Egész politópok

Hajnal Péter

2021. tavasz

IP feladatok LP relaxációja

Definíció

Az alábbi egész értékű optimalizálási (IP) feladatból

Minimalizáljuk	$c^{\mathsf{T}}x$-t
Feltéve, hogy	$x \in \mathcal{P}$
	$x \in \mathbb{Z}^n$

elhagyjuk az $x \in \mathbb{Z}^n$ feltételt. Ezzel a feladattal szoros kapcsolatban lévő

Minimalizáljuk	$c^{\mathsf{T}}x$-t
Feltéve, hogy	$x \in \mathcal{P}$

LP feladatot kapunk. Ezt az eredeti IP feladat LP relaxációjának nevezzük.

IP feladat és LP relaxációjának kapcsolata

- Az IP feladat nagyon általános. $\mathcal{NP}$-teljes problémák könnyen megfogalmazhatók benne. Nem várható, hogy általában hatékonyan megoldható lenne.
- Az LP problémák viszont hatékonyan kezelhetők.
- Általában ez a relaxáció valódi egyszerűsítés. Ennek ellenére ez is adhat hasznos információt a kiinduló feladatról.

Észrevétel

Ha a kiinduló IP feladat otimuma p_I^*, az LP relaxációé p^*, akkor

$$p^* \leq p_I^*.$$

- Az LP relaxáción keresztül könnyen kiszámítható alsó becslést kapunk az optimális értékre.

Egész poliéderek

Definíció

$\mathcal{P} = \{x\colon Ax \preceq b\}$ rendes poliéder egész, ha $\mathrm{ext}(\mathcal{P}) \subseteq \mathbb{Z}^n$, azaz minden extremális pontja egész koordinátájú, továbbá $A \in \mathbb{Q}^{k\times n}$, $b \in \mathbb{Q}^k$.

- Politópok esetén az előző definíció ekvivalens azzal, hogy $\mathcal{P}$ politóp egész, ha véges sok $\mathbb{Z}^n$-beli pont konvex burka.

- A fentiekből ha az IP feladat folytonos feltételei által definiált $\mathcal{P}$ poliéder egész, akkor az LP relaxáció optimális helyei között lesz egész koordinátájú (hiszen a $\mathcal{P}$ csúcsai ilyenek). Azaz ebben az esetben $p_I^* = p^*$.

Feltételek, amelyek az egész tulajdonságot garantálják I

Edmonds—Giles-tétel

$\mathcal{P} = \{x\colon Ax \preceq b\} \neq \emptyset$ poliéder, $A \in \mathbb{Q}^{k\times n}$, $b \in \mathbb{Q}^k$. Ekkor a következők ekvivalensek:

(i) $\mathcal{P}$ poliéder egész (azaz $\mathrm{ext}(\mathcal{P}) \subseteq \mathbb{Z}^n$) .

(ii) Minden $c \in \mathbb{R}^n$ célvektor esetén

Minimalizáljuk	$c^{\mathsf{T}}x$-t
Feltéve, hogy	$x \in \mathcal{P}$

LP feladatra vagy $p^* = -\infty$ vagy van $\mathbb{Z}^n$-beli optimumhelye.

(iii) Minden $c \in \mathbb{Z}^n$-re

Minimalizáljuk	$c^{\mathsf{T}}x$-t
Feltéve, hogy	$x \in \mathcal{P}$

optimális értéke $-\infty$ vagy egész.

Bizonyítás

(iii)$\Rightarrow$(i)

• Legyen $e \in \mathrm{ext}(\mathcal{P})$, ami azt jelenti, hogy van olyan $\nu \neq 0 \in \mathbb{R}^n$, és $\tau \in \mathbb{R}$, hogy

$$(\star) \qquad \mathcal{P} \subset \{x\colon \nu^\mathsf{T} x \geq \tau\} \text{ és } \nu^\mathsf{T} e = \tau.$$

• A ν normálvektor nem egyértelmű. Nyilván szorozható pozitív számmal és új lehetséges ν-t kapunk (új τ-val). Geometrialig „érezhető" és egyszerűen belátható, hogy egy alkalmas pozitív ε esetén egy lehetséges ν-höz legfeljebb ε távolságra lévő vektorok is jók normálvektornak.

• Ezen két megjegyzés alapján van olyan $\nu \in \mathbb{Z}^n$ vektor, hogy ν és a $\nu + e_i$ vektorok is alkalmasak legyenek $(\star)$ kielégítésére, ahol e_i-k a standard n dimenziós egységvektorok ($e_i = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0)^\mathsf{T}$).

Bizonyítás (folytatás)

- A ν és az $(\nu + e_i)$-k lehetséges c értékek a tétel (iii) feltételében.

- Továbbá a hozzájuk tartozó optimális értékek $\nu^\mathsf{T} e$ és $(\nu + e_i)^\mathsf{T} e$.

- Valóban. Ha $\nu^\mathsf{T} x$-et minimalizáljuk $\mathcal{P}$-n, akkor legalább akkora értéket kapunk mintha a $\mathcal{P}$-t tartalmazó $\{x\colon \nu^\mathsf{T} x \geq \tau\}$ félteren optimalizálnánk. Azaz a minimum érték legalább τ, ami fel is vevődik az e csúcsban.

- Tehát (iii) alapján az $\nu^\mathsf{T} e$ és $(\nu + e_i)^\mathsf{T} e$ optimális értékek egészek.

- Speciálisan $e \in \mathrm{ext}(\mathcal{P})$ i-edik koordinátája: $e_i^\mathsf{T} e = (\nu + e_i)^\mathsf{T} e - \nu^\mathsf{T} e$ is egész.

- Tehát e tetszőleges komponense egész, azaz e egész vektor.

Szünet

Feltételek, amelyek az egész tulajdonságot garantálják II: Totálisan unimoduláris mátrixok

Definíció

$M \in \mathbb{R}^{k\times n}$ totálisan unimodulárisnak (röviden TU) nevezzük, ha minden N négyzetes részmátrixára teljesül, hogy $\det N \in \{-1, 0, 1\}$.

