$\mathcal{MP}(G)$ tesztelése

Hajnal Péter

2020. tavasz

Emlékeztető

Definíció (párosítási politóp)

$$\mathcal{MP}(G) = \mathrm{conv}\{\chi_M : M \text{ párosítás } G\text{-ben}\}.$$

Edmonds-féle politóp tétel)

$\mathcal{MP}(G)$ pontosan azokat az $(x_e)_{e\in E} \in \mathbb{R}^{E(G)}$ bektorokat tartalmazza, amelyek a következő három típusú egyenlőtlenséget teljesíti:

$$(E_e): \qquad x_e \geq 0 \qquad \forall e \in E(G)$$

$$(E_v): \qquad \sum_{e:v|e} x_e \leq 1 \qquad \forall v \in V(G)$$

$$(E_S): \qquad \sum_{e\subseteq S} x_e \leq \frac{|S|-1}{2} \qquad \forall S \in \mathcal{O}$$

A problémák

A $\mathcal{MP}(\mathcal{G})$ Edmonds-tételbeli leírásban $|V(G)| + |E(G)| + 2^{|V(G)|-1}$ egyenlőtlenség szerepel. Azaz exponenciálisan sok egyenlőtlenségre van szükség.

Ezek közül néhány elhagyható lehet (láttuk, hogy G páros esetén ez lényeges egyszerűsödés lehet), de a poliéder általában bonyolult (a szükséges egyenlőtlenségek száma exponenciális a gráf csúcsainak, éleinek számában).

Az alapkérdés

Lehet-e „gyorsan” ellenőrizni, hogy egy adott $x \in \mathbb{R}^{E(G)}$ vektor $\mathcal{MP}(\mathcal{G})$ eleme-e? Egy kicsit nehezítjük is a problémát:

Alapkérdés

Keressünk hatékony algoritmust, amely egy adott $x \in \mathbb{Q}^{E(G)}$ vektorra kiadja azt az igaz információt, hogy x $\mathcal{MP}(\mathcal{G})$ eleme, vagy egy definiáló egyenlőtlenséget, amit megsért az x vektor.

Ezt nevezzük az Edmonds-politóp *tesztelési feladatának*.

A hatékony azt jelenti, hogy G méretében polinomiális időben. Tehát a naív algoritmus (minden egyenlőtlenségbe helyettesítsük be x koordinátáit és az ellenőrzések után jelentsük be az eredményt) nem jó.

A nyilvánvaló rész

Az Edmonds-politópba esés tesztelésének algoritmusa persze nyilvánvaló módon indítható:

Az indítás

(E_v) és (E_e) egyenlőtlenségek ellenőrzése.

Két lehetőség lehet:

- Kapunk egy egyenlőtlenséget, amit x nem teljesít,
- Minden (E_v) és (E_e) egyenlőtlenséget teljesít x.

Az első esetben készen vagyunk, hiszen ekkor már tudjuk, hogy $x \notin \mathcal{MP}(G)$ és egy megsértett egyenlőtlenséget is találtunk.

Tehát a továbbiakban feltehetjük, hogy az (E_v) és (E_e) egyenlőtlenségek teljesülnek a tesztelendő x vektorra.

Élsúlyozott gráfok

Egy új jelölésre, gondolkodásra térünk rá.

$x \in \mathbb{R}^E$ azt jelenti, hogy x egy vektor, koordinátái az élekkel azonosítottak. x_e az $e \in E(G)$ élnek megfelelő komponense az x vektornak. x_e értelmezhető az e él súlyának is. A továbbiakban ezt a szemléletet használjuk.

Tehát $(x_e)_{e \in E} \in \mathbb{R}^{E(G)}$ egy élsúlyozott gráf.

A súlyokról feltettük, hogy nemnegatívok. Minden csúcsban az összefutó élek súlyainak összege legfeljebb 1.

Vektor vs függvény szemlélet

Az élsúlyozást ugyancsak természetes egy $x : E(G) \to \mathbb{R}_+$ függvényként elgondolni (x-ről tudjuk, hogy teljesíti az (E_e) egyenlőtlenségeket). Tehát $x(e) = x_e$ a továbbiakban az e él súlya.

Egy $F \subset E(G)$ élhalmaz esetén az

$$x(F) = \sum_{e:e\in F} x_e = \sum_{e:e\in F} x(e)$$

jelöléssel élünk.

Ha $R \subset V(G)$, akkor

$$x(R) = \sum_{e:e=xy\in E(G),x,y\in R} x_e = \sum_{e:e=xy\in E(G),x,y\in R} x(e)$$

jelölést is használjuk.

