

Szemidefinit programozás

Hajnal Péter

2020. tavasz

Szemidefinit programozás, SDP

Szemidefinit programozás, SDP

A szemidefinit programozási alapfeladat általános alakja

Minimalizáljuk	$c^T x - t$
Feltéve, hogy	$\sum_{i=1}^n x_i A_i \preceq B$
	$Dx = e,$

ahol $c, x \in \mathbb{R}^n$, $A_i, B \in \mathcal{S}^k = \{M \in \mathbb{R}^{k \times k} : M^T = M\} \subset \mathbb{R}^{k \times k}$,
 $D \in \mathbb{R}^{\ell \times n}$ és $e \in \mathbb{R}^\ell$.

Szemidefinit programozás, SDP

A szemidefinit programozási alapfeladat általános alakja

Minimalizáljuk	$c^T x - t$
Feltéve, hogy	$\sum_{i=1}^n x_i A_i \preceq B$
	$Dx = e,$

ahol $c, x \in \mathbb{R}^n$, $A_i, B \in \mathcal{S}^k = \{M \in \mathbb{R}^{k \times k} : M^T = M\} \subset \mathbb{R}^{k \times k}$,
 $D \in \mathbb{R}^{\ell \times n}$ és $e \in \mathbb{R}^\ell$.

\mathcal{S}^n a valós szimmetrikus $n \times n$ méretű mátrixok halmaza. Azaz
 $M \in \mathbb{R}^{n \times n}$ akkor és csak akkor eleme \mathcal{S}^n -nek, ha $M^T = M$.
 Speciálisan $\mathcal{S}^n \subset \mathbb{R}^{n \times n}$.

Szemidefinit programozás, SDP

A szemidefinit programozási alapfeladat általános alakja

Minimalizáljuk	$c^T x - t$
Feltéve, hogy	$\sum_{i=1}^n x_i A_i \preceq B$
	$Dx = e,$

ahol $c, x \in \mathbb{R}^n$, $A_i, B \in \mathcal{S}^k = \{M \in \mathbb{R}^{k \times k} : M^T = M\} \subset \mathbb{R}^{k \times k}$,
 $D \in \mathbb{R}^{\ell \times n}$ és $e \in \mathbb{R}^\ell$.

\mathcal{S}^n a valós szimmetrikus $n \times n$ méretű mátrixok halmaza. Azaz
 $M \in \mathbb{R}^{n \times n}$ akkor és csak akkor eleme \mathcal{S}^n -nek, ha $M^T = M$.
 Speciálisan $\mathcal{S}^n \subset \mathbb{R}^{n \times n}$.

Jelölés

$A \preceq B$ akkor és csak akkor, ha $A, B \in \mathcal{S}^n$, továbbá $0 \preceq B - A$,
 azaz $B - A$ pozitív szemidefinit, jelölésben $B - A \in \mathcal{S}_+^n$.

$$\sum_{i=1}^n x_i A_i$$

$$\begin{pmatrix} A_{1,1}^{(1)}x_1 + \dots + A_{1,1}^{(n)}x_n & A_{1,2}^{(1)}x_1 + \dots + A_{1,2}^{(n)}x_n & \dots & A_{1,k}^{(1)}x_1 + \dots + A_{1,k}^{(n)}x_n \\ A_{2,1}^{(1)}x_1 + \dots + A_{2,1}^{(n)}x_n & A_{2,2}^{(1)}x_1 + \dots + A_{2,2}^{(n)}x_n & \dots & A_{2,k}^{(1)}x_1 + \dots + A_{2,k}^{(n)}x_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{k,1}^{(1)}x_1 + \dots + A_{k,1}^{(n)}x_n & A_{k,2}^{(1)}x_1 + \dots + A_{k,2}^{(n)}x_n & \dots & A_{k,k}^{(1)}x_1 + \dots + A_{k,k}^{(n)}x_n \end{pmatrix}$$

$$\sum_{i=1}^n x_i A_i$$

$$\begin{pmatrix} A_{1,1}^{(1)}x_1 + \dots + A_{1,1}^{(n)}x_n & A_{1,2}^{(1)}x_1 + \dots + A_{1,2}^{(n)}x_n & \dots & A_{1,k}^{(1)}x_1 + \dots + A_{1,k}^{(n)}x_n \\ A_{2,1}^{(1)}x_1 + \dots + A_{2,1}^{(n)}x_n & A_{2,2}^{(1)}x_1 + \dots + A_{2,2}^{(n)}x_n & \dots & A_{2,k}^{(1)}x_1 + \dots + A_{2,k}^{(n)}x_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{k,1}^{(1)}x_1 + \dots + A_{k,1}^{(n)}x_n & A_{k,2}^{(1)}x_1 + \dots + A_{k,2}^{(n)}x_n & \dots & A_{k,k}^{(1)}x_1 + \dots + A_{k,k}^{(n)}x_n \end{pmatrix}$$