• Speciálisan egy TU mátrix minden 1×1 méretű részmátrixának determinánsa is 0 vagy ± 1. Azaz elemei csak -1, 0 vagy 1 értékűek lehetnek.

Tétel

Ha $A \in \mathbb{R}^{k\times n}$ totálisan unimoduláris mátrix és $b \in \mathbb{Z}^k$, akkor $\mathcal{P} = \{x \in \mathbb{R}^n \colon Ax \preceq b\}$ egész poliéder.

Bizonyítás

- Legyen $e \in \mathrm{ext}(\mathcal{P})$. Speciálisan $e \in \mathcal{P}$ és azon egyenlőtlenségek, amelyeket e élessé tesz olyanok, hogy bal oldalain szereplő vektrok kifeszitík $\mathbb{R}^n$-et.
- Azaz A-nak vennak olyan sorai: $a_{i_1}^\mathsf{T}, \ldots, a_{i_n}^\mathsf{T}$, melyek lineárisan függetlenek és

$$\begin{aligned} a_{i_1}^\mathsf{T} e &= b_{i_1} \\ &\vdots \\ a_{i_n}^\mathsf{T} e &= b_{i_n}. \end{aligned}$$

- Ebből (A és b ismeretében) e kifejezhető a Cramer-szabály segítségével.

Az egyes koordináták számolásánál egész számokkal dolgozunk, és egyetlen osztás fordul elő. Az osztó az A mátrix egy négyzetes almátrixának determinánsa. Az almátrix nem elfajuló, azaz a determináns nem lehet 0. Tehát értéke -1 vagy 1. Az ezzel való osztás pedig szintén nem vezet ki az egészek köréből.

TU mátrixok: Példa I

- G hurokél-nélküli gráf pont-él illeszkedési mátrixa az a $\mathcal{B}_G$ mátrix, amely sorai a csúcsokkal, oszlopai az élekkel azonosítottak és egy $v \in V$ csúcs sorának és egy $e \in E$ éloszlopának talákozásánál

$$(\mathcal{B}_G)_{v,e} = \begin{cases} 1, & \text{ha } v \text{ illeszkedik } e\text{-re}, \\ 0, & \text{különben.} \end{cases}$$

- Vegyük észre, hogy $\mathcal{B}_G$ minden oszlopa pontosan két nem-0 elemet tartalmaz, két darab 1-est.

- Legyen G egy három pontú teljes gráf: Ekkor

$$\mathcal{B}_{K_3} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

- A teljes mátrix önmaga egy négyzetes részmátrixa. Mivel $\det \mathcal{B}_{K_3} = 2$, ezért $\mathcal{B}_{K_3}$ nem TU.

TU mátrixok: Példák II

- Így ha G tartalmaz három elemű klikket, akkor $\mathcal{B}_G$ tartalmazza a fenti részmátrixot, speciálisan nem TU.
- Hasonlóan megmutatható, hogy egy páratlan hosszú kör pont-él illeszkedési mátrixa (ami négyzetes) szintén 2 determinánsú.
- Speciálisan, ha egy gráf tartalmaz páratlan hosszú kört feszítve (ami azzal ekvivalens, hogy nem páros), akkor pont-él illeszkedési mátrixa nem TU.
- Látni fogjuk, hogy ha G páros gráf, akkor B_G egy TU mátrix.

TU mátrixok: Példák III

Példa

$\overrightarrow{G}$ hurokélmentes irányított gráf. Ekkor a $\overrightarrow{G}$ gráf $\mathcal{D}$ pont-él illeszkedési mátrixának egy $\mathcal{D}_{v,e}$ eleme (a v sorának és e él oszlopának talákozásában álló elem) a következő:

$$\mathcal{D}_{v,e} = \begin{cases} +1, & \text{ha a pontba "befut" az él} \\ -1, & \text{ha a pontból „kifut" az él} \\ 0, & \text{különben.} \end{cases}$$

Látható, hogy $\mathcal{D}_G$ minden oszlopában egy darab 1-es és egy darab (-1)-es szerepel, a többi elem 0.

- Látni fogjuk, hogy tetszőleges G irányított gráfra $\mathcal{D}_G$ mátrix totálisan unimoduláris.

TU mátrixok: Operációk

Lemma

Legyen A totálisan unimoduláris mátrix. Képezzük A-ból $\widetilde{A}$-t a következő szabályok/operációk alkalmazásaval:

(i) Sorok/oszlopok -1-gyel való szorzása.

(ii) Sorok/oszlopok elhagyása.

(iii) Egy létező sorok/oszlopok megismétlése.

(iv) e_i sorok/oszlopok hozzáadásával, ahol e_i egy darab nem nulla elemet tartalmaz, ami 1-es.

(v) Transzponálás.

Ekkor az így kapott $\widetilde{A}$ mátrix is totálisan unimoduláris.

TU mátrixok: Példák és bizonyításuk

Tétel

(i) Legyen G egy tetszőleges páros gráf. Ekkor $\mathcal{B}_G$ egy TU mátrix.

(ii) Legyen $\overrightarrow{G}$ egy tetszőleges irányított gráf. Ekkor $\mathcal{D}_{\overrightarrow{G}}$ egy TU mátrix.

• A két állítást egy ideig párhuzamosan igazoljuk. k-ra vonatkozó teljes indukcióval bizonyítunk.

• $k = 1$-re teljesül az állítás, hiszen mindkét mátrix elemei a $\{-1, 0, 1\}$ halmazból kerülnek ki.

• Indukcós lépés. Tegyük fel, hogy k-nál kevesebb sorú négyzetes almátrixokról tudjuk, hogy determinánsuk ± 1 vagy 0. Legyen N egy $k \times k$ méretű részmátrix. Erre is igazolnunk kell, hogy determinánsának értéke ± 1 vagy 0.