A fenti megállapodások elsőre talán zavaróak. $x(.)$ jelentése függ attól, hogy az x mögötti zárójelben egy él, egy élhalmaz, vagy egy ponthalmaz szerepel. Vegyük a hozzászokáshoz szükséges időt és

Észrevétel

Észrevétel

$2^{|V|}$ darab

$$x(R) := \sum_{e \subseteq R} x_e \leq \frac{|R|}{2} \qquad \forall R \in \mathcal{P}(V)$$

egyenlőtlenség mindegyik következménye az (E_v) és (E_e) egyenlőtlenségeknek.

Összefoglalva az (E_S) feltételek „csak" azt jelentik, hogy a fenti becslés (amely minden csúcshalmazra igaz) páratlan elemszámú csúcshalmazok esetén $1/2$-del élesíthetők.

Észrevétel bizonyítása

Adjuk össze az

$$\sum_{e\in E:vIe} x_e \leq 1, v \in R$$

egyenlőlenségeket.

Az eredmény

$$\sum_{e=uv\in E:u\in R,v\notin R} x_e + 2\cdot x(R) \leq |R|.$$

A továbbiakban a

$$\partial R := \{e = uv \in E : u \in R, v \notin R\}, \qquad x(\partial R) := \sum_{e=uv\in E:u\in R,v\notin R} x_e$$

jelöléseket használjuk.

Tudjuk, hogy x komponensei nemnegatívok, így tetszőleges R csúcshalmazra

$$2\cdot x(R) \leq x(\partial R) + 2\cdot x(R) \leq |R|, \quad \text{azaz} \quad x(R) \leq \frac{|R|}{2}.$$

Az első cél

Az (E_S) feltételek tetsztelését tetszőleges olyan (G, x) élsúlyozott gráfra kell ellenőrizni kell, amely x súlyozására az (E_v) és (E_e) feltételeket tudjuk.

1. Cél

Belátjuk, hogy ha ezt a feladatot olyan nemnegatív vektorok esetén megoldjuk, ahol az összes (E_v) feltétel egyenlőséggel teljesül, akkor az általános feladat is megoldható.

Adott egy nemnegatív élsúlyozás, amelyről feltesszük, hogy minden csúcsra a rá illeszkedő élek súlyainak összege legfeljebb 1.

Egy (G, x)-ből konstruálunk egy $\widetilde{G}, \widetilde{x}$ párt, amely már az (E_v) egyenlőtlenségeket egyenlőséggel teljesíti (minden csúcsban az ott összefutó élek súlyainak összege pont 1).

A redukció

- Vegyük a G gráfot, illetve egy másolatát G'-t.
- Az „ikercsúcsok” között tekintsünk egy teljes párosítást. A $\widetilde{x}$ élsúlyozás G és G'-ben eggyezzen meg x-vel, a keresztélek $\widetilde{x}$-súlya pedig legyen

$$\widetilde{x}_{vv'} = 1 - \sum_{e \in E(G), v I e} x_e, \qquad \forall v \in V.$$

- Ez a mennyiség az (E_v) feltétel miatt nemnegatív, és így a $\widetilde{G}, \widetilde{w}$ párra is igazak az előjel feltételek, sőt az (E_v) egyenlőtlenségek egyenlőséggel teljesülnek.

Az 1. célt igazoló állítás

(G, x)-re akkor és csak akkor teljesül az összes (E_S) feltétel, ha $(\widetilde{G}, \widetilde{x})$-re is teljesül az összes (E_S) feltétel.

$\widetilde{G}$ páratlan csúcshalmazai

Az állítás egyik iránya nyilvánvaló:

Ha (G, x)-re valamelyik (E_S) feltétel hamis, akkor ugyanaz az S csúcshalmaz (amely $V(\widetilde{G})$-nek is részhalmaza) feltétele sérül $\widetilde{G}$-ben is.

Csak azt kell igazolnunk, ha (G, x)-re minden (E_S) feltétel igaz, akkor $\widetilde{G}$)-ben is teljesülnek ezek.

Ehhez venni kell egy S páratlan elmszámú csúcshalmazt $V(\widetilde{G})$-ből.

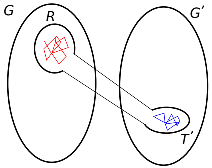
Jelölés

Legyen $S \subset V(\widetilde{G})$ tetszőleges. $R = S \cap V(G)$ és $T' = S \cap V(G')$ az S halmaz két része. T'-ra úgy gondolunk mint egy $T \subset V(G)$ csúcshalmaz ikre.

Ha S páratlan elemszámú, akkor S és T közül az egyik páratlan, a másik páros elemszámú.

1. Eset

1. eset: $R \cap T = \emptyset$.



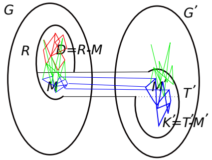
A piros élek egy páratlan elemszámú csúcshalmazon belüli élek, a kék élek egy páros elemszámú csúcshalmazon belüli élek.

Ez egy egyszerű eset. Ekkor az R-en belüli $E(R)$ élek halmaza és a T'-n belüli $E(T')$ élek halmaza együtt kiadja az S-en belüli $E(S)$ élhalmazt. Speciálisan $x(S) = x(R) + x(T') = x(R) + x(T)$.