Példa

$$\begin{pmatrix} 2x_1 - 3x_2 + x_3 & 5x_1 + 2x_2 - x_3 & x_1 - x_2 + 8x_3 & 6x_1 + 5x_2 + x_3 \\ 5x_1 + 2x_2 - x_3 & -x_1 + 7x_2 - 2x_3 & 9x_1 - 3x_2 + x_3 & -2x_1 - x_2 + 4x_3 \\ x_1 - x_2 + 8x_3 & 9x_1 - 3x_2 + x_3 & 10x_1 - 2x_2 + 2x_3 & 8x_1 + x_2 + x_3 \\ 6x_1 + 5x_2 + x_3 & -2x_1 - x_2 + 4x_3 & 8x_1 + x_2 + x_3 & -11x_1 + 2x_2 - 3x_3 \end{pmatrix}$$

Lineáris egyenlőtlenségek mint SDP feltételek

Lineáris egyenlőtlenségek mint SDP feltételek

Az előjelfeltételek felírhatók, mint alkalmas mátrix pozitív szemidefinitása:

Lineáris egyenlőtlenségek mint SDP feltételek

Az előjelfeltételek felírhatók, mint alkalmas mátrix pozitív szemidefinitása:

$$x_1, \dots, x_n \geq 0 \iff \begin{pmatrix} x_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & x_n \end{pmatrix} \succeq 0 \iff \begin{pmatrix} -x_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & -x_n \end{pmatrix} \preceq 0$$

Lineáris egyenlőtlenségek mint SDP feltételek

Az előjelfeltételek felírhatók, mint alkalmas mátrix pozitív szemidefinitása:

$$x_1, \dots, x_n \geq 0 \iff \begin{pmatrix} x_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & x_n \end{pmatrix} \succeq 0 \iff \begin{pmatrix} -x_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & -x_n \end{pmatrix} \preceq 0$$

Észrevétel

Az LP alapfeladat egy speciális SDP probléma.

\mathcal{S}^n

\mathcal{S}^n

\mathcal{S}^n az $\mathbb{R}^{n \times n} / \mathbb{R}^{[n] \times [n]} / \mathbb{R}^{H \times H}$ egy lineáris altere. Dimenziója $\binom{n}{2}$.

\mathcal{S}^n

\mathcal{S}^n az $\mathbb{R}^{n \times n} / \mathbb{R}^{[n] \times [n]} / \mathbb{R}^{H \times H}$ egy lineáris altere. Dimenziója $\binom{n}{2}$.

Jelölés

$\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathcal{S}^n \times \mathcal{S}^n \rightarrow \mathbb{R}$ az alábbi skalárszorzat: $M, N \in \mathcal{S}^n$ esetén

$$\langle M, N \rangle = \text{Tr}(M^T N) = \sum_j (M^T N)_{jj} = \sum_{i,j} M_{ji}^T N_{ij} = \sum_{i,j} M_{ij} N_{ij}.$$

\mathcal{S}^n

\mathcal{S}^n az $\mathbb{R}^{n \times n} / \mathbb{R}^{[n] \times [n]} / \mathbb{R}^{H \times H}$ egy lineáris altere. Dimenziója $\binom{n}{2}$.

Jelölés

$\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathcal{S}^n \times \mathcal{S}^n \rightarrow \mathbb{R}$ az alábbi skalárszorzat: $M, N \in \mathcal{S}^n$ esetén

$$\langle M, N \rangle = \text{Tr}(M^T N) = \sum_j (M^T N)_{jj} = \sum_{i,j} M_{ji}^T N_{ij} = \sum_{i,j} M_{ij} N_{ij}.$$

Egy alternatíva: Legyen $\text{vec} : \mathbb{R}^{n \times n} \rightarrow \mathbb{R}^{n^2}$ egy mátrix oszlopfolytonos olvasata (azaz egy számtáblázatból egy számsort kézpünk). Ekkor $\langle M, N \rangle = \text{vec}(M)^T \text{vec}(N)$.

$$\langle \cdot, \cdot \rangle$$

$$\langle \cdot, \cdot \rangle$$

A továbbiakban összefoglaljuk a bevezetett skalárszorítás tulajdonságait. Ezeket az érdeklődő hallgató maga is igazolhatja.



