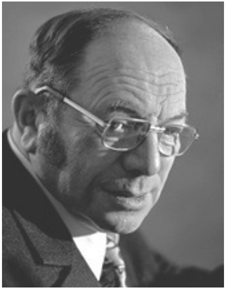
# Optimalizálás: Példák

Peter Hajnal

Bolyai Intézet, Szegedi Tudományegyetem, Szeged

2021 tavasz

# A tudományág



L.V. Kantorovics
(1912-1986)

• Az optimalizálás a matematika legkülönfélébb területeinek találkozási pontja, ezért például a folytonosság fogalmára épülő analitikus meggondolások és diszkrét matematikai módszerek egyaránt részei az optimalizálási apparátusnak.

• Heterogén jellegét jelzi, hogy a megannyi természettudományos, közgazdasági és informatikai alkalmazás, melyek alapját optimalizálási eredmények képezik.

• Az optimalizálás terültén elért áttörések – a széleskörű alkalmazásnak köszönhetően – komoly tudományos elismeréssel járnak.

• Kantorovics (szovjet matematikus) az optimális erőforrás-allokációval kapcsolatos eredményeiért közgazdasági Nobel-díjat kapott 1975-ben.

# Az alapkérdés

- Legyen $c\colon \mathrm{dom}\,(c) \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ egy adott $n$-változós valós függvény ($n \in \mathbb{N}$), melyet **célfüggvénynek** nevezünk.

- A $\mathrm{dom}\,(c)$ értelmezési tartomány egy általános elemére az $x = (x_1, \ldots, x_n)^{\mathsf{T}}$ jelölést használjuk. FIGYELEM! Az előadás során mindvégig oszlopvektorokkal dolgozunk.

- Az optimalizálás alapfeladata a $c$ célfüggvény minimalizálása, előre kiszabott feltételek mellett. Erre a továbbiakban az alábbi rövidített írásmódot használjuk:

| | |
|---|---|
| Minimalizáljuk | $c(x)$-et |
| feltéve, hogy | $x \in \mathcal{F}$, |

ahol $x \in \mathrm{dom}\,(c)$ és $\mathcal{F} \subseteq \mathbb{R}^n$ a feltételek által meghatározott tartomány.

# Feltételek

- A kikötések eltérő eredetűek lehetnek: formalizálhatnak matematikai feltételeket vagy származhatnak fizikai, gazdasági kényszerekből
- A feltételek előírására is többféle lehetőség létezik. Itt kettő megadási módot említünk:
- **Implicit feltételek.** Adott $x \in \mathbb{R}^n$ elemről egy algoritmus/orákulum/szubrutin eldönti, hogy teljesíti-e a feltételeket:

$$x \Rightarrow \boxed{\text{ ALGORITMUS }} \Rightarrow \text{jó/rossz } (\in \mathcal{F} / \notin \mathcal{F})$$

- **Explicit feltételek.** Véges sok egyenlet és/vagy egyenlőtlenség írja le a feltételt:

$$\begin{cases} f_i(x) \leq 0, & i \in [k] := \{1, 2, \ldots, k\}, \\ g_j(x) = 0, & j \in [\ell], \end{cases} \tag{1.1}$$

ahol tehát $f_i\,(i \in [k])$ és $g_j\,(j \in [\ell])$ szintén $n$-változós valós függvények. Ekkor $\mathcal{F}$ a fenti rendszer megoldáshalmaza.

# Értelmezési tartomány, Lehetséges megoldások

• Az **optimalizálási feladat értelmezési tartománya** a célfüggvény és a feltételek értelmezési tartományának metszete. Ez az (1.1) explicit feltételek esetén a

$$\mathcal{D} := \text{dom } (c) \cap \left( \bigcap_{i=1}^{k} \text{dom } (f_i) \right) \cap \left( \bigcap_{j=1}^{\ell} \text{dom } (g_j) \right)$$

halmaz, amely tehát azon $x$-eket tartalmazza, amelyekre mind a célfüggvény, mind pedig a feltételek értelmezettek.

• **Lehetséges/megengedett megoldásoknak** azon $x \in \mathcal{D}$ vektorokat nevezzük, amelyek eleget tesznek a kritériumoknak is, azaz $x \in \mathcal{F}$. Ezen $x$-ek halmazát $\mathcal{L}$ jelöli. Tehát

$$\mathcal{L} := \mathcal{D} \cap \mathcal{F},$$

amely (1.1) explicit feltételek esetén

$$\mathcal{L} = \{x \in \mathcal{D} : f_i(x) \leq 0,\ g_j(x) = 0,\ i \in [k], j \in [\ell]\}.$$

# Optimális érték, optimális hely

- A feladathoz tartozó **optimális érték**

$$p^* = \inf_{x \in \mathcal{L}} c(x) \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\} \cup \{\infty\},$$

ahol az infimum $\infty$, ha a lehetséges megoldások halmaza üres és $-\infty$, ha a $c$ célfüggvény a lehetséges megoldásokon tetszőlegesen kicsi értéket is felvesz.

- Egy $x^* \in \mathcal{L}$ vektor **optimális hely**, ha ott a célfüggvény felveszi az optimális értéket

$$c(x^*) = p^*.$$

- Az $x_\ell$ vektor **lokális optimum**, ha annak egy környezetének minden pontjában $c$ legalább akkora, mint az $x_\ell$ helyen:

$$\exists\, \varepsilon > 0,\ \forall\, x : \|x - x_\ell\|_2 < \varepsilon \quad \text{esetén} \quad c(x_\ell) \le c(x),$$

ahol $\| \, \|_2$ az $\mathbb{R}^n$-en értelmezett euklidészi norma,
$\| \, \|_2 \colon \mathbb{R}^n \to [0, \infty)$, $y \mapsto \|y\|_2 := \sqrt{y_1^2 + \cdots + y_n^2}$.

# Közelítő megoldások

- Azt mondjuk, hogy $x_0$ egy **$\varepsilon$-közelítő megoldás** ($\varepsilon > 0$), ha

$$c(x_0) \leq p^* + \varepsilon.$$

- Egy $x_0$ vektor **$\varepsilon$-approximációs megoldás** ($\varepsilon > 0$), ha

$$(0 < p^* \leq) c(x_0) \leq (1 + \varepsilon) p^*.$$

- Az $\varepsilon$-approximációs megoldás fenti definíciójába beleértjük, hogy az optimális érték pozitív, $p^* > 0$. A negatív optimális értékű feladatokban az $c(x_0) \leq (1 - \varepsilon) p^*$ feltételt kell tennünk.