Bizonyítás (folytatás): 3 eset

1. eset: N egyik oszlopa csak 0-kat tartalmaz. Ekkor $\det N = 0$ és készen vagyunk.

2. eset: N valamelyik oszlopa egyetlen nem-0 értéket és 0-kat tartalmaz. Tudjuk, hogy a nem-0 elem -1 vagy 1 (a páros esetben csak 1 lehet a nem-0 elem). Ekkor van erre az oszlopra vonatkozó kifejtés és az indukciós feltevés adja az álítást.

3. eset: A fenti két eset komplementere. A kétféle mátrix esetében ez azt jelenti, hogy minden oszlopban pontosan két nem-0 elem szerepel.

A bizonyítás most kétfelé ágazik. $\mathcal{D}_{\overrightarrow{G}}$ esetén tudjuk, hogy a sorok összege a 0 vektor lesz. $\mathcal{B}_G$ esetén tudjuk, hogy az alsó csúcsoknak megfelelő sorok és a felső csúcsoknak megfelelő sorok összege is a csupa 1 vektor lesz. Mindkét esetben egy nem triviális lineáris összefüggés van a sorok között. Azaz a determináns 0, készen vagyunk.

Következmények: Súlyozott párosítási probléma

A súlyozott párosítási probléma

Adott egy G gráf egy $c : E(G) \to \mathbb{R}_+$ élsúlyozással.

Keressünk maximális súlyú párosítást, ahol egy M párosítás/élhalmaz súlya $\sum_{e:e\in M} c(e)$.

Következmény

Súlyozott párosítási probléma páros gráfokra megoldható LP algoritmussal.

Következmények: Súlyozott párosítási probléma mint IP

- A c súlyfüggvényt $c \in \mathbb{R}^{E(G)}$ vektorral azonosítva/kódolva a probléma a következő

Minimalizáljuk	$c^T x$-t	
Feltéve, hogy	$\sum_{e:v\text{I}e} x_e \leq 1,$	$\forall\, v \in V$
	$0 \leq x_e,$	$\forall\, e \in E$
	$x_e \in \mathbb{Z},$	$\forall\, e \in E$

egész értékűségi feltételekkel bővített LP feladattal a ekvivalens.

- Ennek LP relaxációja kapjuk, ha az $x_e \in \mathbb{Z}$ feltételeket elhagyjuk:

Minimalizáljuk	$c^T x$-t
Feltéve, hogy	$\sum_{e:v\text{I}e} x_e \leq 1,$
	$x_e \geq 0.$

Következmények: Súlyozott párosítási probléma: LP relaxáció

• Ez már egy LP feladat és mátrixa totálisan unimoduláris HA G PÁROS.

• Valóban. A mátrix lényeges része a páros gráf pont-él illeszkedési mátrixa. erről láttuk a TU tulajdonságot. A teljes mátrix TU tulajdonsága könnyen adódik ebből.

• Így az LP relaxáció politópjának csúcsai egész koordinátájúak, azaz párosítások karakterisztikus vektorai.

• Azaz az LP relaxáció ekvivalens az eredei alakkal. Egy LP feladat sokféle módszerrel hatékonyan kezelhető.

Következmények: Hálózatok

Tétel

Ha egy hálózatban minden élkapacitása egész, akkor van benne olyan optimális folyam, amelyben minden élen egész anyagmennyiség folyik.

- Ezt a tételt diszkrét matematika előadáson láttuk, igazoltuk.
- A fentiekből is adódik. A folyamprobléma algebrai leírása egy LP feladat. Mátrixa TU. Azaz politópjának csúcsai egész koordinátájú vektorok. Az optimális helyek között lesz egész is.
- A duális feladatra is el lehet ezt mondani. Az optimális duális megoldás keresésénél szorítkozhatunk az egész koordinátájú duális lehetséges megoldásokra. Ezt egyik korábbi dualizálási példánkban kihasználtuk.

Szünet

Feltételek, amelyek az egész tulajdonságot garantálják III: TDI egyenlőtlenségrendszerek

- Legyen $\mathcal{E} : Ax \preceq b$ egy egyenlőtlenségrendszer. Tegyük fel, hogy $A \in \mathbb{Q}^{k\times n}$, $b \in \mathbb{Q}^k$. Legyen $\mathcal{P} : \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \preceq b\}$ a megfelelő nemüres poliéder (megoldáshalmaz).
- Vizsgáljuk az alábbi négy $\mathcal{E}$-vel kapcsolatos optimalizálási feladatot.

$(\mathrm{P})_{\mathbb{Z}}$:	(P) :	(D) :	$(\mathrm{D})_{\mathbb{Z}}$:
Min. $c^T x$-et F.h. $Ax \preceq b$ $x \in \mathbb{Z}^n$	Min. $c^T x$-et F.h. $Ax \preceq b$	Max. $-b^T\lambda$-et F.h. $c + A^T\lambda = 0$ $\lambda \succeq 0$	Max. $-b^T\lambda$-et F.h. $c + A^T\lambda = 0$ $\lambda \in \mathbb{N}^k$

$$p^*_{\mathbb{Z}} \geq p^* = d^* \geq d^*_{\mathbb{Z}},$$

ahol $p^*_{\mathbb{Z}}, p^*, d^*, d^*_{\mathbb{Z}}$ a fenti optimalizálási feladatok optimális értékei (a megfelelő sorrendben).

Megjegyzések

- Példák adhatók $\mathcal{E}$ egyenlőtlenségrendszerre és c vektorra, hogy az első és utolsó egyenlőtlenség tetszőlegesen alakuljon az élesség szempontjából.
  - Alkalmas $\mathcal{E}$ egyenlőtlenségrendszerre és c vektorra végig egyenlőség lehet.
  - Alkalmas $\mathcal{E}$ egyenlőtlenségrendszerre és c vektorra az első egyenlőtlenség szigorú lehet, míg az utolsó egyenlőséggé válhat.
  - Alkalmas $\mathcal{E}$ egyenlőtlenségrendszerre és c vektorra az első egyenlőtlenség egyenlőséggé válhat, míg az utolsó egyenlőtlenség szigorú lehet.
  - Alkalmas $\mathcal{E}$ egyenlőtlenségrendszerre és c vektorra az első és utolsó egyenlőtlenség is szigorú lehet.

