $E_{a,b}$ az „a és b $\widehat{d}$-megkülönböztethetetlen” esemény. Belátjuk, hogy $\mathbb{P}(E_{a,b}) = o(1/n^2)$ (azaz $\binom{n}{2}$ darab eseményről állítjuk becslésünket). Ebből adódik az állítás.

Legyen A és B az a, illetve b csúcsok szomszédsága. Legyen $A_{\overline{b}}$ azon csúcsok A-ból, amelyek nem összekötöttek b-vel. Hasonlóan definiálható $B_{\overline{a}}$. Legyen $G_0 = G|_{V(G)-\{a,b\}}$. $E_{a,b}$ pontosan akkor következik be, ha $|A| = |B|$ (ez ekvivalens azzal, hogy $|A_{\overline{b}}| = |B_{\overline{a}}|$) és a G_0-beli fokok $A_{\overline{b}}$-beli eloszlása ugyanaz mint $B_{\overline{a}}$-beli eloszlása.

Az $E_{a,b}$ esemény azon részhalmaza, amikor $|A| = |B| \leq n/3$ nyilván $o(1/n^2)$ valószínűségű. A továbbiakban feltesszük, hogy $|A| = |B| > n/3$.

Legyen ℓ $A_{\overline{b}}$-ban a különböző G_0-beli fokok száma. Legyen M $A_{\overline{b}}$-ban a „leggyakoribb” G_0-beli fok multiplicitása. Belátjuk, ha ℓ vagy M valamelyike „nagy”, akkor készen vagyunk.

A következőkben gondoljunk arra ℓ nagy. Tegyük fel, hogy $d_1, d_2, \ldots, d_\ell$ az $A_{\overline{b}}$-ban előforduló G_0-beli fokok. Tegyük fel, hogy $A_{\overline{b}}$-ban ezek $m_1, m_2, \ldots, m_\ell$ multiplicitással szerepelnek, míg $B_{\overline{a}}$-ban ezek μ_1, μ_2, μ_3, …, μ_ℓ multiplicitással szerepelnek. Azaz G_0-ban a d_i fokú csúcsok halmazát az $A_{\overline{b}}$ halmaz m_i elemben, míg a $B_{\overline{a}}$ halmaz μ_i elemben metszi. Ez a G_0-n kívül (a-ból és b-ből induló) élek választásától függ. Könnyű látni, hogy m_i, illetve μ_i paritása egyenletesen, egymástól függetlenül oszlik el. Így csak egy paritás egyezése (ami szükséges $E_{a,b}$-hez) 1/2 valószínűségű. Az összes paritás egyezése $(1/2)^\ell$ valószínűségű. Így

$$\mathbb{P}(E_{a,b} |\ A_{\overline{b}}\text{-ban van } \ell \text{ különböző } G_0\text{-fok}) \leq \left(\frac{1}{2}\right)^\ell.$$

Most gondoljunk arra, hogy M nagy. A vizsgált eseményt becsüljük felül azzal, hogy G_0-ben lesz M darab azonos fokú pont. Legyen U egy M elemű ponthalmaz. A vizsgált eseményt lefedhetjük $E_{U,k}$ eseménnyekkel, ahol $E_{U,k}$ annal bekövetkezése, hogy U-n belül minden fok k.

Nézzük meg U-n belül milyen fokok alakulnak ki. Ezek után minden $x \in U$ esetén az U-ból kivezető leheséges élek közül előírt számúnak kell megvalósulni, hogy a fok k értékűvé váljon. Az adott fok kialakulásának valószínűsége legfeljebb $1/\sqrt{n-M}$. Különböző U-beli fokok esetén ezek független események.

A részletek összerakása után kapjuk

$$\mathbb{P}(E_{a,b} |\ A_{\overline{b}}\text{-ban van } M \text{ darab csúcs azonos } G_0\text{-fokkal}) \leq n \cdot \binom{n}{M} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{n-M}}\right)^M.$$

Az első becslésünk megfelelő, ha $\log n \ll \ell$. Második becslésünk megfelelő, ha $\sqrt{n} \ll M$. Mivel $\ell M \geq n/3$, mindenképpen adódik a tétel. ■

A fenti tétel állítását a következőképpen értelmezhetjük. Az alábbi algoritmus hatékonyan, kis hibázással teszteli a véletlen gráfok izomorfizáját: Az algoritmus el se olvassa az input két gráfját. Minden számolás nélkül „NEM IZOMORFAK" állapottal leáll. Ennél hatékonyabb algoritmust el se lehet képzelni. Tételünk ekvivalens azzal, hogy a hibázás valószínűsége nagy n esetén közel 0.