# Példa I

| | |
|---|---|
| Minimalizáljuk | $\dfrac{1}{x}$-et |
| feltéve, hogy | $x \geq 0.$ |

• A célfüggvény a $c(x) = x^{-1}$ lineáris törtfüggvény, melynek értelmezési tartománya dom $(c) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Az explicit feltételt egyetlen egyenlőtlenség adja, nevezetesen $f_1(x) = -x \leq 0$, ezért $k = 1$, $\ell = 0$. Mivel dom $(f_1) = \mathbb{R}$, így a feladat értelmezési tartománya

$$\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Ebből látható, hogy a lehetséges megoldások halmaza az

$$\mathcal{L} = \mathbb{R}_{>0} := (0, \infty) = ]0.\infty[$$

nyílt intervallum.

# Példa I (folytatás)

- Mivel az $x \in \mathcal{L}$ megengedett megoldásokon felvett függvényértékek infimuma zéró, ezért

$$p^* = 0.$$

- Azonban nem létezik olyan $x \in \mathcal{L}$, amelyen $c$ felveszi ezt az értéket, tehát optimális hely nincs.
- Megjegyezzük, hogy bármely $\varepsilon > 0$ esetén az $x_0 \geq \varepsilon^{-1}$ számok $\varepsilon$-közelítő megoldások.
- Viszont $\varepsilon$-approximáló megoldások nem léteznek.

# Példa II

$$\boxed{\text{Minimalizáljuk} \qquad x \log x\text{-et}}$$

- Most nincsenek feltételek kiszabva, azaz $\mathcal{F} = \mathbb{R}$.
- Ilyenkor azt mondjuk, hogy egy *globális optimalizálási problémát* tekintünk.
- A célfüggvény differenciálható értelmezési tartományán. Az optimalizálás a kalkulus kurzus standard része: A $c(x) = x \log x$ egyváltozós célfüggvény értelmezési tartománya dom $(c) = \mathbb{R}_{>0}$. Mivel feltétel nincs, ezért

$$\mathcal{L} = \mathcal{D} \cap \mathcal{F} = \mathcal{D} = \text{dom } (c) = \mathbb{R}_{>0}.$$

Az optimális értéket például elemi függvénydiszkussziót elvégezve állapíthatjuk meg.

- Eredményül kapjuk, hogy

$$p^* = -\frac{1}{e}, \qquad x^* = \frac{1}{e}.$$

# Alakítsuk át optimalizáslási problémánkat

- Egy megértett optimalizálási probléma esetén több lehetőség van annak formalizálására.

- Másképpen fogalmazva egy formalizált optimalizálási probléma gyakran átfogalmazható úgy, hogy ugyanazt a problémát írja le.

- Ezek az átírások az eredetivel ekvivalens problémához vezethetnek. Azonban ugyaznazon probléma kissé eltérő alakjai közt lényeges különbség lehet.

- Ekvivalens átalakítás alatt olyan formális átlalakítást értünk, hogy bármelyik feladat optimális értéke/helye a másik feladat optimális értéke/helye alapján könnyen megadható.

- Most (a teljesség igénye nélkül) néhány lehetőségét megemlítünk.

# Átalakítások: Min/max csere

| | |
|---|---|
| Maximalizáljuk | $c(x)$-et |
| feltéve, hogy | $x \in \mathcal{F}$ |

$\equiv$

| | |
|---|---|
| Minimalizáljuk | $-c(x)$-et |
| feltéve, hogy | $x \in \mathcal{F}$ |

• A minimalizálási probléma egy optimális pontja egyben a maximalizálási problémának is optimális pontja.

• Ha a mimimalizálási probléma optimális értékét ismerjük, akkor annak ellentettje lesz a maximalizálási probléma optimális értéke.

# Átalakítások: A feltételek ekvivalens átírása

- A középiskolában már láttunk formulák/egyenlőtlenségek/egyenlőségek ekvivalens átalakításait.
- A feltételeinknél ezeket természetesen felhasználhatjuk.

$$\frac{x_1}{x_2^2+1} \le 0 \quad\iff\quad x_1 \le 0.$$

$$(x_1+x_2)^2 \le 0 \quad\iff\quad (x_1+x_2)^2 = 0 \quad\iff\quad x_1+x_2=0.$$

# Átalakítások: egyenlőtlenségek helyettesítése előjelfeltételekkel:

| | |
|---|---|
| Minimalizáljuk | $c(x)$-et |
| feltéve, hogy | $f_i(x) \leq 0$ |
| | $g_i(x) = 0$ |

$$\equiv$$

| | |
|---|---|
| Minimalizáljuk | $c(x)$-et |
| feltéve, hogy | $f_i(x) + s_i = 0$ |
| | $g_i(x) = 0$ |
| | $s_i \geq 0$ |

- A bevezetett $s_i$ változók neve „slack változók”.

# Átalakítások: A lineáris egyenlőségek kiküszöbölése

- Az $Ax = b$ lineáris egyenlőségrendszer megoldása alap algebra tananyag. Az általános megoldás $x = x_0 + Fy$ alakban írható, ahol $x_0$ egy tetszőleges megoldás, míg $F$ oszlopai az $Ax = 0$ egyenletrendszer által leírt lineáris altér egy generáló rendszere. Ha $F$-nek $s$ oszlopa van, akkor $y \in \mathbb{R}^s$.
- $x_0$ és $F$ meghatározása hatékonyan megtehető.

| | |
|---|---|
| Minimalizáljuk | $c(x)$-et |
| feltéve, hogy | $f_i(x) \leq 0$ |
| | $Ax = b$ |

$\equiv$

| | |
|---|---|
| Minimalizáljuk | $c(x_0 + Fy)$-et |
| feltéve, hogy | $f_i(x_0 + Fy) \leq 0$ |

# Átalakítások: A célfüggvény helyettesítése egy monoton függvénybe

- Legyen $m : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ egy szigorúan monoton függvény range $c$-n (a célfüggvény által felvett értékek halmazán).
- Ekkor

$$\boxed{\begin{array}{ll} \text{Minimalizáljuk} & c(x)\text{-et} \\ \text{feltéve, hogy} & x \in \mathcal{F} \end{array}} \equiv$$

$$\boxed{\begin{array}{ll} \text{Minimalizáljuk} & m(c(x))\text{-et} \\ \text{feltéve, hogy} & x \in \mathcal{F} \end{array}}$$

# Átalakítások: A célfüggvény helyettesítése egy monoton függvénybe: Példa

## Példa

| | |
|---|---|
| Minimalizáljuk | $\|x\|_2$-et |
| feltéve, hogy | $x \in \mathcal{F}$ |

$\equiv$

| | |
|---|---|
| Minimalizáljuk | $\|x\|_2^2$-et |
| feltéve, hogy | $x \in \mathcal{F}$ |

- Fenti esetben range $c = \mathbb{R}_{\geq 0}$, ahol az $m(x) = x^2$ függvény monoton.

