Szemidefinit programozás és sajátértékek

Hajnal Péter

2021. tavasz

Sajátértékek

Sajátérték probléma

Adot $M \in \mathcal{S}^n \subset \mathbb{R}^{n\times n}$ szimmetrikus mátrix. // Így tudjuk, hogy sajátértékei valósak.

Határozzuk meg sajátértékeit:

$$\lambda_{\text{max}} = \lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \ldots \geq \lambda_n = \lambda_{\text{min}}.$$

A sajátértékek (multiplicitásokkal vett) sora a mátrix spektruma.

J

Nézzük a csupa-1 mátrixot:

$$J = J_k = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \ddots & & 1 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}_{k\times k}.$$

Mik a sajátértékei, sajátvektorai?

A megoldás

- A csupa-1 vektor: $\underline{1} = j = (1, 1, \cdots, 1)^\mathsf{T} \in \mathbb{R}^k$ sajátvektora lesz a mátrixnak: $J\underline{1} = k\underline{1}$. Azaz a megtalált sajátvektorhoz tartozó sajátérték k.

- Tekintsünk egy másik sajátértékhez tartozó sajátvektort, legyen ez: $(x_1, \cdots, x_k) \in \mathbb{R}^k$.

- Ekkor erről tudjuk, hogy merőleges $\underline{1}$-re, azaz $\sum x_i = 0$.

- Ez a gondolat megfordítható: Ha $\sum x_i = 0$, akkor $J\underline{x} = \underline{0} = 0\underline{x}$.

- Így azt kaptuk, hogy 0 is sajátérték és bizonyos hozzá tartozó sajátértékek egy $k-1$ dimenziós alteret feszítenek. Azaz 0 legalább $k-1$-szeres sajátvektor.

- Ezzel az összes sajátérték megvan:

$$k \geq 0 \geq 0 \geq \ldots \geq 0 \geq 0.$$

Speciálisan $\lambda_{\max}(J_{k\times k}) = k$.

Maximális sajátérték problémája

Egyszerűsített sajátérték probléma

Adott $M \in \mathcal{S}^n$, határozzuk meg maximális sajátértékét.

Könnyű belátni és jól ismert tény, hogy

$$\lambda_{\max} = \max_{x \in \mathbb{R}^n : x \neq 0} \frac{x^\mathsf{T} M x}{x^\mathsf{T} x} = \max_{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| = 1} x^\mathsf{T} M x.$$

Azaz a maximális sajátérték meghatározása megfogalmazható a következő alakban:

Maximalizáljuk	$x^\mathsf{T} M x$-t
Feltéve, hogy	$\|x\| = 1.$

Maximális sajátérték másképp

Észrevétel

$\lambda I - M$ sajátértékei

$$\lambda - \lambda_n \geq \lambda - \lambda_{n-1} \geq \ldots \geq \lambda - \lambda_1.$$

- Ezek a sajátértékek pontosan akkor lesznek nemnegatívok, ha $\lambda \geq \lambda_1 = \lambda_{\max}$. $\lambda I - M$ sajátértékeinek nemnegativsága, pontosan $\lambda I - M$ pozitív szemidefinitsége.
- A legkisebb ilyen λ érték $\lambda_{\max}$. Átfogalmazásunk:

Minimalizáljuk	λ-t
Feltéve, hogy	$\lambda I - M \succeq 0$

- Ez $\lambda_{\max}$ meghatározásának egy SDP megfogalmazása.

Egy bonyolultabb sajátérték probléma

Legyen $X = \sum_{1=1}^{n} x_i A_i$, ahol $A_i \in \mathcal{S}^k$ (így $X \in \mathcal{S}^k$ is teljesül).

Azaz X a következő alakú

$$\begin{pmatrix} \alpha_{11}^{(1)} x_1 + \alpha_{11}^{(2)} x_2 + \dots & \alpha_{12}^{(1)} x_1 + \alpha_{12}^{(2)} x_2 + \dots & \cdots & \alpha_{1n}^{(1)} x_1 + \alpha_{1n}^{(2)} x_2 + \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{n1}^{(1)} x_1 + \alpha_{11}^{(2)} x_2 + \dots & \alpha_{n2}^{(1)} x_1 + \alpha_{n2}^{(2)} x_2 + \dots & \cdots & \alpha_{nn}^{(1)} x_1 + \alpha_{nn}^{(2)} x_2 + \dots \end{pmatrix}_{n\times n}$$

tehát egy olyan $n \times n$ méretű mátrix, amelynek minden eleme egy lineáris függvény.

Feladat

Határozzuk meg $x \in \mathbb{R}^n$-et úgy, hogy $\lambda_{\max}(X)$ a lehető legkisebb legyen.