TPI rendszerek

- Más a helyzet, ha c nem fix, hanem tetszőleges $\mathbb{Z}^n$-beli vektor.

- Vannak egyenlőtlenségrendszerek, amelyekre minden $c \in \mathbb{Z}^n$ esetén $p^*_{\mathbb{Z}} = p^*$ Ezeket nevezzük *totálisan primál egész* (integer) egyenlőtlenségrendszernek: TPI rendszer.

- Így speciálisan egy TPI rendszerre (mivel $p^*_{\mathbb{Z}}$ nyilván egész, ha véges) p^* is egész (amennyiben véges).

- Tudjuk, hogy ez ekvivalens azzal, hogy $\mathcal{P}$ egész poliéder.

TDI rendszerek

Definíció

Legyen $A \in \mathbb{Q}^{k \times n}$, $b \in \mathbb{Q}^k$. Az $\mathcal{E} : Ax \preceq b$ egyenlőtlenségrendszer duál egész rendszer (TDI), ha minden $c \in \mathbb{Z}^n$-re $d^* = d^*_{\mathbb{Z}}$ (feltéve, hogy d^* véges).

- A TDI tulajdonság alaptétele azt mondja ki, ha minden $c \in \mathbb{Z}^n$ esetén egyenlőtlenségláncunkban az utolsó egyenlőtlenség egyenlőség, akkor szükségszerűen az első egyenlőtlenség is egyenlőség minden $c \in \mathbb{Z}^n$ esetén.

Edmonds—Giles-tétel

Ha $\mathcal{E} : Ax \preceq b$ TDI tulajdonságú és $b \in \mathbb{Z}^k$, akkor TPI tulajdonságú is. Így $\mathcal{P}$ egész poliéder.

Fontos megjegyzés

- Az állítás NEM a $\mathcal{P} = \{x : Ax \preceq b\}$ poliédérről szól.

Példa

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \preceq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

nem TDI.

Példa

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \preceq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

TDI.

Fontos megjegyzés (folytatás)

• Ismert, hogy minden egész poliéderhez található leíró A mátrix, b vektor, hogy $Ax \preceq b$ TDI legyen.

• Így ha egy poliéderről szeretnénk belátni, hogy egész, akkor a következő tervünk lehet:

(1) A poliédert „ügyesen" felírjuk $\{x : Ax \preceq b\}$ alakba.

(2) Belátjuk, hogy $Ax \preceq b$ egy TDI rendszer. Azaz belátjuk, hogy az

Minimalizáljuk	$b^\mathsf{T}x$-t
Feltéve, hogy	$A^\mathsf{T}\lambda = -c$
	$\lambda \succeq 0$

feladatnak minden $c \in \mathbb{Z}^n$ esetén van egész optimális helye.

(3) Következtetünk $\mathcal{P}$ egész mivoltára.

Edmonds—Giles-tétel: A bizonyítás

- Feltételünk, hogy $b \in \mathbb{Z}^k$.

- A TDI tulajdonság alapján tudjuk, hogy minden $c \in \mathbb{Z}^n$ esetén $p^* = d^* = d^*_{\mathbb{Z}}$. $b \in \mathbb{Z}^k$ miatt $d^*_{\mathbb{Z}}$ egész. Azaz p^* is egész minden $c \in \mathbb{Z}^n$-re.

- Láttuk („korábbi" Edmonds—Giles-tétel), hogy ebből következik $\mathcal{P}$ egész mivolta.

$\mathcal{MP}(G)$ párosítási politóp (G hurokélmentes)

- Vegyük a párosítások karakterisztikus vektorainak konvex burkát:

$$\mathcal{MP}(G) = \mathrm{conv}\,\{\chi_M : M \text{ párosítás}\}.$$

- Minden olyan lineáris egyenlőtlenség, ami minden χ_M vektorra teljesül (M párosítás) az a konvex burok összes elemére igaz. Ha egy féltérbe esik az összes χ_M, akkor konvex burkuk is oda esik.
- Így könnyen lehet egy „felső becslést" adni a konvex burokra:

$$\mathrm{conv}\,\{\chi_M : M \text{ párosítás}\} \subseteq \left\{x \in \mathbb{R}^{E(G)} : x_e \geq 0, \sum_{e:vIe} x_e \leq 1, v \in V(G)\right\} \subseteq \mathbb{R}^{E(G)}$$

- Ha G páros gráf, akkor egyenlőség van. Az általános esetben több egyenlőtlenség szükséges a konvex burok leírására.

Edmonds poliédertétele

Edmonds-féle poliédertétel

Legyen G tetszőleges egyszerű gráf. Ekkor

$$\mathrm{conv}\,\{\chi_M : M \text{ párosítás}\} = \{x \in \mathbb{R}^{E(G)} : \\ x_e \geq 0 \quad \forall e \in E(G) \\ \sum_{e:v|e} x_e \leq 1 \quad \forall v \in V(G) \\ \sum_{\substack{e=uv\in E(G):\\ u,v\in S}} x_e \leq \frac{|S|-1}{2} \quad \forall S \in \mathcal{O}\},$$

ahol $\mathcal{O}$ a V csúcshalmaz páratlan elemszámú részhalmazainak halmaza.

Bizonyítás: Cunningham—Marsh-tétel

- Azt kell belátnunk, hogy a jobb oldali politóp csúcsai egészek.
- Ez egyből következik az alábbi tételből

Cunningham—Marsh-tétel

A $\mathcal{MP}(G)$ Edmonds-féle leírásában szereplő egyenlőtlenségrendszer (TDI) tulajdonságú.