A továbbiakban összefoglaljuk a bevezetett skalárszorzás tulajdonságait. Ezeket az érdeklődő hallgató maga is igazolhatja.

Lemma

Legyen $M, N, P \in \mathcal{S}^n$

(i) $\langle M, N \rangle = \langle N, M \rangle$

(ii) $\langle MN, P \rangle = \langle M, PN \rangle$

(iii) $\langle M, M \rangle = \text{Tr}M^2 = \sum_{i=1}^n \lambda_i^2 \geq 0$



A továbbiakban összefoglaljuk a bevezetett skalárszorzás tulajdonságait. Ezeket az érdeklődő hallgató maga is igazolhatja.

Lemma

Legyen $M, N, P \in \mathcal{S}^n$

(i) $\langle M, N \rangle = \langle N, M \rangle$

(ii) $\langle MN, P \rangle = \langle M, PN \rangle$

(iii) $\langle M, M \rangle = \text{Tr}M^2 = \sum_{i=1}^n \lambda_i^2 \geq 0$

Jelölés

$\|M\|_F = \sqrt{\langle M, M \rangle}$, az M szimmetrikus mátrix Frobenius normája.

\mathcal{S}_+^n , pozitív szemidefinit mátrixok

Lemma

Legyen $M \in \mathcal{S}^n$ tetszőleges. Ekkor a következők ekvivalensek:

\mathcal{S}_+^n , pozitív szemidefinit mátrixok

Lemma

Legyen $M \in \mathcal{S}^n$ tetszőleges. Ekkor a következők ekvivalensek:

- (i) M pozitív szemidefinit, azaz $x^T M x \geq 0$ minden $x \in \mathbb{R}^n$ esetén,

\mathcal{S}_+^n , pozitív szemidefinit mátrixok

Lemma

Legyen $M \in \mathcal{S}^n$ tetszőleges. Ekkor a következők ekvivalensek:

- (i) M pozitív szemidefinit, azaz $x^T M x \geq 0$ minden $x \in \mathbb{R}^n$ esetén,
- (ii) M sajátértékei nemnegatívak,

\mathcal{S}_+^n , pozitív szemidefinit mátrixok

Lemma

Legyen $M \in \mathcal{S}^n$ tetszőleges. Ekkor a következők ekvivalensek:

- (i) M pozitív szemidefinit, azaz $x^T M x \geq 0$ minden $x \in \mathbb{R}^n$ esetén,
- (ii) M sajátértékei nemnegatívak,
- (iii) M egy Gram-mátrix, azaz alkalmas $V \in \mathbb{R}^{k \times n}$ mátrixra
 $M = V^T V$,

\mathcal{S}_+^n , pozitív szemidefinit mátrixok

Lemma

Legyen $M \in \mathcal{S}^n$ tetszőleges. Ekkor a következők ekvivalensek:

- (i) M pozitív szemidefinit, azaz $x^T M x \geq 0$ minden $x \in \mathbb{R}^n$ esetén,
- (ii) M sajátértékei nemnegatívak,
- (iii) M egy Gram-mátrix, azaz alkalmas $V \in \mathbb{R}^{k \times n}$ mátrixra $M = V^T V$,
- (iv) M minden szimmetrikus részmátrixa (tetszőleges módon elhagyunk s sort és a nekik megfelelő s oszlopot) nemnegatív determinánsú.

Lemma, ami szintén egy ekvivalens leírás

Lemma

Ha $M \succeq 0$, akkor létezik olyan $M^{\frac{1}{2}} \succeq 0$, amelyre $M = M^{\frac{1}{2}} M^{\frac{1}{2}}$.

Lemma, ami szintén egy ekvivalens leírás

Lemma

Ha $M \succeq 0$, akkor létezik olyan $M^{\frac{1}{2}} \succeq 0$, amelyre $M = M^{\frac{1}{2}} M^{\frac{1}{2}}$.

- M sajátértékei legyenek $\lambda_1, \dots, \lambda_n \geq 0$.

Lemma, ami szintén egy ekvivalens leírás

Lemma

Ha $M \succeq 0$, akkor létezik olyan $M^{\frac{1}{2}} \succeq 0$, amelyre $M = M^{\frac{1}{2}} M^{\frac{1}{2}}$.