- Minimális változtatást eszközöltünk, de az új célfüggvény differenciálható. Látni fogjuk, hogy egy ilyen „kis” előny nagyon jelentős lehet.

# Átalakítások: A célfüggvény helyettesítése egy monoton függvénybe: Egy összetettebb példa

$$\boxed{\begin{array}{ll} \text{Maximalizáljuk} & x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1\text{-et.} \\ \text{feltéve, hogy} & x_1 + x_2 + x_3 = 100, \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0. \end{array}} \equiv$$

$$\boxed{\begin{array}{ll} \text{Minimalizáljuk} & \sqrt{\frac{x_1^2+x_2^2+x_3^2}{3}}\text{-et.} \\ \text{feltéve, hogy} & \frac{x_1+x_2+x_3}{3} = \frac{100}{3}, \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0. \end{array}}$$

- A két feltételrendszer nyilván ekvivalens.

# Átalakítások: A célfüggvény helyettesítése egy monoton függvénybe: Egy összetettebb példa (folytatás)

- A két célfüggvény: $c_1(x_1, x_2, x_3) = x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1$, illetve $c_2(x_1, x_2, x_3) = \sqrt{\frac{x_1^2+x_2^2+x_3^2}{3}}$.
- A kapcsolat nyilvánvaló (a feltételek teljesülése esetén):

$$3c_2^2 + 2c_1 = (x_1 + x_2 + x_3)^2 = 100^2.$$

- $c_1$ maximalizálása helyett áttérhetünk $100^2 - 2c_1 = 3c_2^2$ minimalizálására. Majd itt alkalmazhatjuk az $m(x) = \sqrt{\frac{x}{3}}$ szigorúan monoton függvényt (az új célfüggvény által felvett nemnegatív értékek halmazán) az aktuális célfüggvényre. Így a fenti második alakot kapjuk.

- Az új alak előnye nyilvánvaló. A négyzetes közepet kell minimalizálni adott számtani közép érték esetén. A számtani és négyzetes közép közötti egyenlőtlenség alapján elemi matematikával megválaszolható az optimalizálási kérdés.

# Szünet

# Szöveges példák vs az alapproblémánk

- Az előadássorozatban többször látni fogunk olyan feladatot, amely formalizálása okozza a legtöbb problémát.

- A gyakorlatban nem formalizált problémákat kapunk. Beszélnünk kell az alkalmazóval. Meg kell értenünk nyelvezetét, gondolkozását. Eseteg tanulnunk kell fizikát, kémiát, biológiát ahhoz hogy egyenlőségeket, egyenlőtlenségeket lássunk magunk előtt.

- Gyakran a formális leíráshoz szükségesek a matematikai ötletek.

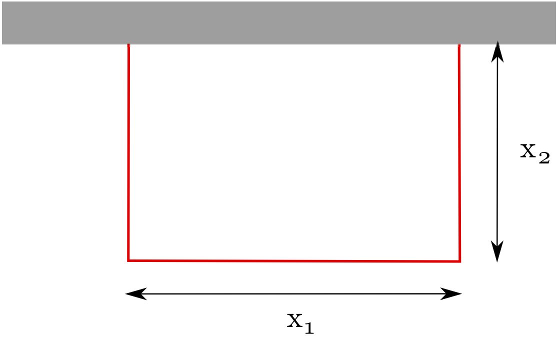
- Gyakran egy jó, szerencsés formalizálás után az optimalizálási algoritmus már készen vár.

- Az alábbiakban néhány bevezető példát mutatunk az alapfogalmakra, illetve elemi formalizálási trükkökre.

# Példa I

**Példa**

Tegyük fel, hogy a lehető legnagyobb téglalap alakú tartományt szeretnék bekeríteni 100 m hosszú kerítéssel úgy, hogy a terület egyik oldalát egy fal képezi.



# Példa I (folytatás)

- Ez a probléma a következőképpen írható le optimalizálási feladatként:

| | |
|---|---|
| Maximalizáljuk | $x_1x_2$-t |
| feltéve, hogy | $x_1 + 2x_2 = 100,$ |
| | $x_1, x_2 \geq 0.$ |

- Nyilvánvaló, hogy a $c(x_1, x_2) = x_1x_2$ célfüggvény az egész $\mathbb{R}^2$ síkon értelmezett és
$f_1(x_1, x_2) = -x_1$, $f_2(x_1, x_2) = -x_2$, $g_1(x_1, x_2) = x_1 + 2x_2 - 100$, ezért $\mathcal{D} = \mathbb{R}^2$ és $\mathcal{L} = \mathbb{R}_{\geq 0} \times \mathbb{R}_{\geq 0}$.

- Alkalmazva a számtani és mértani közepek közötti egyenlőtlenséget és a feltételeket figyelembe véve adódik, hogy

$$50 = \frac{x_1 + 2x_2}{2} \geq \sqrt{x_1(2x_2)} \qquad (\geq 0).$$

# Példa I (folytatás)

- Ebből négyzetre emeléssel kapjuk, hogy

$$2500 \geq 2x_1x_2 = 2c(x_1, x_2),$$

vagyis a célfüggvény felülről korlátos: $c(x_1, x_2) \leq 1250$.

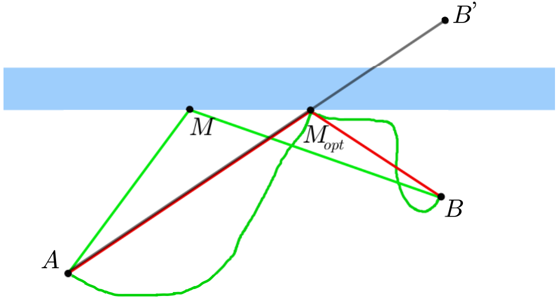
- Mivel $x^* = (50, 25) \in \mathcal{L}$ egy lehetséges megoldás, ahol $c$ eléri ezt a korlátot, így $p^* = 1250$.

- A számtani és mértani közép közötti egyenlőtlenségben az egyenlőség esetének analízise jól is mert. Ez alapján $(50, 25)$ nem csak egy optimális hely. $(50, 25)$ az EGYETLEN optimális hely.

# Példa II

## Példa

Tegyük fel, hogy egy lovas egy egyenesen haladó folyó egyik oldalán található $A$ pontból az ugyanazon oldalon lévő $B$ pontba szeretne eljutni, de közben a lovát is meg szeretné itatni. Melyik a legrövidebb ilyen út?