- Azaz tetszőleges $c \in \mathbb{Z}^n$ esetén

Minimalizáljuk	$\sum_{v\in V(G)} \lambda_v + \sum_{S\in\mathcal{O}} \frac{\lvert S\rvert-1}{2} \cdot \lambda_S$-t
Feltéve, hogy	$-c_e + \lambda_u + \lambda_v + \sum_{\substack{S\in\mathcal{O}\\ u,v\in S}} \lambda_S - \lambda_e = 0$
	$\forall e = uv \in E(G)$, továbbá $\lambda \succeq 0$.

Ekkor van egész koordinátájú optimális hely.

Szünet

Edmonds-poliédertétel II. alak

Edmonds-tétel, II. alak

$$\begin{aligned}\mathcal{PMP}(G) &= \mathrm{conv}\{\chi_M\colon M \text{ teljes párosítás}\} = \\ &= \{x \in \mathbb{R}^{E(G)}\colon \quad \begin{array}{rl} x_e \geq 0, & e \in E(G) \\ \sum_{e:v\mathrm{I}e} x_e \leq 1, & v \in V(G), \\ \sum_{\substack{e=xy\in E(G):\\ x\in S, y\notin S}} x_e \geq 1, & S \subseteq V(G), \\ & |S| \text{ páratlan}\}. \end{array}\end{aligned}$$

- $\mathcal{PMP}(G)$ a G gráf teljes párosítási politopja (angolul: perfect matching polytope).

Edmonds poliédertételének következménye

Tétel

G egy k-reguláris, k-szorosan élösszefüggő gráf páros sok csúccsal ($k > 0$). Ekkor létezik pozitív t egész, hogy

$$\chi_e(t \times G) = t \cdot k,$$

ahol $t \times G$ az a gráf, amelyet G-ből kapunk éleinek meg t-szerezésével (alternatív módon G minden éle mellé $t - 1$ „iker-példányt" teszünk).

- A tételben szereplő χ_e az élkromatikus szám: A gráf éleit színezzük úgy, hogy öszefutó élek különböző színűek legyenek, azaz egy színosztályt alkotó élek párosítást alkossanak.
- A minimális színszám, amivel ez megoldható, a gráf élkromatikus száma.

Emlékeztető

Emlékeztető: Vizing-tétel

Ha G egy egyszerű gráf, akkor

$$D(G) \leq \chi_e(G) \leq D(G) + 1,$$

ahol $D(G)$ a gráf maximális fokszámát jelöli.

- Nem egyszerű gráfokra a megfelelő felső becslés nem igaz.

Emlékeztető: Shannon-tétel

$$D(G) \leq \chi_e(G) \leq \frac{3}{2} \cdot D(G),$$

- A tétel éles: $\chi_e(t \times K_3) = 3t$, míg $D(t \times K_3) = 2t$. Azaz élek sokszorzásával a Shannon-becslés felső határáig tudunk eljutni.
- A tétel állítása: G reguláris páros pontszám esetén élsokszorozással a Shannon-becslés alsó határát érhetjük el.

Következmény: Bizonyítás

- Vegyük észre, hogy $\frac{1}{k}\cdot \underline{1} \in \mathcal{MP}(\mathcal{G})$, ahol $\frac{1}{k}\cdot \underline{1} \in \mathbb{Q}^E$ a csupa $1/k$ koordinátát tartalmazó vektor.
- Ehhez elég ellenőrizni, hogy $\mathcal{MP}(\mathcal{G})$ Edmonds-leírásának mindegyik feltételét teljesíti.
- Nyilván komponensei nemnegatívak. Minden csúcsban összefutó élekhez tartozó komponensek összege egy k tagú $1/k$ tagokat tartalmazó összeg, értéke pontosan 1.
- A harmadik típusú feltételt egy $S \in \mathcal{O}$ halmazra ellenőrizzük ($|V|$ páros, így $S \neq \emptyset, V$): Először egy tetszőleges (x_e) vektor esetén S elemeire adjuk össze az ott összefutó éleknek megfelelő komponensösszegeket:

$$\sum_{v\in S}\sum_{e:v I e} x_e = 2\sum_{e=xy:x,y\in S} x_e + \sum_{e\in\partial S} x_e.$$

Következmény: Bizonyítás (folytatás)

- Rendezve

$$\sum_{e\subseteq S} x_e = \frac{\sum_{v\in S}\sum_{e:vIe} x_e - \sum_{e\in\partial S} x_e}{2}$$

- A k-szoros élösszefüggőségből következik, hogy $|\partial S| \geq k$.
- Ha most ezt $(x_e) = \frac{1}{k}\cdot \underline{1}$ esetén alkalmazzuk, akkor a számlálóban a kivonandó tag legalább 1 (legalább k darab $1/k$ érték összege). Kapjuk a harmadik típusú ellenőrizendő egyenlőtlenséget.
- Összegezve: $\frac{1}{k}\underline{1} \in \mathcal{MP}(\mathcal{G})$

Következmény: Bizonyítás (folytatás)

- Edmonds tétele alapján tudjuk, hogy vektorunk előáll mint a politóp csúcsvektorainak konvex kombinációja:

$$\frac{1}{k}\cdot \underline{1} = \sum_{M \text{párosítás}} \alpha_M \chi_M = \sum_{M \text{párosítás}} \frac{\ell_M}{L} \chi_M,$$

ahol $\sum_{M: \text{ párosítás}} \alpha_M = 1$, $\alpha_M \geq 0$.

- A politóp csúcsai egészek, vektorunk racionális, így az α_M-ekről feltehető, hogy racionálisak, azaz $(\alpha_M) \in \mathbb{Q}^E$, azaz $L \in \mathbb{N}_+$, $\ell_M \in \mathbb{N}$.

- Összefüggésünk rendezve

$$L\cdot \underline{1} = \sum (k\cdot \ell_M)\chi_M.$$

Következmény: Bizonyítás (folytatás)

- Belátjuk, hogy ez az egyenlőség éppen azt jelenti, hogy állításunk igaz $t = L$-lel.