- M sajátértékei legyenek $\lambda_1, \dots, \lambda_n \geq 0$.
- Továbbá legyen

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}, \quad \Lambda^{\frac{1}{2}} = \begin{pmatrix} \sqrt{\lambda_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \sqrt{\lambda_n} \end{pmatrix}.$$

Lemma, ami szintén egy ekvivalens leírás

Lemma

Ha $M \succeq 0$, akkor létezik olyan $M^{\frac{1}{2}} \succeq 0$, amelyre $M = M^{\frac{1}{2}} M^{\frac{1}{2}}$.

- M sajátértékei legyenek $\lambda_1, \dots, \lambda_n \geq 0$.
- Továbbá legyen

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}, \quad \Lambda^{\frac{1}{2}} = \begin{pmatrix} \sqrt{\lambda_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \sqrt{\lambda_n} \end{pmatrix}.$$

- Legyen M szimmetrikus, ezért létezik olyan Q ortogonális mátrix, amelyre $Q^T M Q = \Lambda$.

Lemma, ami szintén egy ekvivalens leírás

Lemma

Ha $M \succeq 0$, akkor létezik olyan $M^{\frac{1}{2}} \succeq 0$, amelyre $M = M^{\frac{1}{2}} M^{\frac{1}{2}}$.

- M sajátértékei legyenek $\lambda_1, \dots, \lambda_n \geq 0$.
- Továbbá legyen

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}, \quad \Lambda^{\frac{1}{2}} = \begin{pmatrix} \sqrt{\lambda_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \sqrt{\lambda_n} \end{pmatrix}.$$

- Legyen M szimmetrikus, ezért létezik olyan Q ortogonális mátrix, amelyre $Q^T M Q = \Lambda$.
- Így

$$M = Q \Lambda Q^T = Q \Lambda^{\frac{1}{2}} \Lambda^{\frac{1}{2}} Q^T = Q \Lambda^{\frac{1}{2}} Q^T Q \Lambda^{\frac{1}{2}} Q^T = (Q \Lambda^{\frac{1}{2}} Q^T)(Q \Lambda^{\frac{1}{2}} Q^T).$$

Lemma, ami szintén egy ekvivalens leírás

Lemma

Ha $M \succeq 0$, akkor létezik olyan $M^{\frac{1}{2}} \succeq 0$, amelyre $M = M^{\frac{1}{2}} M^{\frac{1}{2}}$.

- M sajátértékei legyenek $\lambda_1, \dots, \lambda_n \geq 0$.
- Továbbá legyen

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}, \quad \Lambda^{\frac{1}{2}} = \begin{pmatrix} \sqrt{\lambda_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \sqrt{\lambda_n} \end{pmatrix}.$$

- Legyen M szimmetrikus, ezért létezik olyan Q ortogonális mátrix, amelyre $Q^T M Q = \Lambda$.
- Így

$$M = Q \Lambda Q^T = Q \Lambda^{\frac{1}{2}} \Lambda^{\frac{1}{2}} Q^T = Q \Lambda^{\frac{1}{2}} Q^T Q \Lambda^{\frac{1}{2}} Q^T = (Q \Lambda^{\frac{1}{2}} Q^T)(Q \Lambda^{\frac{1}{2}} Q^T).$$

- $M^{\frac{1}{2}} = Q \Lambda^{\frac{1}{2}} Q^T$ választás bizonyítja a Lemmát.

\mathcal{S}_+^n geometriailag

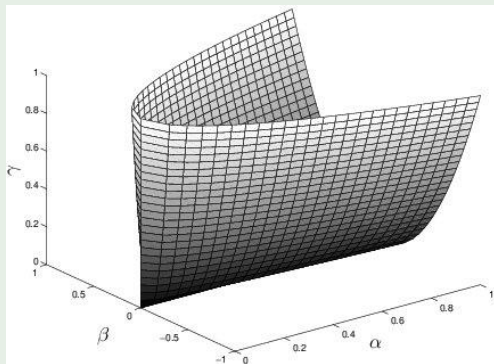
\mathcal{S}_+^n geometriailag

Észrevétel

\mathcal{S}_+^n egy kúp $\mathcal{S}^n \subset \mathbb{R}^{n \times n}$ -ben.