# Példa II: A megoldás

- A feladattal már általános iskolában találkozhattunk geometria órán.
- Legyen $t$ azon folyópart egyenese, amelyik oldalon lovasunk van.
- Legyen $M$ az itatás pontja. Tetszőleges lehetséges megoldás esetén a lovas pályájának $AM$ szakaszát meghagyva, majd a későbbi szakaszt $t$-re tükrözve egy olyan pályát kapunk, ami $A$-ből, $B'$-be vezet ($B'$ a $B$ pont tükörképe $t$-re). A módosított pálya hossza a tetszőlegesen választott lehetséges megoldás hossza/költsége.
- A módosított pályák között nyilván az $AB'$ szakasz bejárása az optimális. Azaz $t$ és az $AB'$ szakasz $M$ metszéspontja az „optimális itató hely”.
- Ide $A$-ból egyenes úton érkezve, majd $B$-be ugyancsak egyenes mentén haladva lesz legrövidebb a pályája a feladatbeli lovasnak.

# Példa II: A formalizálás

- A formalizált optimalizálási feladatot többféleképpen is felírhatjuk.
- Egy lehetőség, ha derékszögű koordinátákat vezetünk be (például a lovas felőli folyópart az $x$ tengely).
- Feladatunk azon $M(x^*, 0)$ pont keresése, amelyre az $AM$, $MB$ szakaszok hosszának összege minimális.
- Hiszen nyilvánvaló, hogy ha $A$ és $M$ vagy $M$ és $B$ pontok között nem egyenes szakaszon mozog a lovas, akkor pályája nem optimális.
- Tehát adott $A(a_1, a_2)$ és $B(b_1, b_2)$ esetén a feladat az alábbi módon fogalmazható meg:

$$\boxed{\text{Minimalizáljuk} \qquad \sqrt{(a_1 - x)^2 + a_2^2} + \sqrt{(b_1 - x)^2 + b_2^2}\text{-et.}}$$

# Példa III

**Példa**

Az $x_1 + x_2 + x_3 = 100$ egyenletű sík mely pontjának minimális az origótól mért távolsága?

- Vegyük észre, hogy a távolság helyett írhatjuk távolság $\sqrt{\frac{1}{3}}$-szeresét is.
- A formalizálás (egy korábbi példával megegyezően) lehet a következő:

| | |
|---|---|
| Minimalizáljuk | $\sqrt{\frac{x_1^2+x_2^2+x_3^2}{3}}$-et |
| feltéve, hogy | $\frac{x_1+x_2+x_3}{3} = \frac{100}{3}$, |
| | $x_1, x_2, x_3 > 0$. |

# Példa III (folytatás)

A számtani és a négyzetes közepek közötti egyenlőtlenséget használjuk fel az eredeti optimális érték becslésére:

$$\sqrt{\frac{1}{3}}c(x) = \sqrt{\frac{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}{3}} \geq \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3} = \frac{100}{3}.$$

- Azaz

$$p^* \geq \sqrt{3}\frac{100}{3}.$$

- Továbbá a korlát elérhető, ha $x_1 = x_2 = x_3 = \frac{100}{3}$ (és csak ekkor). Tehát a feladat egyetlen optimális helye

$$x^* = \left(\frac{100}{3}, \frac{100}{3}, \frac{100}{3}\right).$$

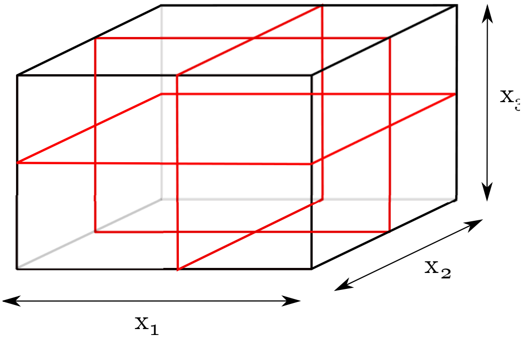
- Továbbá optimális értéke

$$p^* = c(x^*) = \sqrt{3}\frac{100}{3}.$$

# Példa IV

## Példa

Mekkora a legnagyobb felszínű (téglatest alakú) doboz, amelyet egy 400 cm-es madzaggal át tudunk kötni (a mellékelt ábrának megfelelő módon)?



# Példa IV: Formalizálás

A formalizálás nyilvánvaló:

| | |
|---|---|
| Maximalizáljuk | $2x_1x_2 + 2x_2x_3 + 2x_3x_1$-et |
| feltéve, hogy | $4x_1 + 4x_2 + 4x_3 = 400,$ |
| | $x_1, x_2, x_3 > 0.$ |

A korábbiak alapján ez ekvivalens feladat az előzővel. Az ekvivalencia újbóli meggondolása adja, hogy az optimális hely azonos az előző feladat optimális helyével.

$$x^* = \left(\frac{100}{3}, \frac{100}{3}, \frac{100}{3}\right).$$

Ebből az eredeti feladat optimális értéke

$$p^* = c(x^*) = \frac{20\,000}{3}.$$

# Példa V

**Példa**

A 100 pontú 3-részes egyszerű gráfok közül melyeknek maximális az élszáma?

- Ezzel a feladattal Kombinatorika kurzuson a Turán-tétel kapcsán találkoztunk. Ha a három rész méretét rendre $x_1$, $x_2$ és $x_3$ jelöli és élünk a természetes észrevétellel, hogy teljes 3-részes gráfok között keressük az optimálist, akkor a feladat a következő:

| | |
|---|---|
| Maximalizáljuk | $x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1$-et |
| feltéve, hogy | $x_1 + x_2 + x_3 = 100$, |
| | $x_1, x_2, x_3 > 0$, |
| | $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{Z}$. |

# Példa V (folytatás)

- Mivel $\mathcal{F}$ egy nemüres véges halmaz, így a lehetséges megoldások között biztosan létezik $x^*$ optimális hely, $p^* \in \mathbb{R}$ optimális értékkel.
- A feltételből az is látható, hogy ha $(x_1, x_2, x_3)$ egy lehetséges megoldás, akkor például $(x_1 - 1,\ x_2 + 1, x_3)$ is lehetséges megoldás (feltéve, hogy $x_1 > 1$).
- Ha $x_1 \geq x_2 + 2$, akkor az utóbbi helyen nagyobb a célfüggvény, mint az előbbin.
- Ez azt is jelenti, hogy az optimális helyen $|x_i^* - x_j^*| \leq 1$ minden $i, j \in \{1, 2, 3\}$ esetén.
- Három ilyen lehetséges megoldás van, ahol a célfüggvény közös értéket vesz fel. Így az optimális helyek a $(34, 33, 33)$, $(33, 34, 33)$, $(33, 33, 34)$ pontok.
- Az optimális érték $p^* = 3333$.

# Példa V: Megjegyzések

- A fenti feladat NEM ekvivalens a korábbi példáink egyikével sem.

- Ezt jelzi az optimális helyek és a lehetséges megoldások halmazának eltérése, melynek oka a feltételek „lényeges” különbözősége: most kizárólag egész koordinátájú helyek jöhetnek szóba.

- A „folytonos” feladatban (előző két példa) az optimális érték $3\,333\frac{1}{3}$, nagyobb a mostaninál.