- Valóban, vegyük mindegyik M párosításnak $k \cdot \ell_M$ példányát. A párosítások lehetséges színosztályok.

- A fenti egyenlőség alapján minden G-beli él L-szeresen van lefedve ezen párosítások által. Azaz ezek kiadják $L \times G$ egy élpartícióját, egy jó élszínezését.

- A színigény:

$$\sum_{M \text{ párosítás}} k\ell_M = k \sum_{M \text{ párosítás}} \ell_M = kL \sum_{M \text{ párosítás}} \frac{\ell_M}{L} =$$
$$= kL \sum_{M \text{ párosítás}} \alpha_M = kL, \text{ hiszen } \sum_{M \text{ párosítás}} \alpha_M = 1.$$

Szünet

Emlékeztető: Cunningham—Marsh-tétel

- Tetszőleges $c \in \mathbb{Z}^n$ esetén

Minimalizáljuk	$\sum_{v\in V(G)} \lambda_v + \sum_{S\in\mathcal{O}} \frac{\lvert S\rvert-1}{2} \cdot \lambda_S$-t
Feltéve, hogy	$-c_e + \lambda_u + \lambda_v + \sum_{\substack{S\in\mathcal{O}\\ u,v\in S}} \lambda_S - \lambda_e = 0$
	$\forall e = uv \in E(G)$, továbbá $\lambda \succeq 0$.

Ekkor van egész koordinátájú optimális hely.

- Ekvivalens módon:

Minimalizáljuk	$\sum_{v\in V(G)} \lambda_v + \sum_{S\in\mathcal{O}} \frac{\lvert S\rvert-1}{2} \cdot \lambda_S$-t
Feltéve, hogy	$\lambda_u + \lambda_v + \sum_{\substack{S\in\mathcal{O}\\ u,v\in S}} \lambda_S \geq c_e$
	$\forall e = uv \in E(G)$, továbbá $\lambda \succeq 0$.

Ekkor van egész koordinátájú optimális hely.

Cunningham—Marsh-tétel új alak

Cunningham—Marsh-tétel

Legyen $(c_e)_{c\in E(G)} \in \mathbb{Z}^{E(G)}$ a G gráf egy tetszőleges egész élsúlyozása. Ekkor létezik olyan $(\lambda_v) \in \mathbb{R}_+^V, (\lambda_S) \in \mathbb{R}_+^{\mathcal{O}}$ megoldása

$$\lambda_u + \lambda_v + \sum_{\substack{S\in\mathcal{O} \\ u,v\in S}} \lambda_S \geq c_e \quad \forall e = uv \in E(G)$$

egyenlőtlenségeknek, amelyre

$$\sum_{v\in V(G)} \lambda_v + \sum_{S\in\mathcal{O}} \frac{|S|-1}{2}\lambda_S \leq \nu_c(G),$$

továbbá egész koordinátájú.

Cunningham—Marsh-tétel új alak: Indoklás

- A feltételrendszer a duálizált feladat feltételei a λ_e (előjel kötött) változók természetes kiküszöbölésével (ezek a cél függvényben nem szerepeltek).
- Az optimalizálás eltűnéséért a plusz feltétel felel.
- A plusz feltétel teljesülése esetén

$$\sum_{v\in V(G)} \lambda_v + \sum_{S\in\mathcal{O}} \frac{|S|-1}{2}\lambda_S \leq \nu_c(G) \leq p^* \leq d^*$$

Az utolsó egyenlőtlenség a maximalizálási feladatokra vonatkozó gyenge dualitás miatt teljesül), miatt garantálja, hogy a lehetséges duális megoldásunk optimális.

Cunningham—Marsh-tétel bizonyítása: Első lépések

- Ha összefüggő gráfokra tudjuk a tételt, akkor a komponensekhez talált duális megoldásokból össze lehet rakni a teljes G-re vonatkozó megoldást. Azon páratlan elemszámú ponthalmazokhoz tartozó duális változókhoz, amelyek több komponensbe is „beleharapnak" 0 értéket rendelünk.

- Párhuzamos élek egyszerűen kezelhetők. A továbbiakban feltesszük, hogy gráfunk egyszerű.

- Ha a $(c_e)_{e\in E(G)}$ vektor valamely komponense nem pozitív, akkor a duális feladatban az él semmilyen feltételt nem szab. Így ezek az élek elhagyhatók gráfunkból. Azaz feltehető, hogy $(c_e)_{e\in E(G)} \in \mathbb{N}_+^{E(G)}$.

- $|V| + |E| + \sum_{e\in E(G)} c(e)$-re vonatkozó teljes indukciót végzünk. A kis gráfok (kis súlyokkal) eseteinek ellenőrzése egyszerű, az érdeklődő hallgató könnyen elvégezheti.

Cunningham—Marsh-tétel bizonyítása: 1. eset és sémája

1. eset: Legyen G és c olyan, hogy létezik $v \in V(G)$ csúcs, hogy minden c-optimális párosítás lefedi v-t. c-optimális párosítás alatt olyan M párosítást értjünk, melyre $c(M) = \nu_c(G)$.

- Ekkor bizonyításunk sémája a következő lesz:

$$G, c \quad \xrightarrow[\text{lépés}]{\text{vissza-}} \quad G' = G \text{ (a gráf marad)}$$

$$c'_e = \begin{cases} c_e - 1, & \text{ha } v I e \\ c_e, & \text{különben.} \end{cases}$$

$$\Big\downarrow \text{ indukciós feltevés}$$

$$\text{duális lehetséges, egész } \lambda'$$

$$\begin{array}{c} \lambda_u = \begin{cases} \lambda'_v + 1, & \text{ha } u = v \\ \lambda'_u, & \text{különben,} \end{cases} \\ \lambda_S = \lambda'_S \text{ minden } S \in \mathcal{O} \text{ esetén} \end{array} \quad \longleftarrow \quad \sum_{v \in V(G)} \lambda'_v + \sum_{S \in \mathcal{O}} \frac{|S| - 1}{2} \lambda'_S \le \nu_{c'}(G)$$

1. eset bizonyítása

Állítás

A fenti sémában definiált λ igazolja a bizonyítandót. Azaz lehetséges, egész duális helyek és az optimalitást bizonyító egyenlőtlenséget teljesítik.