\mathcal{S}_+^n geometriailag

Észrevétel

 \mathcal{S}_+^n egy kúp $\mathcal{S}^n \subset \mathbb{R}^{n \times n}$ -ben. $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & \gamma \end{pmatrix}$ pozitív szemidefinit mátrixok halmaza

SDP normálformák

SDP normálformák

SDP: I. normálforma

Minimalizáljuk	$\langle C, X \rangle$ -t
Feltéve, hogy	$\langle A_i, X \rangle = b_i, \quad i = 1, \dots, k$
	$X \succeq 0,$

ahol $C, X, A_i \in \mathcal{S}^n$ és $b \in \mathbb{R}^k$.

SDP normálformák

SDP: I. normálforma

Minimalizáljuk	$\langle C, X \rangle$ -t
Feltéve, hogy	$\langle A_i, X \rangle = b_i, \quad i = 1, \dots, k$
	$X \succeq 0,$

ahol $C, X, A_i \in \mathcal{S}^n$ és $b \in \mathbb{R}^k$.

SDP: II. normálforma

Minimalizáljuk	$c^T x$ -t
Feltéve, hogy	$\sum_{i=1}^n x_i A_i \preceq B,$

ahol $c, x \in \mathbb{R}^n$ és $A_i, B \in \mathcal{S}^k$.

Szünet



Dualizálás (Lagrange módszer)

Az első normálformában vizsgáljuk a primál feladatot:

Minimalizáljuk	$\langle C, X \rangle$ -t
Feltéve, hogy	$\langle A_i, X \rangle = b_i, \quad i = 1, \dots, k,$
	$X \succeq 0.$

Dualizálás (Lagrange módszer)

Az első normálformában vizsgáljuk a primál feladatot:

Minimalizáljuk	$\langle C, X \rangle$ -t
Feltéve, hogy	$\langle A_i, X \rangle = b_i, \quad i = 1, \dots, k,$
	$X \succeq 0.$

A szokásos ötlettel élünk. A feltételeket „beépítjük” a Lagrange-függvénybe.

Dualizálás (Lagrange módszer)

Az első normálformában vizsgáljuk a primál feladatot:

Minimalizáljuk	$\langle C, X \rangle$ -t
Feltéve, hogy	$\langle A_i, X \rangle = b_i, \quad i = 1, \dots, k,$
	$X \succeq 0.$

A szokásos ötlettel élünk. A feltételeket „beépítjük” a Lagrange-függvénybe.

A véges sok lineáris feltétellel nincs probléma.

Dualizálás (Lagrange módszer)

Az első normálformában vizsgáljuk a primál feladatot:

Minimalizáljuk	$\langle C, X \rangle$ -t
Feltéve, hogy	$\langle A_i, X \rangle = b_i, \quad i = 1, \dots, k,$
	$X \succeq 0.$

A szokásos ötlettel élünk. A feltételeket „beépítjük” a Lagrange-függvénybe.

A véges sok lineáris feltétellel nincs probléma.

A pozitív szemidefinitás feltételét viszont nem tudjuk L -be beépíteni, L értelmezési tartományát „terheljük” ezen feltétellel.

$$L(X, \mu) = \langle C, X \rangle + \sum \mu_i (\langle A_i, X \rangle - b_i), \quad \text{dom } L = \{X : X \succeq 0\}.$$

Dualizálás (Lagrange módszer)

Ennek a függvénynek a minimalizálása vezet a duális probléma célfüggvényéhez.

$$\hat{c}(\mu) = \inf_{X: X \succeq 0} L(X, y) = - \sum b_i \mu_i + \inf \left\langle C + \sum \mu_i A_i, X \right\rangle.$$

Dualizálás (Lagrange módszer)

Ennek a függvénynek a minimalizálása vezet a duális probléma célfüggvényéhez.

$$\hat{c}(\mu) = \inf_{X: X \succeq 0} L(X, y) = - \sum b_i \mu_i + \inf \left\langle C + \sum \mu_i A_i, X \right\rangle.$$

Az $\inf_{X \succeq 0} \langle M, X \rangle = ?$ optimalizálási feladatot kell megoldanunk.

Dualizálás (Lagrange módszer)

Dualizálás (Lagrange módszer)

Lemma

M akkor és csak akkor pozitív szemidefinit, ha minden $X \succeq 0$ esetén $\langle M, X \rangle \geq 0$.

Dualizálás (Lagrange módszer)

Lemma

M akkor és csak akkor pozitív szemidefinit, ha minden $X \succeq 0$ esetén $\langle M, X \rangle \geq 0$.

A bizonyítás előtt kiemelünk egy következményt.

Dualizálás (Lagrange módszer)

Lemma

M akkor és csak akkor pozitív szemidefinit, ha minden $X \succeq 0$ esetén $\langle M, X \rangle \geq 0$.