SDP megfogalmazás

A „bonyolultabb” feladat korábbi ötletekkel könnyen átírható a következő alakba:

Minimalizáljuk	μ-t
Feltéve, hogy	$X = \sum_{1=1}^{n} x_i A_i$
	$\mu I - X \succeq 0.$

Azaz sajátérték kérdésünk ismét megfogalmazható, mint egy SPD probléma.

A TERV

• A továbbiakban nehéz ($\mathcal{NP}$-teljes) gráfelméleti problémát veszünk elő.

• Optimumára adunk sajátértékek segítségével becslést.

• Majd a legjobb becslés magállapítását megfogalmazzuk mint SDP probléma.

Szünet

Emlékeztető: Szomszédsági mátrix

Egy G egyszerű gráf A_G szomszédsági mátrixa

$$A_G = \begin{array}{cc}
 & \begin{matrix} & y & & x & \end{matrix} \\
\begin{matrix} \\ y \\ \\ x \\ \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0 & & \cdots & & \\ & 0 & \cdots & \begin{cases}1, & \text{ha } yx \in E\\ 0, & \text{különben}\end{cases} & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ & \begin{cases}1, & \text{ha } xy \in E \\ 0, & \text{különben}\end{cases} & \cdots & 0 & \\ & & \cdots & & 0 \end{pmatrix}
\end{array}.$$

- A_G-t úgy képzelhetjük el, hogy a sorok és az oszlopok is V-vel vannak azonosítva, $n = |V|$.
- Egy konkrét felírásához rögzítenünk kell a csúcsok egy sorrendjét.
- Ha egy sorrendtől független szemléletben tekintjük a mátrixot, akkor egy $V \times V \to \{0, 1\}$ függvényként kell felfognunk.

Emlékeztető: Független csúcshalmazok

Definíció

$F \subset V(G)$ független csúcshalmaz, ha minden élnek legfeljebb egy végpontja F-beli. Azaz nincs F-en belüli él. Azaz $G|_F$ üres gráf.

Adott G egyszerű gráfra a kapcsolódó optimalizálási feladat

Maximalizáljuk	$\|F\|$-t
Feltéve, hogy	F független csúcshalmaz

p^* standard jelölése $\alpha(G)$.

Független csúcshalmazok és szomszédsági mátrix

Ha F egy független halmaz, akkor az F-beli csúcsok kijelölnek A_G-ban egy nulla részmátrixot:

$$
\begin{array}{cc}
 & \overbrace{\hphantom{0 \quad \dots \quad 0}}^{F} \\
F\left\{\begin{matrix} \\ \\ \\ \end{matrix}\right. &
\begin{pmatrix}
 & & & & \\
 & 0 & \dots & 0 & \\
 & \vdots & \ddots & \vdots & \\
 & 0 & \dots & 0 & \\
 & & & &
\end{pmatrix}
\end{array}
$$

azaz ha az F-en kívüli csúcsok sorait/oszlopait elhagyjuk, akkor csupa 0 mátrixhoz jutunk. Azaz $A_G|_{F\times F} \equiv 0$.

Egy csavar

Technikai okok miatt a feladat egy másik formáját nézzük, ahol A_G helyett $\overline{A_G}$ mátrix-szal dolgozunk.

Ebben a mátrixban A_G 0 és 1 elemeit felcseréltük. Azaz a főátlón 1-esek vannak, azon kívül a csúcspárok közötti nem-éleknek 1-eseket feleltetünk meg, az éleket pedig a 0-k jelölik.

Azaz

$$\overline{A_G} = \begin{array}{cc} & y \\ \begin{array}{c} \\ y \\ \\ x \\ \\ \end{array} & \begin{pmatrix} 1 & & \cdots & \\ & 1 & \cdots & \\ & & \ddots & \\ & \begin{cases} 0, & \text{ha } xy \in E \\ 1, & \text{különben} \end{cases} & & \\ & & \cdots & 1 \end{pmatrix} \end{array} = J - A_G = I + A_{\overline{G}}.$$

F akkor és csak akkor független csúcshalmaz, ha $\overline{A_G}|_{F\times F} = J$, a konstans 1-mátrix.

A „gondolat"

- Ezek alapján vegyük $\overline{A_G}$-nak $|F| \times |F|$ méretű részmátrixának az $|F|$ sajátértékhez tartozó sajátvektorát ($\in \mathbb{R}^{F\times F}$).
- Egészítsük ki 0 komponensekkel, hogy $\mathbb{R}^V$ egy elméhez jussunk.
A kapott vektor χ_F.
- Könnyű ellenőrizni, hogy

$$|F| = \frac{\chi_F^\mathsf{T}\overline{A_G}\chi_F}{\chi_F^\mathsf{T}\chi_F} \leq \max_{x:x\in\mathbb{R}^V-\{0\}} \frac{x^\mathsf{T}\overline{A_G}x}{x^\mathsf{T}x} = \lambda_{\max}(\overline{A_G}).$$

- A következő eredményhez jutottunk:

Tétel

Legyen G egy egyszerű gráf, F egy független halmaz gráfunkban. Ekkor

$$\lambda_{\max}\left(\overline{A_G}\right) \geqslant |F|.$$

Speciálisan

$$\lambda_{\max}\left(\overline{A_G}\right) \geqslant \alpha(G).$$

Miért jó ez?