Ha a fenti bizonyítás alapját megértettük, akkor okosabb algoritmust is tervezhetünk. Ez nagyon kis valószínűséggel „FELSÜLTEM" állapottal áll meg, különben megadja a helyes választ. Az előző — hibázási lehetőséget megengedő — algoritmussal szemben ez nagy előrelépés. Az algoritmus elolvassa a két gráfot és mindkettő esetén minden csúcsra kiszámolja a $\widehat{d}$ sorozatokat. Ha a két gráfra a két sorozat-n-es nem azonos, akkor „NEM IZOMORFAK" outputtal leállunk. Ha a két sorozat-n-es ugyanaz és a közös összességben van két azonos sorozat, akkor „FELSÜLTEM" outputtal leállunk. Ha a két sorozat-n-es ugyanaz és minden eleme különböző, akkor az egyes sorozatok párbaállítják a két inputgráf csúcshalmazát. Ez az egyetlen lehetséges izomorfizmus. Teszteljük, hogy ez valóban izomorfizmus-e. A teszt eredményétől függően az outputunk „IZOMORFAK" vagy „NEM IZOMORFAK" lesz.

2. Ramsey számok

Definíció. Legyen $Ram(G) = \max\{\omega(G), \alpha(G)\} = \max\{\omega(G), \omega(\overline{G})\}$, azaz a legnagyobb halmaz mérete G-ben ami független vagy klikk.

Nyilván $Ram(G) = Ram(\overline{G})$.

Definíció. Legyen $R(k)$ az a minimális n csúcsszám, amely esetén minden n pontú egyszerű G gráfra $Ram(G) \geq k$. Az $R(k)$ számok a *Ramsey-számok*.

Hasznos a fenti fogalom aszimmetrikus változatát is bevezetni.

Definíció. Legyen $R(k, \ell)$ az a minimális n csúcsszám, amely esetén minden n pontú egyszerű G gráfra $\omega(G) \geq k$ vagy $\alpha(G) \geq \ell$. Az $R(k, \ell)$ számokat is Ramsey-számokként hivatkozzuk.

Természetesen $R(k) = R(k, k)$.

A fenti fogalmak máképp is megfogalmazhatók. Az alapprobléma szimmetrikus a $G, \overline{G}$, gráf-komplementer gráfpárra. Ennek látványos vizualizálása, ha G éleit pirosra, a komplementer éleit kékre festjük. Így a teljes gráf egy piros-kék élszínezésével dolgozunk. A klikkek piros monokromatikus csúcshalmazok (a halmazon belül minden él piros). A független csúcshalmazok kék monokromatikus csúcshalmazok. Az új nyelv alapján a fenti Ramsey-számok tovább általánosíthatók több szín vizsgálatával. Mi csak egy speciális esetet írunk le.

Definíció. Legyen $R(k, \ell, m)$ az a minimális n csúcsszám, amely esetén az n pontú teljes gráf minden piros-kék-zöld élszínezésére garantáltan található k elemű piros-monokromatikus, vagy ℓ elemű kék-monokromatikus, vagy m elemű zöld-monokromatikus ponthalmaz.

A jól ismert $R(3) = 6$ állítás bizonyításának egyik része, hogy $R(3) > 5$. Azaz öt csúcsú gráfok közt van olyan, amelyre $Ram(G) \leq 2$. Ezt az öt hosszú kör mutatja: nem tartalmaz se három elemű klikket, se három elemű független ponthalmazt.

2. Feladat. *Lássuk be, hogy ez az egyetlen öt csúcsú gráf, ami megfelel a fentieknek.*

Ez az öt pontu gráf nagyon szimmetrikus.

3. Feladat. *Az öt pontú egyszerű gráfok között a teljes és az üres gráf automorfizmus csoportja S_5. A többi gráf között az öt hosszú kör az egyetlen csúcstranzitív gráf.*

Ez azért is érdekes, mert az általános $R(k) > \sqrt{2}^k$ egyenlőtlenség bizonyítása a véletlen gráfokon alapul. Beláttuk, hogy $\mathbb{P}_{G \in \mathcal{G}_n}(|Aut(G)| = 1) \to 1$. Azaz a véletlen módszer egy olyan gráfot ad, aminek semmilyen szimmetriája nincs. Ennek ellenére ezen legegyszerűbb példán az (egyértelmű) extremális gráf nagy szimmetriával rendelkező gráf. Ez nem egyedüli eset.

4. Feladat. *Mutassunk egy gráfot, amely az $R(3, 4) > 8$ egyenlőtlenséget igazolja.*

5. Feladat. *Igazoljuk, hogy $R(3, 4) = 9$.*

6. Feladat. *Igazoljuk, hogy $R(3, 5) > 13$.*

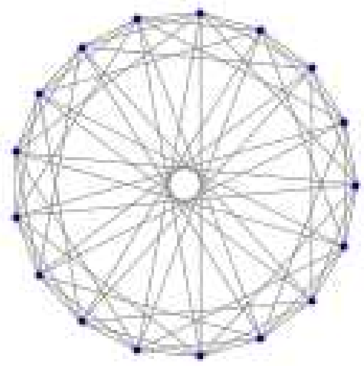
7. Feladat. *Bizonyítsuk be, hogy $R(3, 5) = 14$.*

8. Feladat. *Igazoljuk, hogy $R(3, 6) > 17$.*

9. Feladat. *Bizonyítsuk be, hogy $R(3, 6) = 18$.*

3. Paley-gráfok

Definíció. Legyen q egy prímhatvány, amely 4-gyel osztva 1 maradékot ad. P_q a q paraméterű Paley-gráf csúcshalmaza $\mathbb{F}_q$. Két csúcs, x és y akkor és csak akkor van összekötve, $x - y$ négyzetszám. (Az oszthatósági feltétel ekvivalens azzal, hogy -1 négyzetszám, azaz a fenti összekötöttség szimmetrikus tulajdonság.)