A bizonyítás előtt kiemelünk egy következményt.

Következmény

Ha $M, N \succeq 0$, akkor $\langle M, N \rangle \geq 0$.

Dualizálás (Lagrange módszer)

Lemma

M akkor és csak akkor pozitív szemidefinit, ha minden $X \succeq 0$ esetén $\langle M, X \rangle \geq 0$.

A bizonyítás előtt kiemelünk egy következményt.

Következmény

Ha $M, N \succeq 0$, akkor $\langle M, N \rangle \geq 0$.

Szükségünk lesz egy egyszerűen ellenőrizhető egyenlőségre:

Dualizálás (Lagrange módszer)

Lemma

M akkor és csak akkor pozitív szemidefinit, ha minden $X \succeq 0$ esetén $\langle M, X \rangle \geq 0$.

A bizonyítás előtt kiemelünk egy következményt.

Következmény

Ha $M, N \succeq 0$, akkor $\langle M, N \rangle \geq 0$.

Szükségünk lesz egy egyszerűen ellenőrizhető egyenlőségre:

Segédlemma

Legyen $A \in \mathbb{R}^{k \times \ell}$ és $B \in \mathbb{R}^{\ell \times k}$. Ekkor

$$\text{Tr}(AB) = \text{Tr}(BA).$$

Lemma bizonyítása

Lemma bizonyítása

- Legyen $M, X \succeq 0$.

Lemma bizonyítása

- Legyen $M, X \succeq 0$. Ekkor

$$\begin{aligned}\langle M, X \rangle &= \text{Tr}(MX) = \text{Tr}(M^{1/2}M^{1/2}X^{1/2}X^{1/2}) \\ &= \text{Tr}((M^{1/2}M^{1/2}X^{1/2})X^{1/2}) = \text{Tr}(X^{1/2}(M^{1/2}M^{1/2}X^{1/2})) \\ &= \text{Tr}((X^{1/2}M^{1/2})(M^{1/2}X^{1/2})) \\ &= \text{Tr}((M^{1/2}X^{1/2})^T(M^{1/2}X^{1/2})) \geq 0,\end{aligned}$$

hiszen $M^{1/2}$ és $X^{1/2}$ is szimmetrikus.

Lemma bizonyítása

- Legyen $M, X \succeq 0$. Ekkor

$$\begin{aligned}\langle M, X \rangle &= \text{Tr}(MX) = \text{Tr}(M^{1/2}M^{1/2}X^{1/2}X^{1/2}) \\ &= \text{Tr}((M^{1/2}M^{1/2}X^{1/2})X^{1/2}) = \text{Tr}(X^{1/2}(M^{1/2}M^{1/2}X^{1/2})) \\ &= \text{Tr}((X^{1/2}M^{1/2})(M^{1/2}X^{1/2})) \\ &= \text{Tr}((M^{1/2}X^{1/2})^T(M^{1/2}X^{1/2})) \geq 0,\end{aligned}$$

hiszen $M^{1/2}$ és $X^{1/2}$ is szimmetrikus.

- Fordítva tegyük fel, hogy $\langle M, X \rangle \geq 0$ minden $X \succeq 0$ mátrixra.

Lemma bizonyítása

- Legyen $M, X \succeq 0$. Ekkor

$$\begin{aligned}
 \langle M, X \rangle &= \text{Tr}(MX) = \text{Tr}(M^{1/2}M^{1/2}X^{1/2}X^{1/2}) \\
 &= \text{Tr}((M^{1/2}M^{1/2}X^{1/2})X^{1/2}) = \text{Tr}(X^{1/2}(M^{1/2}M^{1/2}X^{1/2})) \\
 &= \text{Tr}((X^{1/2}M^{1/2})(M^{1/2}X^{1/2})) \\
 &= \text{Tr}((M^{1/2}X^{1/2})^T(M^{1/2}X^{1/2})) \geq 0,
 \end{aligned}$$

hiszen $M^{1/2}$ és $X^{1/2}$ is szimmetrikus.