- Bonyolultságelméletből tudjuk, hogy a legnagyobb független halmaz méretének meghatározása egy $\mathcal{NP}$-nehéz probléma.

- Numerikus módszerekből tudjuk, hogy a maximális sajátérték hatékonyan meghatározható.

- $\lambda_{\max}\left(\overline{A_G}\right)$ kiszámolásával egy $\mathcal{NP}$-nehéz függvényre kapunk becslést.

A gondolat „kisajtolása”

Észrevétel

A gondolatmenetben $\overline{A_G}$-ról csak azt használtuk ki, hogy a főátlón 1-esek és a „nem-éleknél” is 1-esek szerepelnek.

Következmény

G egy tetszőleges egyszerű gráf.

- Legyen $M \in \mathcal{S}^V$ egy tetszőleges olyan mátrix, amely
  (i) főátlóján 1-ek állnak,
  (ii) a „nem-éleknél” is 1-ek állnak

// Legyen ez a T_G tulajdonsága $M \in \mathcal{S}^V$-nek

- Legyen F egy tetszőleges független halmaz.

Ekkor

$$\lambda_{\max}(M) \geqslant |F|.$$

A következmény leghatékonyabb kihasználása

- A következménynek két „résztvevője” van.
  (i) a T_G tulajdonságú mátrix,
  (ii) az F független csúcshalmaz.
- Egyik a bal oldalon, másik a jobb oldalon szerepel.
- Így könnyű a tétel legélesebb változatát megfogalmazni.

Tétel

Legyen G egy egyszerű gráf. Ekkor

$$\min\{\lambda_{\max}(M) : \ M \in \mathcal{S}^V \ T_G \text{ tulajdonságú}\} \geqslant \max\{|F| : \ F \text{ egy független halmaz}\}.$$

Az egyenlőtlenség bal oldala

Minimalizáljuk	$\lambda_{\max}(M)$-t
Feltéve, hogy	$M_{uu} = 1$, minden $u \in V$ esetén,
	$M_{uv} = 1$, minden $uv \notin E$ esetén,
	$M \in \mathcal{S}^n$.

Átfogalmazzuk a problémát és belátjuk, hogy annak meghatározása egy SDP probléma.

Átfogalmazás: jelölések

$e = xy \in E(G)$ tetszőleges él. Legyen S_e az a mátrix, amelyben csak a xy és yx pozícióban áll 1, mindenütt máshol 0 szerepel. Azaz

$$S_e = \begin{array}{c} \\ \\ \\ x \\ \\ y \\ \\ \\ \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccccc} & & & x & & y & & \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \end{array}.$$

Azaz

$$S_e(u, v) = \begin{cases} 1, & u = x, v = y \text{ vagy } u = y, v = x \\ 0 & \text{különben.} \end{cases}$$

Az átfogalmazott probléma

Ezekután egy M szimmetrikus mátrix T_G tulajdonsága ekvivalens azzal, hogy $M = J - \sum_{e\in E} x_e S_e$ valamely $x_e \in \mathbb{R}^E$ vektorra: A főátlón és a nem- éleknél a J mátrix 1 eleme áll, míg másutt (egy e él pozíciójában) x_e-vel módosítunk (tetszőleges értékre).

Ezek után ez az első példa alapján ez egy SDP feladat:

Minimalizáljuk	μ-t
Feltéve, hogy	$M = J - \sum_{e\in E} x_e S_e$
	$\mu I - M \succeq 0.$

Azaz (**II**. normálformában)

Minimalizáljuk	μ-t
Feltéve, hogy	$-\mu I - \sum_{e\in E} x_e S_e \preceq -J.$

Összefoglalás

Összefoglalva:

Definíció/Jelölés

Legyen G egyszerű gráf. Ekkor

$$\vartheta(G) = \text{ a fenti SDP feladat optimális értéke.}$$

Azt kaptuk, hogy

Tétel

Legyen G egy egyszerű gráf. Ekkor

$$\vartheta(G) \geq \alpha(G).$$

Tudva, hogy egy SDP optimalizálási feladat optimuma hatékonyan kiszámítható a tétel egyenlőtlenségének jobb oldala $\mathcal{NP}$-nehéz, míg bal oldala kezelhető.

Szünet

Klikkfedési probléma

Probléma

Adott egy G egyszerű gráf. Fedjük le csúcshalmazát minél kevesebb klikkel.