- Ez természetes: a folytonos „versenyben” több „résztvevő” van, a maximum értéke legalább annyi mint ahol csak egész koordinátájú „versenyzők” indultak.

- Érdekes, de talán a diszkrét probléma első pillantásra könnyebbenk tűnik: Véges sok lehetőség közül kell a optimális(ak)at megtalálni. Mégis a diszkrét esethez mintha több ötlet kellene.

# Példa VI

## Példa

Legyen $d, n \in \mathbb{N}$ és $\ell_1(x), \ldots, \ell_n(x)\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ adott lineáris függvények. Határozzuk meg a $c(x) = \max_{1\leq i\leq n} \ell_i(x)$ függvény minimumát.

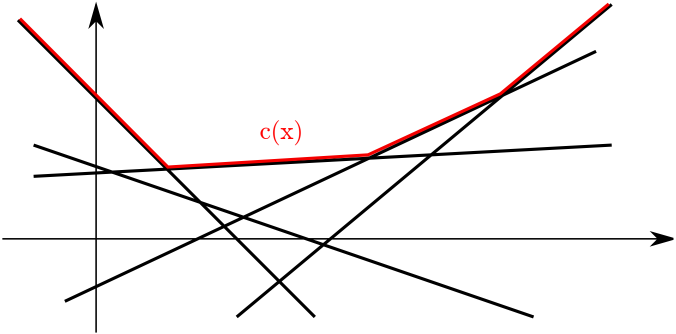
Tehát a formalizált feladat:

$$\boxed{\text{Minimalizáljuk} \qquad c(x)\text{-et}}$$

A feladat globális (nincsenek feltételek).

# Példa VI: Ábra

- A mellékelt ábra a $d = 1$, $n = 5$ eset egy általános konfigurációját szemlélteti.




- Már ez a speciális választás is hű képet ad a célfüggvényről. $c$ lineáris függvények maximuma „szakaszonként” lineáris függvény. Ez $d > 1$ esetén azt jelenti, hogy $c$ értelmezési tartománya felbontható olyan összefüggő részekre, melyeken $c$ lineáris.

# Példa VI: Átfogalmazás

- Az előzővel ekvivalens optimalizálási feladatban az $m$ számot minimalizáljuk úgy, hogy az ottani célfüggvény definícióját (maximalitását) beépítjük a feltételekbe.

| | |
|---|---|
| Minimalizáljuk | $m$-et |
| feltéve, hogy | $l_1(x) \leq m$, |
| | $\vdots$ |
| | $l_n(x) \leq m$, |

ahol $(x, m) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}$.

# Példa VII: Egy probléma osztály

- Egy optimalizálási feladat ezen formája ismerős lehet az operációkutatás kurzusról.

## Lineáris programozás, LP

Legyen $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ adott mátrix, $b \in \mathbb{R}^m$, $c \in \mathbb{R}^n$ rögzített vektorok és $x \in \mathbb{R}^n$ az ismeretlen vektor. A feladat:

$$\boxed{\begin{array}{ll} \text{Minimalizáljuk} & c^{\mathsf{T}}x\text{-et} \\ \text{feltéve, hogy} & Ax \preceq b, \end{array}}$$

ahol $Ax \preceq b$ az $Ax$ és $b$ $\mathbb{R}^m$-beli vektorok „minden komponensben kisebb egyenlő” viszonyát jelöli.

# Példa VII: Egy probléma osztály

- Az LP feladatosztályt az Operációkutatás kurzuson részletesen tárgyaljuk.

- Megjegyezzük, hogy az LP feladat nagyon központi probléma. Sok gyakorlatban és elméletben is jónak tartott algoritmus létezik rá.

- Ha egy problémát LP feladatként fogalmazunk meg, akkor a „nehezén túl vagyunk" (akár középiskolában, ha egyenletmegoldás során másodfokú egyenletre redukáltuk munkánkat).

- Valamelyik általános LP algoritmussal fejezzük be munkánkat (ilyenek nyilvános forráskóddal is könnyen elérhetőek).

# Példa VIII

## Példa

Az LP problémát tekintjük, amelyben a lineáris célfüggvény ($c^T x$) $c$ vektora valószínűségi változó. Feltesszük, hogy várható értéke, $\overline{c} = \mathbb{E}[c]$ ismert, továbbá a feltételek már nem függnek a véletlentől.

Minimalizáljuk a célfüggvény értékének várható értékét.

- A várható érték linearitása alapján $\mathbb{E}[c^T x] = (\mathbb{E}[c])^T x$.
- Egy LP feladat marad optimalizálási kérdésünk:

| | |
|---|---|
| Minimalizáljuk | $(\mathbb{E}[c])^T x$ |
| feltéve, hogy | $Ax \preceq b$. |

# Példa IX: Csebisev középpont

**Definíció**

A $\mathcal{P} = \{x \in \mathbb{R}^n : a_i^\top x \leq b,\ i = 1, \ldots, k\}$ alakú ponthalmazokat poliédereknek nevezzük. Ha a $\mathcal{P}$ poliéder korlátos (amikor is kompakt: korlátos és zárt), akkor politópnak nevezzük.

**Példa: Politópok Csebisev-középpontja**

Adott $\mathcal{P}$ poliéder. Melyek $\mathcal{P}$ legbelsőbb pontjai?

- Igazából az is központi probléma, hogy $\mathcal{P}$-ről döntsük el, hogy üres-e.
- Eseteünkben azt kell mérnünk, hogy $\mathcal{P}$ egy pontja milyen mélyen van $\mathcal{P}$ belsejében.
- Sokféle megoldás/válasz van. Mi egy, Csebisev nevéhez fűzött, megoldásról beszélünk.

# Példa IX: Csebisev-középpont (folytatás)

**Definíció**

$B(c, r) = \{x \in \mathbb{R}^n : |x - c|^2 \leq r^2\}$ a $c$ középpontú $r$ sugarú gömb.

A $p \in \mathcal{P}$ pont Csebisev-mélysége

$$M(p) = \sup\{r : B(p, r) \subset \mathcal{P}\}.$$

$c$ a $\mathcal{P}$ politóp egy Csebisev-középpontja, ha

$$M(c) = \sup_{p \in \mathcal{P}} M(p).$$

- Az alapproblémánk: Adott $\mathcal{P}$ esetén keressünk egy Csebisev-középpontot.

# Példa IX: Csebisev-középpont (folytatás)

- A feladat első ránézesre nem lineáris. Némi geometriai ismeretre lesz szükségünk.

## Definíció

Egy hipersík $\mathbb{R}^n$-ben: $H = \{x : a^\mathsf{T} x = b\}$ alakú ponthalmaz.

$r$ pont pontosan akkor esik $H$-ra, ha $a^\mathsf{T} r - b = 0$.