$x(R)$-et és $x(T)$-t becsülhetjük $|R|/2$-vel, illetve $|T|/2$-vel, sőt a páratlan elemszámú halmaznál tudjuk az $1/2$-del élesített felső becslést is.

2. eset

2. eset: $M := R \cap T \neq \emptyset$.



A piros élek egy páratlan elemszámú csúcshalmazon belüli élek, a kék élek egy páros elemszámú csúcshalmazon belüli élek. A zöld élek $E(R-M, M)$ és $E(R'-M', M')$ élei, a $\partial(M \cup M' \cup K')$ határ részei. Ez a határ szerepel egy (E_v)-k és (E_e)-kből korábban levezetett egyenlőtlenségünkben.

Feltehetjük, hogy $D \subset V(G)$ páratlan elemszámú csúcshalmaz:

$$x(D) \leq \frac{|D|-1}{2}.$$

2. eset (folytatás)

$x(M \cup M' \cup K')$ becslésénél óvatosabbak leszünk.

$$x(M \cup M' \cup K') + \frac{1}{2}(x(\partial_G(M) + \partial_{G'}(M' \cup K')) \leq \frac{|M| + |M'| + |K'|}{2}$$

egyenlőtlenséget használjuk, amit levezettünk az (E_v) és (E_e) egyenlőtlenségből.

A korábban elhanyagolt, „felezett” tagra nyilván

$$x(E(D, M)) \leq \frac{1}{2}(x(\partial_G(M) + \partial_{G'}(M' \cup K')),$$

ahol $E(D, M)$ a D és M között haladó élek száma.

A fenti két egyenlőtlenségből ismét egyszerű számtan adja a bizonyítandót.

Kaptuk, hogy (G, x) és $(\widetilde{G}, \widetilde{x})$ esetén az (E_S) egyenlőtlenségek tesztelése ekvivalens.

Szünet

Vágások

- A továbbiakban csak olyan élsúlyozott (G, x) gráfokkal foglalkozunk, ahol az (E_v) egyenlőtlenségek egyenlőséggel igazak, azaz minden $v \in V(G)$ csúcs esetén

$$\sum_{e:vIe} x_e = 1,$$

továbbá csúcshalmaza páros elemszámú.

- Korábbi levezetásünk megismételhető (most egyenlőségekkel):

$$2 \sum_{e=xy\in E:x,y,\in S} x_e + \sum_{e\in\partial S} x_e = |S|.$$

- Ismét egy kicsit változtatjuk a nyelvet: ∂S az S csúcshalmaz élhatára. Ez azonban tekinthető úgy mint az $\mathcal{V} = (S, \overline{S})$ vágás $E(\mathcal{V})$ élhalmaza. Legyen $x(\mathcal{V}) = x(E(\mathcal{V}))$. A $\mathcal{V}$ vágás páratlan vágás, ha mindkét oldala páratlan elemszámú csúcshalmaz (már feltesszük, hogy G-nek páros sok csúcsa van).

Az átfogalmazás

- Kaptuk, hogy minden páratlan $\mathcal{V}$ vágásra

$$x(\mathcal{V}) = |S| - 2x(S) = 2\left(\frac{|S|-1}{2} - x(S)\right) + 1.$$

Azaz

$$\frac{|S|-1}{2} - x(S) = \frac{x(\mathcal{V})-1}{2}.$$

- Ez alapján akkor és csak akkor teljesül minden (E_S) egyenlőtlenség, ha minden $\mathcal{V}$ páratlan vágás élhalmazának x-súlya legalább 1.

2. Cél

Adott egy (G, x), nemnegatív élsúlyozott, páros pontszámú gráf. Hatékonyan határozzuk meg a minimális súlyú páratlan vágást.

- Ha a 2. Cél megoldható, akkor az Edmonds-politóp tesztelési problémája is.

Kapcsolódó vágási problémák

- Ha $\min\limits_{\mathcal{V}\text{ vágás}} x(\mathcal{V})$-t keressük, akkor ezt egyszerű megoldani a folyamok elméletének segítségével.
- Viszont, ha $\min\limits_{\mathcal{V}=(S,T),|S|=|T|} x(\mathcal{V})$-t keressük, az már $\mathcal{NP}$-teljes probléma.
- Így, ha $\mathcal{V}$-ről páratlan elemszámúságot teszünk fel, akkor kérdésünk nehézsége nem világos.
- Ha csúcshalmazunk páratlan elemszámú, akkor minden vágás valamelyik oldala páratlan lenne. Így a páratlan csúcshalmazok közül a minimális súlyú meghatározása az összes részhalmaz közötti kereséssel lenne ekvivalens.