- A nem-negatív, egész mivolt nyilvánvaló.
- Az indukciós feltevésből tudjuk, hogy

$$\sum_x \lambda'_x + \sum_S \frac{|S|-1}{2}\lambda'_S \leq \nu_{c'}(G).$$

- Kérdéses:

$$\sum_x \lambda_x + \sum_S \frac{|S|-1}{2}\lambda_S \leq \nu_c(G).$$

1. eset bizonyítása (folytatás)

- Hogyan változik az első egyenlőtlenség két oldala, amikor elhagyjuk a $'$-ket?
- Az 1. eset feltétele és c' definíciója garantálja, hogy a jobb oldal eggyel nő. A bal oldalon is nyilván ez történik.
- A lehetséges hely mivolthoz minden élre ellenőrizni kell az előírt feltételt. Legyen $e = xy$ egy tetszőleges él. Tudjuk a következőt:

$$\lambda'_x + \lambda'_y + \sum_{\substack{S \in \mathcal{O} \\ xy \in S}} \lambda_S \geq c'_e.$$

- Igazolnunk kell, hogy

$$\lambda_x + \lambda_y + \sum_{\substack{S \in \mathcal{O} \\ xy \in S}} \lambda_S \geq c_e.$$

1. eset bizonyítása (befejezés)

- Ha v nem illeszkedik e-re, akkor $\lambda'_x = \lambda_x$, $\lambda'_y = \lambda_y$, $c'_e = c_e$, amiből az állítás nyilvánvaló.

- Ha v illeszkedik e-re, akkor ismét a változást vizsgáljuk a tudott és a bizonyítandó egyenlőtlenségek oldalai között.

- Könnyű látni, hogy a $'$-k elhagyásával mindkét oldal 1-gyel nő, amiből az állítás nyilvánvaló.

Cunningham—Marsh-tétel bizonyítása: 2. eset és sémája

2. eset: Minden v csúcsra létezik M c-optimális párosítás, ami nem fedi le (kihagyja) v-t.

- Ekkor bizonyításunk sémája a következő lesz:

$$G, c \xrightarrow[\text{lépés}]{\text{vissza-}} G' = G \ \text{(a gráf marad)}, \quad c' = c - 1$$

$$c' = c - 1 \ \Big\downarrow \ \text{indukciós lépés} \quad \text{duális lehetséges, egész } \lambda'$$

$$\lambda_v = {\lambda'}_v, \qquad \lambda_S = \begin{cases} \lambda'_S + 1, & \text{ha } S = V(G) \\ \lambda'_S, & \text{különben.} \end{cases} \xleftarrow[\text{TÉTEL}]{\star\ \text{FEL-}} \sum_{v \in V(G)} \lambda'_v + \sum_{S \in \mathcal{O}} \frac{|S| - 1}{2} \lambda'_S \leq \nu_{c'}(G)$$

- A 2. eset tárgyalásánál feltesszük

⋆ FELTÉTEL

A c'-optimális párosítás olyan, hogy csak egy csúcsot nem párosít.

Speciálisan V elemszáma páratlan, vagyis $V \in \mathcal{O}$.

2. eset bizonyítása $\star$ mellett

Állítás

A fenti sémában definiált λ igazolja a bizonyítandót.

- A nem-negatív, egész mivolt nyilvánvaló.
- Az optimalitást biztosító egyenlőtlenség igazolásához tudjuk, hogy

$$\sum_x \lambda'_x + \sum_S \frac{|S|-1}{2}\lambda'_S \leq \nu_{c'}(G).$$

- Kérdéses:

$$\sum_x \lambda_x + \sum_S \frac{|S|-1}{2}\lambda_S \leq \nu_c(G).$$

2. eset bizonyítása $\star$ mellett (folytatás)

- Hogyan változik az első egyenlőtlenség két oldala, amikor elhagyjuk a $'$-ket?
- c' definíciója garantálja, hogy a jobb oldal $|M|$-mel nő, ahol M egy c'-optimális párosítás.
- A 2. eset feltétele garantálja, hogy a növekmény $|M| = \frac{|V|-1}{2}$. A bal oldalon egyetlen tag változik: a V-vel indexelt duális változó. Együtthatója $\frac{|V|-1}{2}$, értéke 1-gyel nő. A bizonyítandó nyilvánvaló.

2. eset bizonyítása $\star$ mellett (folytatás)

- A lehetséges hely mivolthoz minden élre ellenőrizni kell az előírt feltételt. Legyen $e = xy$ egy tetszőleges él. Tudjuk a következőt:

$$\lambda'_x + \lambda'_y + \sum_{\substack{S \in \mathcal{O} \\ xy \in S}} \lambda_S \geq c'_e.$$

- Igazolnunk kell, hogy

$$\lambda_x + \lambda_y + \sum_{\substack{S \in \mathcal{O} \\ xy \in S}} \lambda_S \geq c_e.$$

- Ismét a változást vizsgáljuk a tudott és a bizonyítandó egyenlőtlenségek oldalai között. Könnyű látni, hogy a $'$-k elhagyásával mindkét oldal 1-gyel nő, amiből az állítás nyilvánvaló.

A $\star$ FELTÉTEL jogossága: 1. Lemma

Állítás

Az 1. eset után/a 2. esetben a $\star$ FELTÉTEL feltehető.

- Ez következik az alábbi két lemmából. Az indoklás során feltesszük, hogy a 2. eset feltételei teljesülnek.

Lemma

c'-optimális párosítás nem lehet teljes párosítás.

- Legyen M egy c-optimális párosítás. Mivel a 2. esetben vagyunk feltehetjük, hogy M nem teljes.
- Legyen M' c'-optimális párosítás. Indirekt tegyük fel, hogy teljes párosítás.