Egy $p$ pont előjeles távolsága $H$-tól

$$\frac{a^\mathsf{T}}{|a|} p - \frac{b}{|a|}.$$

Az előjeles távolság abszolútértéke a távolság, előjele a hipersík azon oldalát írja le, ahová pontunk esik.

Kétféle előjeles távolság létezik. A fenti az, amelyik az $\{x : a^\mathsf{T} x > b\}$ féltérben pozitív, a komplementer (nyilt) féltérben negatív.

# Példa IX: Csebisev középpont (folytatás)

- A Csebisev-középpont problémája ekvivalens a következővel:

| | | |
|---|---|---|
| Maximalizáljuk | $r$ | |
| feltéve, hogy | $a_i^{\mathsf{T}}x + \|a_i\|r \leq b_i,$ | $i = 1, \ldots, k$ |
| | $r \geq 0$ | |

- Első típusú feltételünk ekvivalens azzal, hogy $\frac{a_i^{\mathsf{T}}}{|a_i|}x + r \leq \frac{b}{|a_i|}$, azaz

$$r \leq \frac{b}{|a_i|} - \frac{a_i^{\mathsf{T}}}{|a_i|}x.$$

- A jobb oldalon egy előjeles távolság szerepel, amit úgy választottunk, hogy az $a_i x < b$ félterekben legyen pozitív.
- Az átfogalmazott optimalizálási feladat egy LP feladat.

# Szünet

# Példa X: Legkisebb négyzetek problémája

- A következő problémával és megoldási módszereivel a numerikus analízis tárgykörében találkozhattunk.

**Példa: A legkisebb négyzetek problémája**

A probléma

$$\boxed{\text{Minimalizáljuk} \qquad \|c - Ax\|}$$

illetve

$$\boxed{\text{Minimalizáljuk} \qquad \|c - Ax\|^2}$$

ahol $x \in \mathbb{R}^n$, $A \in \mathbb{R}^{k \times n}$ valós mátrix és $c \in \mathbb{R}^k$.

- Ez egy feltétel nélküli optimalizálási feladat. Alap lineáris algebrai, geometriai ismeretek alapján egyszerűen kezelhető.

# Példa X: Legkisebb négyzetek problémája

## Példa

Adott egy méréssorozat (pl. egy kísérleti laboratórium különböző időpontokban vett mérései, vagy egy meteorológiai állomás különböző helyeken mért adatai), ahol $t_1, t_2, \dots t_N$ és $p_1, p_2, \dots, p_N$ jelöli rendre a mérési időket/helyeket illetve a mért paramétereket. Keresünk egy "alacsony", $d$-fokú polinomot, ami jó "hipotézis" $p$ változásaira (vagyis jól "illeszthető" a diszkrét idő-mért paraméter grafikonra).

- Legyen
$$p(x) = x_d x^d + \cdots + x_1 x + x_0$$
azaz $p = (p_1, \dots, p_N)^\mathsf{T}$ mért vektor esetén az
$$x_d(t_1^d, \dots, t_N^d)^\mathsf{T} + x_{d-1}(t_1^{d-1}, \dots, t_N^{d-1})^\mathsf{T} + \dots$$
vektor $L_2$-ben mért $p$-től vett távolságát kell minimalizálni.
- A legkisebb négyzetek problémájában kvadratikus forma a

# Példa XI: Kvadratikus programozás

## Kvadratikus programozás, QP

Adottak az $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ szimmetrikus és $C \in \mathbb{R}^{m \times n}$ mátrixok, valamint a $b \in \mathbb{R}^n$, $d \in \mathbb{R}^m$ vektorok.

| | |
|---|---|
| Minimalizáljuk | $x^{\mathsf{T}} A x + b^{\mathsf{T}} x$-et |
| feltéve, hogy | $Cx \preceq d$. |

- A QP alapfeladat feltételrendszere lineáris. A célfüggvény azonban jóval általánosabb.

- Megjegyezzük, hogy a QP alapfeladata is kezelhető (hatékony algoritmus ismert rá) ha a célfüggvény konvex (azaz $A$ pozitív szemidefinit). Ha egy problémát ilyen (konvex QP) alakra hozunk, akkor „készen vagyunk”.

# Példa XII: Sztochasztikus lineáris programozás

- Az LP problémát tekintjük, amelyben a lineáris célfüggvény ($c^\mathsf{T}x$) $c$ vektora valószínűségi változó. Feltesszük, hogy várható értéke, $\overline{c} = \mathbb{E}[c]$, kovarianciamátrixa $\Sigma = \mathbb{E}[(c - \overline{c})(c - \overline{c})^\mathsf{T}]$ ismert. Továbbá a feltételek már nem függnek a véletlentől.

- Láttuk, ha csak a célfüggvény értékének várható értékét ($\mathbb{E}[c^\mathsf{T}x] = (\mathbb{E}[c])^\mathsf{T}x$) minimalizáljuk, akkor egy LP feladathoz jutunk.

- Ekkor azonban a „kockázatot” nem vettük figyelembe.

# Példa XII: Sztochasztikus lineáris programozás (folytatás)

- Megszokott a következő változat vizsgálata:

**Sztochasztikus LP**

$$\boxed{\begin{array}{ll} \text{Minimalizáljuk} & \mathbb{E}[c^\mathsf{T}x] + \gamma\, \mathbb{V}ar[c^\mathsf{T}x] \\ \text{feltéve, hogy} & Ax \preceq b \\ & Dx = e \end{array}}$$

ahol $\gamma \in \mathbb{R}_{>0}$ egy az alkalmazáshoz választott paraméter.

- Egyszerű átlakításokkal

$$\begin{aligned} \mathbb{V}ar[c^\mathsf{T}x] &= \mathbb{E}[(c^\mathsf{T}x - \mathbb{E}[c^\mathsf{T}x])^2] = \mathbb{E}[(c^\mathsf{T}x - (\mathbb{E}[c])^\mathsf{T}x)^2] \\ &= \mathbb{E}[((c^\mathsf{T} - \mathbb{E}[c]^\mathsf{T})x)^2] = x^\mathsf{T}\mathbb{E}[(c - \mathbb{E}[c])(c^\mathsf{T} - \mathbb{E}[c]^\mathsf{T})]x = x^\mathsf{T}\Sigma x. \end{aligned}$$

- A kérdés konvex QP alakja már látható.

# Példa XIII: Poliéderek távolsága

**Példa**

Határozzuk meg az $n$-dimenziós euklidészi tér két adott poliéderjének távolságát!