Az új probléma

Tehát az alapproblémát ($\mathcal{MP}(G)$ tesztelése) visszavezettük a minimális súlyú páratlan vágás meghatározására (vagy egy súlyozott határ minimalizálásra páratlan halmazok között):

Minimalizáljuk	$w(\mathcal{V})$-t
Feltéve, hogy	$\mathcal{V}$ páratlan vágás

- Legyen adott egy G gráf és egy w nemnegatív élsúlyozás, $n = |V(G)|$ páros.
- A legkisebb súlyú (a keresztélek összsúlya legyen minimális) páratlan vágást (mindekét partja páratlan sok csúcsot tartalmaz) keressük.
- A kiinduló LP nyelvezet a súlyozásra az x jelölést tette természetessé. A súly (angolul weight) jelölésére azonban a w a legmegszokottabb. Most áttérünk erre.
- Ennek hatékony megoldása egy új fogalom bevezetését kívánja.

Gomory—Hu-fa

Tekintsünk egy F fát $V(G)$-n. Ekkor F-nek $n-1$ db éle van, és vegyük észre, hogy bármelyik élét letörölve F két komponensre esik szét. Ha e volt a törölt él, akkor legyenek ezek csúcshalmazai S_e, és T_e. Ekkor $\mathcal{V}_e = (S_e, T_e)$ vágás.

Definíció

Az F fa egy *Gomory—Hu-fa*, ha minden $e = xy \in E(F)$ esetén az (S_e, T_e) vágás w-optimális xy vágás G-ben, azaz

$$\min_{(S,T)\ xy\ \text{vágás}} w(\partial S) = w(\partial S_e)$$

A T fa G csúcshalmazán egy gráf. Azonban éleinek „semmi” köze G-hez. Nem szükségszerűen részgráf.

Mire jó a Gomory—Hu-fa?

Azaz egy F fa Gomory—Hu-tulajdonsága $n-1$ feltételből tevődik össze. F minden élére van egy feltétel. Ez az $n-1$ feltétel egy-egy vágás optimalitása.

A definícióben explicit optimalitásokon túl további információk is kiolvashatók egy Gomory—Hu-fából.

Igazából $\binom{n}{2}$ optimális vágásunk van

Lemma

Ha adott egy F Gomory—Hu-fa, akkor minden $x, y \in V$ csúcspárra az F által meghatározott $n-1$ vágás között lesz minimális xy vágás is.

Legyen $x, y \in V$ tetszőleges. Ekkor létezik egyetlen P xy út F-ben. Legyenek ezen útban lévő élek: $e_1, e_2, \ldots, e_\ell$, és ezen élekhez tartozó vágások $\mathcal{V}_1, \mathcal{V}_2, \ldots, \mathcal{V}_\ell$.

Észrevétel

$\mathcal{V}_1, \mathcal{V}_2, \ldots, \mathcal{V}_\ell$ mindegyike elválasztja x-et és y-t.

Legyen $\mathcal{V}$ a minimális súlyú vágás $\mathcal{V}_1, \mathcal{V}_2, \ldots, \mathcal{V}_\ell$ közül, ami xy vágás.

Erősebb Lemma

$\mathcal{V}$ egy optimális xy vágás.

Erősebb Lemma bizonyítása

Tegyük fel (indirekt bizonyítás), hogy $\mathcal{V}_{opt}$ minimális súlyú xy vágás, és

$$w(\mathcal{V}_{opt}) < w(\mathcal{V})$$

Ekkor van olyan e_i él, melynek két vége V_{opt} különböző partjára esik.

De mivel F Gomory—Hu-fa, ezért $\mathcal{V}_i$ optimális vágás, ami e_i két végét szeparálja.

Tehát

$$w(\mathcal{V}_{opt}) \geq w(\mathcal{V}_i) \geq w(\mathcal{V}),$$

ami ellentmondás.

Ez az állítást és egyben a lemmát igazolja.

További információk egy Gomory—Hu-fában

Legyen (G, w) és F Gomory-Hu-fa adott. Ez meghatároz $n-1$ darab vágást, az összes párra van optimális szeparáló vágás.

Feltettük, hogy $|V|$ páros: Van páros-páros és páratlan-páratlan vágás is. (Ha $|V|$ páratlan lenne, akkor minden vágás páros-páratlan lenne.)

Megjegyzés

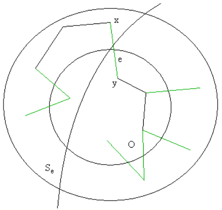
Minden F fára az él vágások közt lennie kell páratlan-páratlan vágásnak. Valóban egy levélre illeszkedő élnek megfelelő vágás egyik oldala 1, másik $n-1$ csúcsot tartalmaz.

Tétel

Az F-ben rejlő $n-1$ darab vágás közt ott van a legkisebb súlyú páratlan-páratlan vágás.

A Tétel bizonyítása

Legyen O egy optimális páratlan halmaz.