Legyen $\overline{\chi}(G)$ a legkisebb szám, amennyi klikkel ez megoldható.

• Egy klikkfedés csúcsosztályozása a komplementer gráf egy jó színezése. Azaz a klikkfedés probléma a komplementer gráfra vonatkozó színezési probléma, azaz $\overline{\chi}(G) = \chi(\overline{G})$.
• Speciálisan a klikkfedési probléma $\mathcal{NP}$-nehéz.
• G egyszerű gráfot ismét leírhatjuk egy mátrix-szal. Számunkra az $A_{\overline{G}}$ mátrix lesz „kényelmes”.
• Vegyünk G egy klikkfedését. ℓ legyen a klikkek száma. Azaz $V = K_1 \dot{\cup} K_2 \dot{\cup} \ldots \dot{\cup} K_\ell$, ahol a K_i-k diszjunkt klikkek.

Vektorok, mátrixok

A csúcsok osztályozását tükröztethetjük a lineáris algebrai jelölésben.

• $\mathbb{R}^V$ lemeire úgy gondolunk, hogy koordinátái ℓ blokkba vannak osztva:

$$(\overbrace{x_1, \dots}^{K_1} | \overbrace{\quad\dots\quad}^{K_2} | \dots | \overbrace{\dots, x_n}^{K_\ell}).$$

• Hasonlóan egy $V \times V$ típusú mátrix egy $\ell \times \ell$ típusú blokkmátrixnak tekinthető:

$$M = \begin{array}{c c} & \begin{array}{cccc} \overbrace{\qquad}^{K_1} & \overbrace{\qquad}^{K_2} & \dots & \overbrace{\qquad}^{K_\ell} \end{array} \\ \begin{array}{c} K_1\{ \\ K_2\{ \\ \vdots \\ K_\ell\{ \end{array} & \left(\begin{array}{c|c|c|c} \quad & \quad & \quad & \quad \\ \hline \quad & \quad & \quad & \quad \\ \hline \quad & \quad & \quad & \quad \\ \hline \quad & \quad & \quad & \quad \end{array}\right) \end{array}.$$

A szomszédsági blokk-mátrix

Speciálisan nézzük $A_{\overline{G}}$-t:

$$
A_{\overline{G}} = \begin{array}{c} \\ K_1\{ \\ K_2\{ \\ \vdots \\ K_\ell\{ \end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccc} \overbrace{}^{K_1} & \overbrace{}^{K_2} & \dots & \overbrace{}^{K_\ell} \end{array} \\
\left(\begin{array}{c|c|c|c}
\boxed{0} & & & \\ \hline
 & \boxed{0} & & \\ \hline
 & & \ddots & \\ \hline
 & & & \boxed{0}
\end{array}\right)
\end{array}.
$$

$A_{\overline{G}}$ sajátértékei legyenek $\lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \ldots \leqslant \lambda_n = \lambda_{\max}$ $(n = |V|)$.

v és $\widetilde{v}$

Legyen a $\lambda_{\max}$-hoz tartozó sajátvektor: $v^{\mathsf{T}} = (v_1|v_2|\dots|v_l)$.

Legyen

$$\widetilde{v}^{\mathsf{T}} := \big(\|v_1\|, 0, \dots, 0\big|\|v_2\|, 0, \dots, 0\big|\dots\big|\|v_\ell\|, 0, 0, \dots, 0\big)$$

ahol $\|w\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{d} (w_i)^2}$, a d-diemnziós w vektor L^2 normája.

Q ortogonális mátrix

• Nyilván $\|\tilde{v}\| = \|v\|$, így alkalmas Q ortogonális mátrix $\widetilde{v}$-t v-be viszi: $Qv = \widetilde{v}$.

• Q választható úgy, hogy az eddigi blokkosítással „kompatibilis" legyen: a $\widetilde{v}$ és v vektorok blokkokon belüli L^2 normái is rendre azonosak.

• Így alkalmas Q_i ortogonális mátrixokra $Q_i\widetilde{v}_i = v_i$, ahol $\widetilde{v}_i = (\|v_i\|_2, 0, 0, \ldots, 0)^{\mathsf{T}} \in \mathbb{R}^{K_i}$.