1. ábra.

10. Lemma. *Legyen $q = 4k + 1$ prímhatvány. Ekkor*

(i) $|V(P_q)| = q = 4k + 1$,

(ii) P_q *2k reguláris,*

(iii) P_q *erősen reguláris gráf* $2k, k - 1, k$ *paraméterekkel,*

(iv) P_q *pottranzitív.*

11. Lemma. *A q pontú teljes gráf élhalmaza két diszjunkt osztályra osztható úgy, hogy mindkettő P_q-val legyen izomorf.*

Bizonyítás. Legyen g egy nem-négyzetszám elem $\mathbb{F}_q$-ban. Ekkor a g-vel való szorzás permutálja a csúcsokat, P_q éleit éppen nem-élekbe viszi. ■

A fentitulajdonságot úgy nevezzük, hogy P_q egy ön-komplementer gráf.

12. Tétel. $R(4) > 17$.

Bizonyítás. Ellenőrizni kell, hogy a P_{17} gráfban nincs négy elemű klikk. ■

13. Feladat. *Igazoljuk, hogy* $R(4) = 18$.

4. Clebsch-gráf

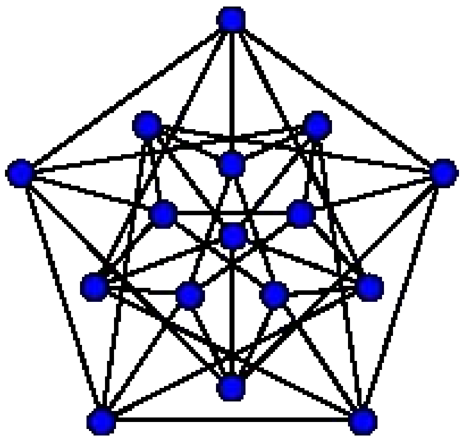
A Clebsch-gráf legegyszerűbb definíciója az alábbi.

Definíció. Cl legyen az az egyszerű gráf, amely csúcsai az [5] páros elemszámú részhalmazai. Két csúcs pontosan akkor összekötött, ha a reprezentált két részhalmaz szimmetrikus differenciája négyelemű.

14. Lemma. *(i)* $|V(Cl)| = 16$,

(ii) Cl *5-reguláris,*

(iii) $5, 0, 2$ *paraméterekkel erősen reguláris gráf,*



2. ábra.

(iv) G ponttranzitív.

Az eredeti definícióval ekvivalens leírások:

(a) A 4-dimenziós hiperkockához hozzáadjuk a szemköztes csúcsokat összekötő éleket.

(b) Az 5-dimenziós hiperkocka szemköztes csúcsait azonosítjuk.

(c) $\mathbb{F}_{16}$ elemein definiálunk egy gráfot: két csúcs akkor és csak akkor összekötött, ha különbségük köbszám.

15. Feladat. *Igazoljuk, hogy a fenti három konstrukció a Clebsch-gráfot írja le.*

16. Lemma (Greenwood—Gleason). *K_{16} élhalmaza három Clebsch-gráf diszjunkt példányára partícionálható.*

Bizonyítás. K_{16} csúcsai legyenek $\mathbb{F}_{16}$ elemei. $\mathbb{F}_{16}^*$ egy ciklikus csoport. Legyen g egy generáló eleme, azaz $\mathbb{F}_{16}^* = \{1, g, g^2, g^3, \ldots, g^{14}\}$. Ezek közül pontosan azok köbszámok, amelyek kitevője hárommal osztható. Speciálisan -1 is g^{3i} alakú. K_{16} éleit színezzük ki három színnel. Az xy él színe legyen $x - y = g^j$ esetén j osztási maradéka hárommal. (Azaz, a három szín: 0, 1 és 2). A definíció korrekt hiszen $y - x = (-1) \cdot (x - y) = g^{3i}(x - y)$.

Az utolsó alternatív definíció alapján a 0 színű élek egy Clebsch-gráfot adnak. A csúcshalmazon g-vel való szorzás és g^2-tel való szorzás egy-egy permutációt ad, amelyek a 0 színű élek részgráfját az 1, illetve 2 színű élek halmazába viszi. Speciálisan minden színosztály egy Clebsch-gráfot ad. Ez az állítást igazolja. ■

17. Következmény. $R(3, 3, 3) > 16$.

Bizonyítás. Vegyük a fenti bizonyításban szereplő élszínezést három színnel. Csak azt kell észrevenni, hogy a Clebsch-gráfban nincs háromszög, azaz nem lesz monokromatikus háromszög. ■

18. Feladat. *Igazoljuk, hogy $R(3, 3, 3) = 17$.*