A $\star$ FELTÉTEL jogossága: 1. Lemma (folytatás)

- Mivel M c-optimális, ezért $c(M') \leq c(M)$ teljesül. Mivel tudjuk, hogy M nem teljes, ezért c' súlyáról is mondhatunk valamit:

$$c'(M) = c(M) - |M| > c(M) - \frac{|V|}{2} \geq c(M') - \frac{|V|}{2}.$$

- Továbbá M' teljes párosítás

$$c'(M') = c(M') - |M'| = c(M') - \frac{|V|}{2} (< c'(M)).$$

- Ez ellentmond annak, hogy M' egy c'-optimális párosítás.

A $\star$ FELTÉTEL jogossága: 2. Lemma

Lemma

Nem lehet, hogy minden c'-optimális párosítás legalább két csúcsot párosítatlanul hagy.

- Indirekt tegyük fel, hogy M' c'-optimális párosítás és $x, y \in V$ úgy, hogy M' nem fedi le x-et és y-t. Legyen (M', x, y) olyan, hogy $d(x, y)$ minimális.
- $d(x, y) > 1$, mert x és y összekötöttsége garantálná, hogy $M' \cup \{xy \text{ él}\}$ szintén párosítás lenne, ami ellentmondás c'-optimalitásával ($c' > 0$). (Általában egy optimális párosítás nem hagyhat két összekötött csúcsot párosítatlanul.)

A $\star$ FELTÉTEL jogossága: 2. Lemma (folytatás)

- Legyen x^+ egy P legrövidebb xy úton az első x-et követő csúcs (y felé haladva). (A fentiek miatt $x^+ \neq y$.) Tekintsük a következő két párosítást:

  (1) M_{x^+}: c-optimális párosítás, nem fedi le x^+-t (a 2. esetben ilyen létezése garantált).

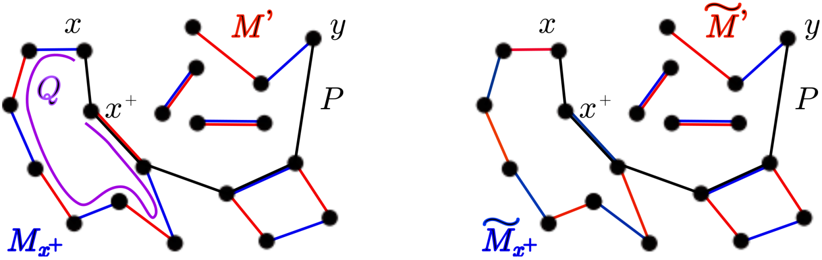
  (2) M'. A c'-optimalitás garantálja, hogy M' lefedi az x^+ csúcsot (x és x^+ összekötött).

- $M_{x^+} \Delta M'$ élek által alkotott $\mathcal{M}$ gráf komponensei körök és utak (BSc Kombinatorika kurzus).

- Párosításaink tulajdonságai miatt x^+ egy 1 fokú csúcs az $\mathcal{M}$ gráfban. Azaz az x^+ a végpontja egy Q útnak $\mathcal{M}$-ben. Legyen

$$\widetilde{M}_{x^+} = M_x \Delta E(Q) \quad \text{és} \quad \widetilde{M}' = M' \Delta E(Q).$$

A $\star$ FELTÉTEL jogossága: 2. Lemma: Ábra



A bal oldalon a fekete élek a P út élei, a piros élek M_{x^+} élei, a kék élek M' élei, lila jelöli a Q utat. A jobb oldalon a módosított párosítások ($\widetilde{M'}$ és $\widetilde{M_{x^+}}$): a Q/lila út mentén a piros és kék éleket felcseréljük. A két oldalon a piros és kék élek együttes súlya ugyanaz.

A $\star$ FELTÉTEL jogossága: 2. Lemma (folytatás)

- Ekkor M_{x^+} c-optimalitása miatt

$$c(\widetilde{M}_{x^+}) \leq c(M_{x^+}).$$

- Ugyanez a gondolatmenet alkalmazható M'-re c'-optimalitása miatt: $c'(\widetilde{M'}) \leq c'(M')$.

- Egy kis ötlettel azonban többet is mondhatunk: $\widetilde{M}'$ nem fedi le az x^+ csúcsot. Továbbá x vagy y is fedetlen marad (a csere csak a Q út két végpontjánál változtatja meg a párosítottságot és az egyik végpont biztos nem x vagy y (hanem x^+)).

- Mivel $d(x^+, x) = 1 < d(x, y)$ és $d(x^+, y) = d(x, y) - 1 < d(x, y)$ is teljesül, ezért (M', x, y) választása miatt $\widetilde{M}'$ nem lehet c'-optimális:

$$c'(\widetilde{M'}) < c'(M').$$

A $\star$ FELTÉTEL jogossága: 2. Lemma (folytatás)

- x^+-ra (a Q út egyik végpontjára) a Q úton egy M'-beli él illeszkedik. Ebből nyilvánvaló, hogy Q mentén legalább annyi M'-beli él szerepel, mint M_{x^+}-beli él. Azaz a cserével M' élszáma nem nőhet: $|\widetilde{M'}| \leq |M'|$.
- Így

$$c(\widetilde{M'}) = c'(\widetilde{M'}) + |\widetilde{M'}| < c'(M') + |\widetilde{M'}| \leq c'(M') + |M'| = c(M').$$

- A módosításunk a két párosítás szerepét cserélte egy út élhalmaza mentén. A két párosítás együttes súlya nem változott, azaz

$$c(\widetilde{M'}) + c(\widetilde{M_{x^+}}) = c(M') + c(M_{x^+}).$$

- Ennek ellentmond (1) és (2) összegének. Ebből adódik az állítás.

A bizonyítás vége

- A két lemma bizonyítja a FELTEVÉS realitását.
- Így a 2. eset tárgyalása korrekt.
- A bizonyítás teljes.

Vége van!

Köszönöm a figyelmet!