- Fordítva tegyük fel, hogy $\langle M, X \rangle \geq 0$ minden $X \succeq 0$ mátrixra. Legyen $x \in \mathbb{R}^n$ tetszőleges. Feltevéseinket alkalmazzuk az $X = xx^T$ pozitív szemidefinit mátrixra:

Lemma bizonyítása

- Legyen $M, X \succeq 0$. Ekkor

$$\begin{aligned}
 \langle M, X \rangle &= \text{Tr}(MX) = \text{Tr}(M^{1/2}M^{1/2}X^{1/2}X^{1/2}) \\
 &= \text{Tr}((M^{1/2}M^{1/2}X^{1/2})X^{1/2}) = \text{Tr}(X^{1/2}(M^{1/2}M^{1/2}X^{1/2})) \\
 &= \text{Tr}((X^{1/2}M^{1/2})(M^{1/2}X^{1/2})) \\
 &= \text{Tr}((M^{1/2}X^{1/2})^T(M^{1/2}X^{1/2})) \geq 0,
 \end{aligned}$$

hiszen $M^{1/2}$ és $X^{1/2}$ is szimmetrikus.

- Fordítva tegyük fel, hogy $\langle M, X \rangle \geq 0$ minden $X \succeq 0$ mátrixra. Legyen $x \in \mathbb{R}^n$ tetszőleges. Feltevésünket alkalmazzuk az $X = xx^T$ pozitív szemidefinit mátrixra:

$$\begin{aligned}
 0 &\leq \langle M, X \rangle = \text{Tr}(M(xx^T)) = \text{Tr}((Mx)x^T) = \text{Tr}(x^T(Mx)) \\
 &= \text{Tr}(x^T Mx) = x^T Mx.
 \end{aligned}$$

Azaz M pozitív szemidefinit.

A lemma alkalmazása

A lemma alkalmazása

A lemmából következik, hogy

$$\inf \langle M, X \rangle = \begin{cases} 0, & M \succeq 0 \\ -\infty, & \text{különben} \end{cases} .$$

A lemma alkalmazása

A lemmából következik, hogy

$$\inf \langle M, X \rangle = \begin{cases} 0, & M \succeq 0 \\ -\infty, & \text{különben} \end{cases} .$$

- Valóban, ha $M \succeq 0$, akkor a lemma alapján $\langle M, X \rangle$ nem lehet negatív, de $M = 0$ mutatja, hogy 0 lehet.

A lemma alkalmazása

A lemmából következik, hogy

$$\inf \langle M, X \rangle = \begin{cases} 0, & M \succeq 0 \\ -\infty, & \text{különben} \end{cases} .$$

- Valóban, ha $M \succeq 0$, akkor a lemma alapján $\langle M, X \rangle$ nem lehet negatív, de $M = 0$ mutatja, hogy 0 lehet.
- Szintén a lemma alapján, ha $M \not\succeq 0$, akkor $\langle M, X \rangle$ lehet negatív. X pozitív számmal való szorzásával elérhetjük, hogy tetszőlegesen nagy abszolútértékű negatív szám legyen.

A lemma geometriai jelentése

A lemma geometriai jelentése

A következő definíció lehetőséget ad a kitérőbeli lemmánk egy hasznos újrafogalmazására:

A lemma geometriai jelentése

A következő definíció lehetőséget ad a kitérőbeli lemmánk egy hasznos újrafogalmazására:

Definíció

A $K \subseteq \mathbb{R}^N$ kúp duálisa:

$$K^* = \{x \in \mathbb{R}^N : x^T k \geq 0 \forall k \in K\}.$$

A lemma geometriai jelentése

A következő definíció lehetőséget ad a kitérőbeli lemmánk egy hasznos újrafogalmazására:

Definíció

A $K \subseteq \mathbb{R}^N$ kúp duálisa:

$$K^* = \{x \in \mathbb{R}^N : x^T k \geq 0 \forall k \in K\}.$$

Ezek után a bebizonyított lemmánk a következő formában is leírható:

A lemma geometriai jelentése

A következő definíció lehetőséget ad a kitérőbeli lemmánk egy hasznos újrafogalmazására:

Definíció

A $K \subseteq \mathbb{R}^N$ kúp duálisa:

$$K^* = \{x \in \mathbb{R}^N : x^T k \geq 0 \forall k \in K\}.$$

Ezek után a bebizonyított lemmánk a következő formában is leírható:

Lemma

- (i) S_+^n kúp.
- (ii) S_+^n önduális, $(S_+^n)^* = S_+^n$.