$V(G) = V(F)$. Minden $e \in \partial_F O$-ra vegyük az F fában rejlő $\mathcal{V}_e = (S_e, T_e)$ vágást, ahol S_e az e O-n kívüli csúcsát tartalmazza.

A továbbiakban használjuk az $S_{\overrightarrow{e}}$ jelölést, ahol $e \in E(F)$. e meghatároz (F-fel) egy vágást, S azon oldala ennek a vágásnak, amely azt a csúcsot tartalmazza, ahová $\overrightarrow{e}$ mutat. Azaz e fa-él definiál egy vágást. Az irányítás megmutatja melyik oldalra hivatkozunk „S halmazként"

Erősebb tétel

$w(\mathcal{V}_e) \leq w(\partial_F O)$, mert $\mathcal{V}_e$ optimális xy vágás, O (optimális páratlan halmaz, egyben) xy vágás.

Erősebb Tétel

Az S_e-k között van páratlan halmaz.

Megjegyzés

Az erősebb Tételből következik a Tétel.

Valóban. Tudjuk, hogy $w(\mathcal{V}_e) \leq w(\partial_F O)$. Ha S_e páratlan, akkor $\mathcal{V}_e$ is egy optimális páratlan vágás (ahogy O).

Az Erősebb Tétel bizonyítása

$$\sum_{e\in\partial_F O} |S_{\overrightarrow{e}}| \underset{(\text{mod } 2)}{\equiv} \sum_{\substack{x\in O,\ e\in E(F),\\ \overrightarrow{e} \text{ kifelé irányított } x\text{-ből}}} |S_{\overrightarrow{e}}| =$$

$$= \sum_{x\in O} \sum_{\substack{e\in \mathrm{E}(F)\\ \overrightarrow{e}=\overrightarrow{xu}}} |S_{\overrightarrow{e}}| = \sum_{x\in O} (|V|-1) \underset{(\text{mod } 2)}{\equiv} 1.$$

Az első kongruencia azért igaz, mert a szummához adott extra tagok párokban jönnek (egy O-beli e élre $\overrightarrow{e}$ és $\overleftarrow{e}$) és minden pár hozzájárulása $|V|$, páros.

A második kongruencia azért igaz, mert páratlan sok páratlan számot adtunk össze.

Hol tartunk?

- Bevezettük a Gomory—Hu-fa fogalmát.
- Ha ismerünk egy Gomory—Hu-fát egy páros pontszámú gráfban, akkor könnyű kiolvasni egy optimális páratlan vágást.
- Ekkor tesztelni tudjuk a nemnegatív súlyozás $\mathcal{MP}(G)$-hez tartozását, amennyiben minden csúcs körül 1 súlyösszeg van.
- Ez alapján hatékonyan tesztelhető minden $\mathbb{R}^{E(G)}$-beli vektor.

3. Cél≡ Gomory—Hu-tétel

Minden G, w-hez létezik F Gomory—Hu-fa, és egy ilyen polinomiális időben kiszámolható.

Következmény

Adott G gráf és $w \in \mathbb{Q}^{\mathrm{E}(G)}$. Létezik polinomiális algoritmus, ami eldönti, hogy w eleme-e $\mathcal{MP}(G)$-nek; ha nem, akkor ad egy Edmonds-feltételt, amit megsért w.

Szünet

Bevezető Lemma

Lemma

Az $f = w \circ \partial : \mathcal{P}(V) \to \mathbb{R}_+$ leképezés

(i) szimmetrikus, azaz $f(S) = f(\overline{S}) \quad \forall S \subseteq V$,

(ii) szubmoduláris, azaz
$f(S) + f(T) \geq f(S \cap T) + f(S \cup T) \quad \forall S, T \subseteq V$,

(iii) pozimoduláris, azaz
$f(S) + f(T) \geq f(S \setminus T) + f(T \setminus S) \quad \forall S, T \subseteq V$.

Bizonyítás

(i): A szimmetria világos, mivel $\partial S = \partial\overline{S}$.

(ii): A szubmodularitás is teljesül: Mindkét oldalon súlyokat összegzünk. A bal oldali kifejezésben minden él legalább annyiszor van számolva mint a jobb oldalon (eset analízissel adódik). A súlyok nem-negatívok, így az egyenlőtlenség igaz.

(iii): A pozimodularitás következik az előző két tulajdonságból:

$$f(S)+f(T) = f(S)+f(\overline{T}) \geq f(S\cap\overline{T})+f(S\cup\overline{T}) = f(S\setminus T)+f(\overline{T \setminus S}) =$$

$$= f(S \setminus T) + f(T \setminus S).$$

A Főlemma

Főlemma

Legyen $\mathcal{V}$ egy xy optimális vágás és x', y' csúcsok. Ekkor létezik egy $\mathcal{V}'$ $x'y'$ vágás, ami $x'y'$ optimális vágás, továbbá $\mathcal{V}$ és $\mathcal{V}'$ nem kereszteződő vágások.