- Mivel a poliéderek lineáris egyenlőtlenségrendszerek megoldáshalmazaként állnak elő, ezért mindkét politópnak megfelel egy egyenlőtlenségrendszer ($C_1 \in \mathbb{R}^{k_1 \times n}$, $C_2 \in \mathbb{R}^{k_2 \times n}$):

$$\mathcal{P}_1 = \{x_1 \in \mathbb{R}^n : C_1 x_1 \preceq d_1\} \quad \text{és} \quad \mathcal{P}_2 = \{x_2 \in \mathbb{R}^n : C_2 x_2 \preceq d_2\}.$$

- Ezek távolsága

$$d(\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2) = \inf\{d(x_1, x_2) : x_1 \in \mathcal{P}_1,\ x_2 \in \mathcal{P}_2\},$$

ahol $d(x_1, x_2) = \|x_1 - x_2\|_2$.

# Példa XIII: Poliéderek távolsága (folytatás)

- A távolságnégyzetet tekintve ekvivalens optimalizálási feladatot nyerünk:

| | |
|---|---|
| Minimalizáljuk | $\|x_1 - x_2\|_2^2$-et |
| feltéve, hogy | $C_1x_1 \preceq d_1$, |
| | $C_2x_2 \preceq d_2$. |

- Ehhez tekintsük a $d_1 \in \mathbb{R}^{k_1}, d_2 \in \mathbb{R}^{k_2}, x_1, x_2 \in \mathbb{R}^n$ vektorokból és $C_1, C_2 \in \mathbb{R}^{(k_1+k_2)\times n}$ mátrixokból képzett

$$d = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2n}, \quad C = \begin{pmatrix} C_1 & 0 \\ 0 & C_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2n\times 2n}$$

vektorokat és mátrixot, ahol tehát 0 a megfelelő méretű nullmátrixokat jelöli. Feltételrendszerünk: $Cx \preceq d$.

# Példa XIII: Poliéderek távolsága (folytatás)

- Ha az $n \times n$-es egységmátrixból képezzük még, az

$$A = \begin{pmatrix} I & -I \\ -I & I \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2n \times 2n}$$

mátrixot, akkor feladatunk a célfüggvény $x^{\mathsf{T}} A x$ alakba írható.

- A fenti írásmódot használva látjuk, hogy ez egy konvex QP feladat. A fentiek alapján két politóp távolságának meghatározása hatékonyan elvégezhető.

# Példa XIV: Klikk probléma

**Példa**

Adott egy $G$ egyszerű gráf. Határozzuk meg $\omega(G) = \max\{|K| : K \subset V(G)\,\text{klikk}\}$ értékét.

- Egy tetszőleges $U$ csúcshalmaz leírható $\{0,1\}^V \subset \mathbb{R}^V$-beli $\chi_U$ karakterisztikus vektorával. $U$ elemszáma éppen $1^\mathsf{T}\chi_U$, ahol $1 \in \mathbb{R}^V$ azon vektor, amely minden komponense 1.

- $\{0,1\}^V$ elemeit a $0 \le x_v \le 1$, $x_v \in \mathbb{Z}$ tetszőleges $v$ csúcsra tett feltételekkel írhatjuk le. Egy 0-1 vektor akkor lesz klikk karakterisztikus vektora, ha tetszőleges össze nem kötött $u$ és $v$ csúcsra legfeljebb egyikük esik bele. Azaz minden $uv \notin E(G), u \ne v$ csúcsok esetén $x_u + x_v \le 1$.

# Példa XIV: Klikk probléma (folytatás)

• A jól ismerten $\mathcal{N}P$-nehéz klikk probléma megfogalmazható a következő módon:

| | |
|---|---|
| Maximalizáljuk | $1^{\mathsf{T}}x$-et, |
| feltéve, hogy | $0 \leq x_v \leq 1$, $x_v \in \mathbb{Z}$ minden $v$ csúcsra |
| | $x_u + x_v \leq 1$ |
| | tetszőleges $uv \notin E(G), u \neq v$ csúcsokra. |

# Példa XV: Egész értékű programozás

• Az előző példa egy általános séma eleme: Ismét „nyúljunk” bele az LP alapfeladatba. Most a feltételrendszert módosítsuk. A feltételek közé tegyük be azt, hogy „versenyző” vektoraink koordinátái legyenek egészek.

## Egész értékű programozás, IP

Az alapfeladat:

| | |
|---|---|
| Minimalizáljuk | $c^{\mathsf{T}}x$-et |
| feltéve, hogy | $Ax \preceq b$, |
| | $x \in \mathbb{Z}^d$. |

• LP esetén a lehetséges megoldások halmaza egy poliéder volt. Most egy poliéder és $\mathbb{Z}^d$ metszete (politópok esetén ez egy véges halmaz). Lehet, hogy ez a módosítás „ártatlanabbnak” tűnik, mint a célfüggvény módosítása, mégis a kapott probléma nehéz. Ez az általános forma képes $\mathcal{NP}$-teljes problémák formalizálására. Általános, hatékony megoldása nem várható.

# Példa XVI: Párosítási probléma

**Példa**

Adott $G$ gráf élei közötti maximális párosítást keressük.

- A feladat formalizálása:

| | |
|---|---|
| Maximalizáljuk | $1^\mathsf{T}x$-et (ahol $1^\mathsf{T}=(1,\ldots,1), x\in\mathbb{R}^{E(G)}$) |
| feltéve, hogy | $x$ párosítás karakterisztikus vektora. |

- A feltételt algebraizálva az alábbi ekvivalens optimalizálási feladatot kapjuk:

| | |
|---|---|
| Maximalizáljuk | $1^\mathsf{T}x$-et (ahol $x\in\mathbb{R}^{E(G)}$) |
| feltéve, hogy | $0\leq x_e\leq 1$, $x_e\in\mathbb{Z}$ |
| | $\sum_{e:v\in e} x_e\leq 1$ minden $v$ csúcsra. |

# Példa XVI: Párosítási probléma: Relaxáció

- Azaz egy IP feladatot látunk. Az $x_e \in \mathbb{Z}$ feltétel elhagyását **LP relaxációnak** nevezzük. Ezzel a versenyt „megnyitjuk” a nem egész koordinátájú „versenyzők” felé is. Természetesen a maximalizálási feladat optimális értéke megnőhet.
- A relaxált feladat egy kezelhető probléma/LP feladat:

| | |
|---|---|
| Maximalizáljuk | $1^{\mathsf{T}}x$-et |
| feltéve, hogy | $0 \leq x_e \leq 1$, |
| | $\sum_{e: v \,\mathbf{I}\, e} x_e \leq 1$ minden $v$ csúcsra. |

**Jelölés**

$$\nu^*(G)$$

jelölje a fenti LP feladat optimális értékét.

# Példa XVI: Párosítási probléma (folytatás)

**Tétel**

Ha $G$ páros, akkor $\nu^*(G) = \nu(G)$.

Azaz LP relaxációval nyert optimalizálási feladat ekvivalens az eredetivel.