• Ekkor

$$Q = \begin{array}{cc} & \begin{array}{cccc} \overbrace{\qquad}^{K_1} & \overbrace{\qquad}^{K_2} & \cdots & \overbrace{\qquad}^{K_\ell} \end{array} \\ \begin{array}{c} K_1\{ \\ K_2\{ \\ \vdots \\ K_\ell\{ \end{array} & \left(\begin{array}{c|c|c|c} Q_1 & \boxed{0} & \cdots & \boxed{0} \\ \hline \boxed{0} & Q_2 & \cdots & \boxed{0} \\ \hline \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \hline \boxed{0} & \boxed{0} & \cdots & Q_\ell \end{array}\right) \end{array}, \qquad \text{és} \quad Q\widetilde{v} = v.$$

Észrevétel

Észrevétel

Ha u az $A_{\overline{G}}$ λ sajátértékéhez tartozó sajátvektor, akkor $Q^{-1}u = Q^{\mathsf{T}}u$ a $Q^{-1}A_{\overline{G}}Q$, mátrixnak egy sajátvektora, ami szintén a λ sajátértékhez tartozik.

Valóban,

$$(Q^{-1}A_{\overline{G}}Q)(Q^{-1}u) = Q^{-1}A_{\overline{G}}(QQ^{-1}u) = Q^{-1}A_{\overline{G}}u = Q^{-1}\lambda u = \lambda Q^{-1}u.$$

Speciálisan $A_{\overline{G}}$ és $Q^{-1}A_{\overline{G}}Q$ sajátértékei megegyeznek.

Megjegyezzük, hogy $Q^{-1}A_{\overline{G}}Q$-ben is fel lehet ismerni a blokkstruktúrát és a főátlón lévő blokkok 0-mátrixok:

$$Q^{-1}A_{\overline{G}}Q = \begin{array}{rc} & \begin{array}{cccc} \overbrace{\qquad}^{K_1} & \overbrace{\qquad}^{K_2} & \cdots & \overbrace{\qquad}^{K_\ell} \end{array} \\ \begin{array}{r} K_1\{ \\ K_2\{ \\ \vdots \\ K_\ell\{ \end{array} & \left(\begin{array}{c|c|c|c} \boxed{0} & & & \\ \hline & \boxed{0} & & \\ \hline & & \ddots & \\ \hline & & & \boxed{0} \end{array}\right) \end{array}.$$

$R = A_G\big|_{F\times F}$

- Azaz $\lambda_{\max}$ a $Q^{-1}A_{\overline{G}}Q$ mátrix sajátértéke, továbbá $Q^{-1}v = \widetilde{v}$ a $\lambda_{\max}$-hoz tartozó sajátvektor.

- Ez a sajátvektor legfeljebb ℓ darab nem-nulla koordinátát tartalmaz (minden blokk első eleme lehet nem-nulla).

- Legyen F azon csúcsok halmaza, amelyek a K_i blokkok első eleméhez tartoznak. Azaz minden színosztályból (komplementer gráfban gondolkozva) kivettünk egy-egy csúcsot.

- Az így kapott F halmaz felfogható mint csúcshalmaz, de mint sor- vagy oszlophalmaz is.

- $A_{\overline{G}}$-ből képezünk egy R részmátrixot az F-en kívüli sorok és oszlopok elhagyásával. (Ezt az operációt szimmetrikus részmátrix képzésnek nevezzük.)

Lineáris algebrai kitérő

Cauchy-tétel

$M_{s\times s}$ szimmetrikus mátrix, képezzük egy szimmetrikus részmátrixát: $R_{t\times t}$. Legyenek $M_{s\times s}$ sajátértékei: $\lambda_1 \leq \ldots \leq \lambda_s$,, $R_{t\times t}$ sajátértékei : $\mu_1 \leq \ldots \leq \mu_t$. Ekkor

(i) $\lambda_1 \leq \mu_1$, $\lambda_2 \leq \mu_2$, …, $\lambda_t \leq \mu_t$,

(ii) $\mu_t \leq \lambda_s$, $\mu_{t-1} \leq \lambda_{s-1}$, …, $\mu_1 \leq \lambda_{s-t+1}$.

A tételt nem bizonyítjuk, lineáris algebra anyag része lehetett.

Hol is tartunk?

- $Q^{-1}A_{\overline{G}}Q$-ból szimmetrikus részmátrix képzéssel kaptunk egy $F \times F$ típusú $\ell \times \ell$ méretű R mátrixot.

- Könnyű látni, hogy $\widetilde{v}|_F \in \mathbb{R}^F$ vektor ($\widetilde{v}$ blokkjainak első elemei által alkotott vektor) sajátvektora R-nek.

- Továbbá a megfelelő sajátértek λ_{max}. Specializáljuk Cauchy tételét esetünkre.

- $Q^{-1}A_{\overline{G}}Q$ (egyben $A_{\overline{G}}$) sajátértékei: $\lambda_{\mathrm{min}} = \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \ldots \leq \lambda_n = \lambda_{\mathrm{max}}$.

- Mit mond Cauchy-tétel az R sajátértékeiről $(\mu_1 \leq \mu_2 \leq \ldots \leq \mu_\ell)$? λ_{min} és λ_{max} közé esnek.

- A fentiek alapján a legnagyobb sajátérték λ_{max}.