Definíció

Az (S, T) és az (S', T') vágások kereszteződő vágások, ha $S \cap S', S \cap T', T \cap S', T \cap T' \neq \emptyset$.

Ami ezzel ekvivalens, hogy az (S, T) és az (S', T') vágások nem kereszteződő vágások, ha $S \subseteq S'$ vagy $S' \subseteq S$ vagy $S \cap S' = \emptyset$.

A főlemma bizonyítása

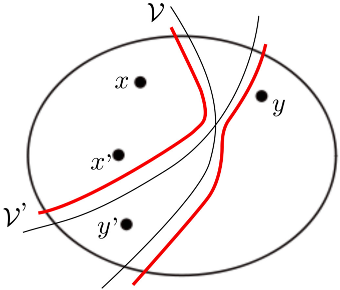
Legyen $\mathcal{V}'$ egy tetszőleges $x'y'$ optimális vágás. Tegyük fel, hogy $\mathcal{V}$ és $\mathcal{V}'$ kereszteződő vágások. Két eset állhat fent.

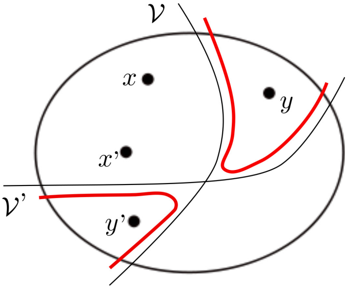
1. eset: x', y' $\mathcal{V}$ ugyanazon oldalán van (feltehető, hogy ez x oldala). Nevezzük el x'-t és y'-t úgy, hogy $\mathcal{V}'$-nek x-szel azonos oldalára x' essen.

2. eset: x', y' $\mathcal{V}$ különböző oldalára esik (feltehető, hogy x' az x oldalára esik).

A főlemma bizonyítása: 1. eset

Itt lehetséges még két aleset (fenti ábrák) attól függően, hogy $\mathcal{V}'$ az x és y csúcsokat elvágja-e vagy sem.





Az ábrán pirossal jelölt vágások közül az egyik xy vágás (ez legyen $\mathcal{V}^*$), a másik $x'y'$ vágás (ez legyen $\mathcal{V}^{**}$).

A főlemma bizonyítása: 1. eset (folytatás)

Ekkor a szubmodularitás, illetve a pozimodularitás (attól függően, hogy melyik alesetben vagyunk és hogy nevezzük el az S-oldalakat) miatt

$$f(\mathcal{V}) + f(\mathcal{V}') \geq f(\mathcal{V}^*) + f(\mathcal{V}^{**})$$

Azonban egyenlőségnek kell fennállnia, mivel $\mathcal{V}$ és $\mathcal{V}'$ optimális/minimális vágások voltak és „feladatukat" $\mathcal{V}^*$ és $\mathcal{V}^{**}$ is elvégzi. Tehát

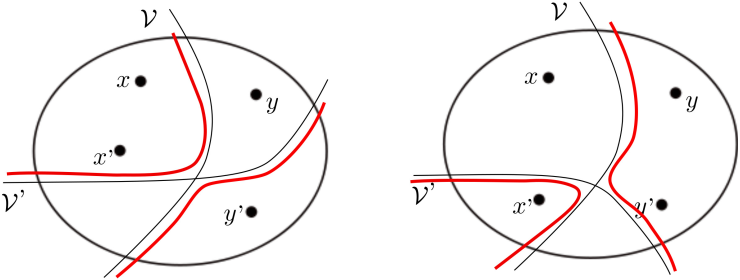
$$f(\mathcal{V}') = f(\mathcal{V}^{**})$$

és $\mathcal{V}^{**}$ nem keresztezi $\mathcal{V}$-t, tehát $\mathcal{V}^{**}$ teljesíti a kívántakat.

A főlemma bizonyítása: 2. eset

Ha $\mathcal{V}'$ elválasztja x-t és y-t, akkor $\mathcal{V}'$ választható $\mathcal{V}$-nek, és készen vagyunk (egy vágás saját magával nem kereszteződő).

Ha pedig $\mathcal{V}'$ nem választja el x-t és y-t, akkor hasonlóan, mint az 1. esetben található egy másik $x'y'$ optimális vágás, ami nem keresztezi $\mathcal{V}$-t:



Figure

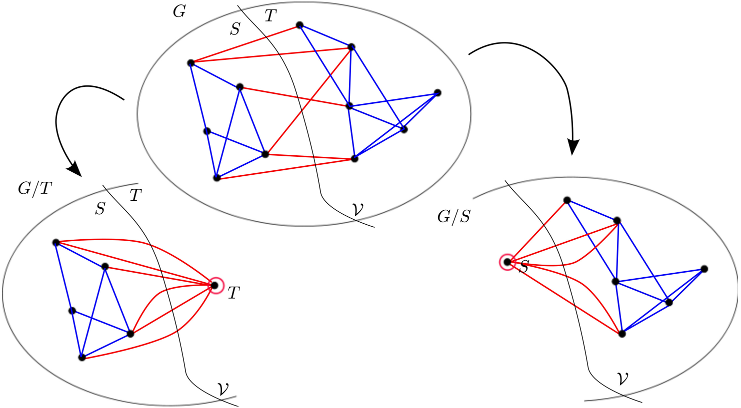
Algoritmusunk kezdete: szabdalás

Válasszunk tetszőlegesen két csúcsot, legyenek ezek x és y. Határozzunk meg az optimális xy vágást. Legyen ez (S, T) úgy, hogy $x \in S$ és $y \in T$.