• Problémánk kezdeti alakját ekvivalens módod is átírhatjuk LP alakba. Eredetileg véges sok „versenyzőnk” volt, a párosítások karakterisztikus vektorai. Ezt a versenyzőhalmazt helyettesítve a konvex burkukkal egy ekvivalens problémát kapunk (célfüggvényünk lineáris!):

| | |
|---|---|
| Maximalizáljuk | $1^\mathsf{T} x$ |
| feltéve, hogy | $x \in \mathrm{conv}\{\chi_M : M \text{ párosítás}\}$ |

# Példa XVI: Párosítási probléma (folytatás)

- A feltétel egy politópot ír le. Ez leírható véges sok féltér metszeteként, azaz algebrailag egy véges lineáris egyenlőtlenségrendszer megoldáshalmaza.

**Tétel***

Legyen $G$ páros gráf. Ekkor

$$\mathrm{conv}\{\chi_M : M \text{ párosítás}\} =$$
$$=\{x \in \mathbb{R}^E : 0 \leq x_e \leq 1, \sum_{e:v\, I\, e} x_e \leq 1 \text{ minden } v \text{ csúcsra.}\}$$

- A nem páros gráfok esetét a későbbiekben vizsgáljuk meg jobban.

# Példa XIV: Klikk probléma újra

- Végül egy $\mathcal{NP}$-nehéz problémát formalizálunk/algebraizálunk. Az eredmény alakja egy QP alapfeladat. Természetesen nem konvex feladat lesz.

**Példa**

Adott egy $G$ gráf. Határozzuk meg a klikk paraméterét ($\omega(G)$-t), azaz a legnagyobb klikk méretét.

- Láttuk, hogy a kérdés egy IP problémaként is megfogalmazható. Az alábbi tétel egy távolról sem nyilvánvaló, másik formalizálását adja $\omega(G)$ meghatározásának.

# Példa XIV: Klikk probléma újra: A Tétel

## Tétel

Legyen $A \in \mathbb{R}^{V \times V}$ a $G$ gráf szomszédsági mátrixa és tekintsük az alábbi feladatot ($x, 0, 1 \in \mathbb{R}^V$):

$$\boxed{\begin{array}{ll} \text{Maximalizáljuk} & x^{\mathsf{T}}Ax\text{-et} \\ \text{feltéve, hogy} & x \succeq 0, \\ & 1^{\mathsf{T}}x = 1. \end{array}}$$

Ekkor

$$p^* = 1 - \frac{1}{\omega(G)}.$$

# Példa XIV: Klikk probléma újra: A Bizonyítás

(1): $p^* \geq 1 - \dfrac{1}{\omega(G)}$.

- Legyen $K$ egy optimális (maximális elemszámú) klikk. Ekkor az

$$x_K = (0, \ldots, 0, \underbrace{\frac{1}{\omega}, \ldots, \frac{1}{\omega}}_{K}, 0, \ldots, 0)$$

lehetséges helyen $c$ értéke

$$c(x_K) = x_K^{\mathsf{T}} A x_K = \frac{1}{\omega^2}\omega(\omega - 1) = 1 - \frac{1}{\omega}.$$

# Példa XIV: Klikk probléma újra: A Bizonyítás

(2): $p^* \leq 1 - \dfrac{1}{\omega(G)}$.

• Tekintsük az

$$x = \left( \frac{\overset{v_1}{n_1}}{N}, \ldots, \frac{\overset{v_k}{n_k}}{N} \right) \in \mathcal{L} \cap \mathbb{Q}^{V(G)}$$

vektort, ahol tehát $k = |V(G)|$ és az $n_1, \ldots, n_k \in \mathbb{N}$ számok az $N \in \mathbb{N}$ szám egy partícióját adják.

• Ezek után a $G$ gráfhoz rendeljünk egy $\widetilde{G}$-mal jelölt gráfot a következő módon:

∘ A $G$ gráf $v_i$ pontjának egy $n_i$ pontból álló élmentes $V_i$ független ponthalmaz felel meg $\widetilde{G}$-ban ($i = 1, \ldots, k$).

∘ Ha a $v_i, v_j \in V(G)$ pontok szomszédosak, akkor a megfelelő $V_i$, $V_j$ csúcshalmazok közt egy $K_{n_i,n_j}$ teljes páros gráfot teszünk (minden lehetséges keresztélt behúzunk).

∘ Ha a $v_i, v_j \in V(G)$ pontokat nem köti össze él, akkor a megfelelő $V_i$, $V_j$ csúcshalmazok között nincs él.

# Példa XIV: Klikk probléma újra: A Bizonyítás

- A definíció alapján $\widetilde{G}$ pontjainak száma

$$|V(\widetilde{G})| = \sum_{i=1}^{k} v_i = N \sum_{i=1}^{k} \frac{n_i}{N} = N$$

- A konstrukció alapján $\widetilde{G}$ élszáma

$$|E(\widetilde{G})| = \sum_{\{v_i, v_j\} \in E(G)} n_i n_j = \frac{1}{2} N^2 \sum_{v_i v_j \in E(G)} \frac{n_i}{N} \frac{n_j}{N} = \frac{N^2}{2} x^\mathsf{T} A x = \frac{N^2}{2} c(x).$$

- $\widetilde{G}$ legnagyobb klikkje $\omega(G)$ méretű. A Turán-tételt alkalmazva élszáma legfeljebb az $\omega(G)$ osztályú/$N$ pontú Turán-gráf élszáma:

$$|E(\widetilde{G})| \leq |E(T_{N,\omega(G)})| \leq \binom{\omega(G)}{2} \left(\frac{N}{\omega(G)}\right)^2 = \left(1 - \frac{1}{\omega(G)}\right) \frac{N^2}{2}.$$

# Példa XIV: Klikk probléma újra: A Bizonyítás

- A fentiek összegzése után kapjuk, hogy

$$c(x) = \frac{2}{N^2}|E(\widetilde{G})| \leq 1 - \frac{1}{\omega(G)},$$

ha $x \in \mathcal{L} \cap \mathbb{Q}^{V(G)}$.

- $\mathbb{Q}^{V(G)}$ egy sűrű halmaz $\mathcal{L}$-ben, a célfüggvény folytonos.
- Ez bizonyítja a hiányzó egyenlőtlenséget. Vagyis $p^* = 1 - \frac{1}{\omega(G)}$.

# Példa XIV: Klikk probléma újra: Megjegyzések

- A tétel által adott formalizálásban egy kvadratikus alakot kell maximalizálni.
- A konvex QP alapfeladat feltételei közül „csak” a kvadratikus alak mátrixának pozitív szemidefinitsége hiányzik.
- Ezen feltétel elhagyása olyan alakot eredményez, ami képes reménytelen optimalizálási feladatok formalizálására.

# Vége van!

Köszönöm a figyelmet!