- A sajátértékek összege mátrixunk nyoma, ami esetünkben 0.

Hol is tartunk? összefoglalva

- Ha az ismert λ_{max} sajátértek melletti $\ell - 1$ darab többit λ_{min}-nel becsüljük, akkor a következőt kapjuk:
$0 = \text{trace } R = \sum_{i=1}^{\ell} \mu_i \geq (\ell - 1)\lambda_{\mathsf{min}} + \lambda_{\mathsf{max}}$.

- Rendezve
$$-(\ell - 1)\lambda_{\mathsf{min}} \geq \lambda_{\mathsf{max}},$$
Ha $A_{\overline{G}}$ nem minden sajátértéke 0, akkor $\lambda_{\mathsf{min}} \lneqq 0 \lneqq \lambda_{\mathsf{max}}$ (tudjuk, hogy összegük 0). Ez az eset akkor történik, ha $\overline{G}$ nem üresgráf, vagyis G nem teljes.

- Ekkor $-\lambda_{\mathsf{min}}$-nel oszthatunk:
$$\ell - 1 \geq \frac{\lambda_{\mathsf{max}}}{-\lambda_{\mathsf{min}}}.$$

- Azaz
$$\ell \geq 1 + \frac{\lambda_{\mathsf{max}}}{-\lambda_{\mathsf{min}}}.$$

Hoffman-tétel, komplementáris forma

Hoffman-tétel, komplementáris forma

Legyen G egy nem teljesgráf.

$A_{\overline{G}}$ a komplementer gráf szomszédsági mátrixa, azaz főtlóján 0-k állnak, azon kívül az 1-esek éppen G nem szomszédságát/a 0-k a G-beli összekötöttséget kódolják).

Legyen ψ egy klikkfedés, $\ell(\psi)$ a klikkek száma.

Ekkor
$$\ell(\psi) \geq 1 + \frac{\lambda_{\max}(A_{\overline{G}})}{-\lambda_{\min}(A_{\overline{G}})}.$$

Hoffman-tétel

Ha a tételt G komplementerére alkalmazzuk, akkor a kromatikus számra kapunk egy becslést.

Hoffman-tétel, eredeti/színezési forma

Legyen G egy egyszerű gráf, amely nem az üresgráf. Legyen A_G a gráf szomszédsági mátrixa.

$$\chi(G) \geq 1 + \frac{\lambda_{\max}(A_G)}{-\lambda_{\min}(A_G)}.$$

A gondolat „kifacsarása”

A bizonyítás csak azon múlt, hogy $A_{\overline{G}}$ mátrixunk főátlóján 0-k szerepelnek és az összekötöttséget 0-k kódolják.

Definíció

Legyen $\widetilde{T}_G$ egy $V \times V$ szimmetrikus mátrix azon tulajdonsága, hogy főátlóján 0-k szerepelnek és a G-beli összekötöttséget 0-k kódolják.

- A fenti bizonyítás megismételhető úgy, hogy $A_{\overline{G}}$ helyett egy $\widetilde{T}_G$ tulajdonságú mátrixot használunk.
- Ez lehetőséget ad a Hoffman-becslés javítására, sőt a javítások optimalizálására.

Hoffman-tétel, erős forma

Hoffman-tétel, komplementáris erős forma

Legyen G egy egyszerű gráf, amely nem teljesgráf.

Legyen M egy $V \times V$ típusú $\widetilde{T}_G$ tulajdonságú szimmetrikus mátrix.

Legyen f egy klikk-fedés, $\ell(f)$ a klikk-fedés klikkjeinek száma.

Ekkor

$$\ell(f) \geq 1 + \frac{\lambda_{\max}(M)}{-\lambda_{\min}(M)}.$$

Azaz

$$\min\{\ell(f) : \ f \text{ egy klikk-fedés}\} \geq \max\{1 + \frac{\lambda_{\max}(M)}{-\lambda_{\min}(M)} : \ M \ \widetilde{T}_G \text{ tulajdonságú}\}.$$

A végső egyenlőtlenség bal oldalának értéke $\overline{\chi}(G)$.

Szünet

A jobb oldal

Legyen (L) a jobb oldali optimalizálási feladat

Maximalizáljuk	$1 + \frac{\lambda_{\max}(M)}{-\lambda_{\min}(M)}$-t
Feltéve, hogy	$M_{uu} = 0$ minden $u \in V$ esetén
	$\langle M, S_e \rangle = 0$ minden $e \in E$ esetén
	$M \in \mathcal{S}^n$.

Ez a feladat átfogalmazható SDP formába.

A számunkra „kedves" SDP formához vezető út hosszú lesz.

Közbülső feladat

Legyen (K) egy közbülső feladat:

Maximalizáljuk	$\lambda_{\max}(N)$-t
Feltéve, hogy	$N_{uu} = 1$ minden $u \in V$ esetén
	$N_{uv} = 0$ minden $uv \in E$ esetén
	$N \succeq 0$.