G-t *két részre szabdaljuk*: G/T legyen az a gráf, amelynek csúcsai az S-beli csúcsok plusz egy m_T metacsúcs, ami T-t reprezentálja, élei pedig az S-n belüli élek plussz ∂S-beli élek úgy, hogy az adott S-beli csúcsot nem az eredeti T-beli végpontjával, hanem m_T-vel köti össze.

G/S definíciója hasonló, csak itt m_S az új metacsúcs.

Szabdalás ábrán



Figure

Az algoritmus: Rekurzív szabdalás

Végül a két részt egy m metaéllel összekötjük, ami m_T-re és m_S-re illeszkedik.

Majd a két rész tovább szabdaljuk, amíg lehet:

Gomory—Hu-algoritmus: Rekurzív szabdalási algoritmus

Elvégezzük a kezdeti szabdalást.

Amíg egy részben van legalább 2 eredeti csúcs, **addig** tovább szabdaljuk (a szabdalást leíró x és y csúcs mindig eredeti csúcs).

A Gomory—Hu-algoritmus képen

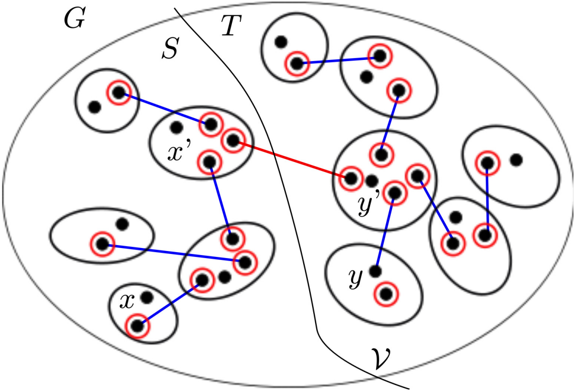


Figure: A metacsúcsok a pirossal karikázott csúcsok, a köztük haladó élek a metaélek. x és y definiálta az erdeti $\mathcal{V}$ vágást. A kiszámított fából egyetlen él halad ezen vágásban. Ez nem szükségszerűen az xy él.

Mi az output?

- A rekurzió végén a gráfot szétszabdaltuk részekre úgy, hogy minden részben pontosan egy eredeti csúcs szerepel.
- Azaz az algoritmus által kiszámított részek azonosítottak a csúcsokkal.
- A metaélek különböző csúcsoknak megfelelő részeket kötnek össze.
- Így a metaélek felfoghatók mint az erdeti csúcsok közötti élek.
- Ezek a metaélek alkotják a kiszámolt gráfot (a G gráf csúcshalmazán).

Hol a fa? . . . Megvan a fa!

Észrevétel

A Gomory—Hu-algoritmus által kiszámolt gráf egy fa.

Valóban:

- Egy $n-1$ élű gráfot számolunk ki n csúcson.
- A rekurzióból világos (indukcióval formálisan is igazolható), hogy összefüggő gráf lesz outputunk.

A Gomory—Hu-algoritmus helyessége

Tétel

A Gomory—Hu-algoritmus által kiszámolt fa egy Gomory—Hu-fa.

A Tétel állítása annak igazolása, hogy minden metaél által definiált vágás egy optimális szeparációja a két végpontjának. Azaz $n-1$ állítást kell igazolnunk.

Grágunk vágásai az alapvágáshoz képest

Legyen $\mathcal{V}$ az első szabdaláshoz tartozó vágás. G vágásai következőképpen csoportosíthatóak:

1. $\mathcal{V}$-vel kereszteződőek,
2. $\mathcal{V}$-vel nem kereszteződő $\mathcal{V}'$ vágások:
   a) $\mathcal{V}' = \mathcal{V}$
   b) $\mathcal{V}' = (S', T'),\ S' \subsetneq S$
   c) $\mathcal{V}' = (S', T'),\ T' \subsetneq T$

Észrevétel

G/T vágásai azonosíthatók/párbaállíthatók $\mathcal{V}$-vel és 2.b) típusú vágásokkal. G/S vágásai azonosíthatók/párbaállíthatók $\mathcal{V}$-vel és 2.c) típusú vágásokkal. G/S-ben és G/T-ben ott van G összes olyan vágása, ami nem keresztezi $\mathcal{V}$-t (más nincs).