Tétel

A Hoffman-tétel kifacsarását leíró (L) és a közbülső (K) optimalizálási feladat ekvivalens.

Az állítás az, hogy a két feladat optimális értéke megegyezik. Ezt a köztük fennálló mindkét irányú egyenlőtlenség igazolásával mutatjuk meg.

(L) megoldásából (K) megoldása nem romló célfüggvénnyel

Maximalizáljuk	$1 + \frac{\lambda_{\max}(M)}{-\lambda_{\min}(M)}$-t
Feltéve, hogy	$M_{uu} = 0$ minden $u \in V$ esetén
	$\langle M, S_e \rangle = 0$ minden $e \in E$ esetén
	$M \in \mathcal{S}^n$.

egy M lehetséges megoldásából képezzük az $N = I + \frac{1}{-\lambda_{\min}(M)} M$ mátrixot.

Könnyen látható, hogy a megkonstruált N lehetséges megoldása a közbülső problémának.

$\frac{1}{-\lambda_{\min}(M)} M$ legkisebb sajátértéke -1 lesz. Így az egységmátrixot hozzáádva mindegyik sajátérték nemnegatívvá válik.

Továbbá célfüggvényértéke ugyanaz, mint M-n definiált célfüggvény az eredeti problémában.

(K) optimális megoldásából (L) megoldása nem romló célfüggvénnyel

Maximalizáljuk	$\lambda_{\max}(N)$-t
Feltéve, hogy	$N_{uu} = 1$ minden $u \in V$ esetén
	$N_{uv} = 0$ minden $uv \in E$ esetén
	$N \succeq 0$.

Ez a gondolatmenet megfordítható. Vegyük a közbülső probléma egy N optimális megoldását

Ekkor ennek legkisebb sajátértéke pontosan 0: μ pozitív minimális sajátérték esetén μI-t kivonva és $\frac{1}{1-\mu}$-vel szorozva egy jobb lehetséges megoldást kapnánk.

Így a $M = N - I$ mátrixot véve a Hoffman-tételt kifacsaró optimalizálási feladat egy lehetséges megoldásához jutunk, amelyen annak célfüggvénye ugyanaz mint N-en a közbülső problémáé.

A végső forma, $(\widetilde{L})$

Ezek után belátjuk, hogy a közbülső probléma átfogalmazható az alábbi SDP alakba $(\widetilde{L})$:

Maximalizáljuk	$\langle J, \Lambda \rangle$-t
Feltéve, hogy	$\langle S_e, \Lambda \rangle = 0$
	$\langle I, \Lambda \rangle = 1$
	$\Lambda \succeq 0.$

Tétel

A közbülső (K) és az $(\widetilde{L})$ SDP feladat ekvivalens (optimális értékük megegyezik).

Következmény

Az $(\widetilde{L})$ SDP feladat optimális értéke a kicsavart Hoffman-tétel becslése a klikkfedési problémára.

(K) megoldásából $(\widetilde{L})$ megoldása nem romló célfüggvénnyel

Maximalizáljuk	$\lambda_{\max}(N)$-t
Feltéve, hogy	$N_{uu} = 1$ minden $u \in V$ esetén
	$N_{uv} = 0$ minden $uv \in E$ esetén
	$N \succeq 0$.

- Legyen N a közbülső probléma egy tetszőleges lehetséges megoldása.
- Legyen u egy $\lambda_{\max}$ sajátértékhez tartozó egység hosszú sajátvektor.
- Legyen $U = uu^{\mathsf{T}} \in \mathbb{R}^{V \times V}$.
- Legyen $\Lambda = N \cdot_H U$ az N és U mátrixok Hadamard-szorzata (az xy helyen álló elem $N_{xy} U_{xy}$).
- Ekkor Λ az SDP feladat egy lehetséges megoldása, ahol a célfüggvény értéke $\lambda_{\max}(N)$.

A célfüggvény értéke

- A célfüggvény

$$\langle J, \Lambda \rangle = \langle J, N \cdot_H (uu^\mathsf{T}) \rangle = u^\mathsf{T} N u = \lambda_{\max}(N).$$

- Ha $\Lambda = N \cdot_H U = N \cdot_H (uu^\mathsf{T})$ mátrixban megnézzük azon pozíciókat, ahol N-ben 0 áll, akkor a definíció alapján 0-kat látunk.

- $$\langle I, \Lambda \rangle = Tr(N \cdot_H (uu^\mathsf{T})) = Tr(uu^\mathsf{T}) = u^\mathsf{T} u = 1.$$

Λ pozitív szemidefinit

- Λ pozitív szemidefinitsége maradt hátra. A következő lemma alapján ez nyilvánvaló.

Lemma

Legyen $A, B \succeq 0$. Ekkor $A \cdot_H B \succeq 0$.

- A lemma egyszerűen adódik, abból a tényből, hogy minden pozitív szemidefinit mátrix felírható, mint ss^{T} alakú, 1-rangú pozitív szemidefinit mátrixok összege.

- Ha A-t és B-t is felírjuk így, akkor $A \cdot_H B$-ben a zárójelek felbonthatók és kapjuk, hogy $A \cdot_H B$ előáll mint 1-rangú pozitív szemidefinit mátrixok Hadamard-szorzata.

- Ezek pozitív szemidefinitsége azonban nyilvánvaló.

- Ezzel a lemma és az egyik irányú egyenlőtlenség adódott.

$(\widetilde{L})$ megoldásából (K) megoldása nem romló célfüggvénnyel

A másik irányú egyenlőtlenséghez megfordítjuk a fenti gondolatmenetet.

Maximalizáljuk	$\langle J, \Lambda \rangle$-t
Feltéve, hogy	$\langle S_e, \Lambda \rangle = 0$
	$\langle I, \Lambda \rangle = 1$
	$\Lambda \succeq 0.$

- $\Lambda = \frac{1}{|V|} \cdot I$ az SDP egy lehetséges megoldása. A célfüggvény optimális értéke legalább 1.
- Legyen Λ az SDP egy tetszőleges lehetséges megoldása.

Észrevétel

Tegyük fel, hogy egy pozitív szemidefinit egyik átlós eleme 0. Ekkor ezen elem sora és oszlopa is csupa 0 vektor.

$(\widetilde{L})$ megoldásából (K) megoldása (folytatás)

• Ha Λ-nak van 0 átlós eleme, akkor 0 oszlop és sorvektorai is vannak. Ezen a részen legyen N (az éppen most konstruált lehetséges megoldása (K)-nak), az átlón 1, különben 0. A konstrukció lényegi része a többi elem definíciója. Erre koncentrálunk: lényegében feltesszük, hogy Λ átlós elemei nemnullák.

• Legyen u a Λ főátlóján álló (garantáltan nemnegatív, feltevésünk szerin pozitív) számok négyzetgyökeiből képzett vektor. Ez nyilván egységvektor lesz.

• Legyen $U = uu^{\mathsf{T}}$. Feltevésünk szerint ez nemnulla mátrix.

• Legyen N az a mátrix, amelyre $N \cdot_H U = \Lambda$ teljesül.

• Ez (K) egy lehetséges megoldása nem romló célfüggvénnyel.

Összefoglalás

Definíció

Legyen $\widetilde{\vartheta}(G)$ a $(\widetilde{L})$/(K),(L) optimalizálási probléma optimuma.

Az átfogalmazásaink a klikkfedési feladat a kicsavart Hoffman-becslésének formalizálásából indult. Így kapjuk a következő tételt.

Tétel

$$\widetilde{\vartheta}(G) \leq \overline{\chi}(G).$$

Emlékeztető

$\alpha(G)$-hez és $\overline{\chi}(G)$-hez is adtunk egy-egy SDP feladatot, amely optimális értéke becsli a megfelelő gráfparamétert:

Minimalizáljuk	μ-t
Feltéve, hogy	$-\mu I - \sum_{e\in E} x_e S_e \preceq -J.$

Maximalizáljuk	$\langle J, \Lambda\rangle$-t
Feltéve, hogy	$\langle S_e, \Lambda\rangle = 0$
	$\langle I, \Lambda\rangle = 1$
	$\Lambda \succeq 0.$

Összefoglalás: a szendvics

Észrevétel

(i) A két SDP feladat egymás duálisai.

(ii) A két SDP feladat teljesíti olyan feltételeket, amelyek garantálják az erős dualítást.

Azaz a kétféle fogalom egybeesik.

Definíció: a G gráf Lovász-féle teta-függvénye

$$\vartheta(G) = \widetilde{\vartheta}(G).$$

A két korábbi becslést az alábbi tétel foglalja össze.

Lovász László szendvics tétele

$$\alpha(G) \leq \vartheta(G) \leq \overline{\chi}(G).$$

A morál

• A középső függvény először nagyon összetettnek, természetellenesnek tűnik.

• A két szélső függvény definíciója elemi, akár egy érdeklődő középiskolásnak is elmagyarázható.

• Ennek ellenére a két szélső gráfelméleti optimalizálási kérdés bonyolult. $\mathcal{NP}$-nehéz. Hatékony kiszámolására nem látunk lehetőséget (az általános hit szerint).

• A középső bonyolultan leírt függvény értéke azonban hatékonyan kiszámítható/közelíthető (az SDP feladatok kezelhetők).

Köszönöm a figyelmet!