A helyesség igazolása: indukció

- Indukciót végzünk, rekurzíven bizonyítunk.
- Az indukció elindulása nyilvánvaló.
- Az $n-1$ állításból $(|S|-1)+(|T|-1)=|V|-2=n-2$ él a G/S, illetve G/T Gomory—Hu-fájából jön. Ezekre tudjuk a rekurzió alapján a G/S, illetve G/T gráfokra vonatkozó optimalitást.

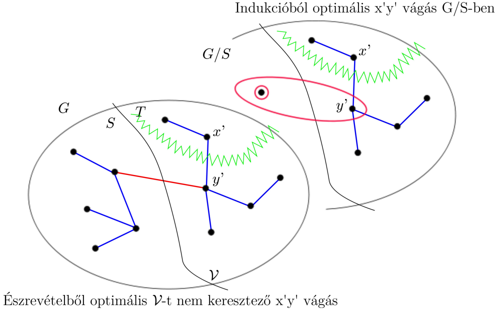
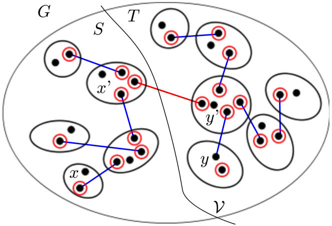


Figure: A főlemma alapján $x'y'$ (és így az összes kék él) teljesíti a Gomory—Hu-fától elvártakat

A főél

Az egyetlen probléma a piros él (az első szabdalásból eredő él).

A Gomory—Hu-fa keresztéle $x'y'$. Ez az egyetlen él F-ben, amire még nem tudjuk az állítást. A probléma, hogy a kiinduló $\mathcal{V}$ vágást egy optimális xy vágásnak választottuk. A szabdalás azonban egy $x'y'$ keresztélhez vezetett és $x \neq x'$, $y \neq y'$ lehetséges.



A metacsúcsok a pirossal karikázott csúcsok, a köztük haladó élek a metaélek. x és y definiálta az erdeti $\mathcal{V}$ vágást. A kiszámított fából egyetlen él halad ezen vágásban. Ez nem szükségszerűen az xy él.

Az egyetlen hátramaradt állítás

Állítás

$x'y'$ él vágása $(S, T) = \mathcal{V}$ (ami w-optimális xy vágásnak lett választva) w-optimális $x'y'$ vágás is.

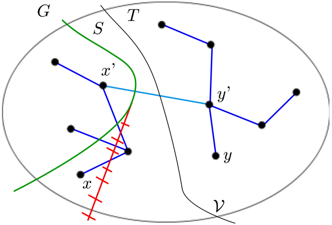
Indirekten bizonyítjuk az állítást. Tegyük fel, hogy létezik olyan $\mathcal{V}'$ w-optimális $x'y'$ vágás, amelyre $w(\mathcal{V}') < w(\mathcal{V})$.

A főlemmából következik, hogy $\mathcal{V}' = (S', T')$ választható úgy, hogy $S' \subset S$ vagy $T' \subset T$. Feltehető, hogy $S' \subsetneq S$.

Az egyetlen hátramaradt állítás bizonyítása (folytatás)

Észrevétel

Nem lehet, hogy $\mathcal{V}'$ ne válassza el x-et és x'-t.



Figure

Azaz nem lehet, hogy x és x' ugyanazon az oldalon legyen, míg a másik oldalon van a teljes T, így y is.

Ekkor $\mathcal{V}'$ xy vágás lenne, ami ellentmondás. $\mathcal{V}'$ elválasztja x-et és x'-t.

Az egyetlen hátramaradt állítás bizonyítása (folytatás)

Észrevétel

G/T-nek a Gomory-Hu-fájában ott van egy $\mathcal{V}''$ optimális xx' vágás.

A $\mathcal{V}''$ vágás egyik oldalán ott van x, másik oldalán ott van x' és vele együtt a m_T metacsúcs (x' és m_T végig együtt marad a szabdalások után, így lett F keresztéle x'-re illeszkedő).

Kezdeti észrevételünk alapján $\mathcal{V}''$-nek megfelel egy $\widetilde{\mathcal{V}''}$ vágás G-ben. A fentiek alapján ez egy xy vágás, w-súlya kisebb mint $\mathcal{V}$-é, ellentmondás.

Az ellentmondás igazolja az állítást, ami az egyetlen hiányzó rész volt a Gomory—Hu-algoritmus helyességének bizonyításából.

Összefoglalás

Gomory—Hu-tétel

Minden (G, w)-hez létezik F Gomory-Hu-fa, és ez kiszámolható $n-1$ darab minimális st vágás meghatározásával, ami a folyam algoritmus $n-1$-szeres alkalmazásával megoldható. Speciálisan a Gomory—Hu-algoritmus polinomiális.

Vége van!

Köszönöm a figyelmet!