Duális feladat

Duális feladat

A kitérő után kapjuk, hogy

$$\inf_{X \succeq 0} L(X, \mu) = \begin{cases} -\sum b_i \mu_i, & C + \sum \mu_i A_i \succeq 0 \\ -\infty, & \text{különben} \end{cases} .$$

Duális feladat

A kitérő után kapjuk, hogy

$$\inf_{X \succeq 0} L(X, \mu) = \begin{cases} -\sum b_i \mu_i, & C + \sum \mu_i A_i \succeq 0 \\ -\infty, & \text{különben} \end{cases} .$$

Azaz a kiinduló SDP (primál) feladat duálisa.

Maximalizáljuk	$-\sum b_i \mu_i - t$
Feltéve, hogy	$-\sum \mu_i A_i \preceq C$

Duális feladat

A kitérő után kapjuk, hogy

$$\inf_{X \succeq 0} L(X, \mu) = \begin{cases} -\sum b_i \mu_i, & C + \sum \mu_i A_i \succeq 0 \\ -\infty, & \text{különben} \end{cases} .$$

Azaz a kiinduló SDP (primál) feladat duálisa.

Maximalizáljuk	$-\sum b_i \mu_i - t$
Feltéve, hogy	$-\sum \mu_i A_i \preceq C$

Ekvivalens módon

Minimalizáljuk	$\sum b_i \mu_i - t$
Feltéve, hogy	$C + \sum \mu_i A_i = S,$ $S \succeq 0.$

Gyenge dualitás tétel

Gyenge dualitás tétele

Gyenge dualitás

Ha p^* a primál SDP optimuma és d^* a duális SDP optimuma, akkor $d^* \leq p^*$.

Gyenge dualitás tétele

Gyenge dualitás

Ha p^* a primál SDP optimuma és d^* a duális SDP optimuma, akkor $d^* \leq p^*$.

Feltehető, hogy $p^* < \infty$, $d^* > -\infty$.

Gyenge dualitás tétel

Gyenge dualitás

Ha p^* a primál SDP optimuma és d^* a duális SDP optimuma, akkor $d^* \leq p^*$.

Feltehető, hogy $p^* < \infty$, $d^* > -\infty$.

Legyen $X \in \mathcal{L}_P$, egy lehetséges megoldása a primál feladatnak és $(\mu, S) \in \mathcal{L}_D$, a duális egy lehetséges megoldása.

Gyenge dualitás tétel

Gyenge dualitás

Ha p^* a primál SDP optimuma és d^* a duális SDP optimuma, akkor $d^* \leq p^*$.

Feltehető, hogy $p^* < \infty$, $d^* > -\infty$.

Legyen $X \in \mathcal{L}_P$, egy lehetséges megoldása a primál feladatnak és $(\mu, S) \in \mathcal{L}_D$, a duális egy lehetséges megoldása.

Állítás

$$\langle C, X \rangle \geq -b^T \mu.$$

Gyenge dualitás tétele

Gyenge dualitás

Ha p^* a primál SDP optimuma és d^* a duális SDP optimuma, akkor $d^* \leq p^*$.

Feltehető, hogy $p^* < \infty$, $d^* > -\infty$.

Legyen $X \in \mathcal{L}_P$, egy lehetséges megoldása a primál feladatnak és $(\mu, S) \in \mathcal{L}_D$, a duális egy lehetséges megoldása.

Állítás

$$\langle C, X \rangle \geq -b^T \mu.$$

Az állítás azt mondja, hogy egy tetszőleges primál célfüggvényérték legalább akkora mint egy tetszőleges duál célfüggvényérték. Ebből a tétel nyilván adódik.

A gyenge dualitás bizonyítása

Láttuk, hogy két pozitív szemidefinit mátrix skalárszorzata nemnegatív. Így

$$\begin{aligned} 0 \leq \langle X, S \rangle &= \langle X, C + \sum \mu_i A_i \rangle = \langle X, C \rangle + \sum \mu_i \langle A_i, X \rangle \\ &= \langle C, X \rangle + \sum \mu_i b_i = \langle C, X \rangle + b_i^T \mu_i. \end{aligned}$$

A gyenge dualitás bizonyítása

Láttuk, hogy két pozitív szemidefinit mátrix skalárszorzata nemnegatív. Így

$$\begin{aligned} 0 \leq \langle X, S \rangle &= \langle X, C + \sum \mu_i A_i \rangle = \langle X, C \rangle + \sum \mu_i \langle A_i, X \rangle \\ &= \langle C, X \rangle + \sum \mu_i b_i = \langle C, X \rangle + b_i^T \mu_i. \end{aligned}$$

Innen rendezéssel adódik az állítás.

Példa

Minimalizáljuk

 x_{12} -t

Feltéve, hogy

$$\begin{pmatrix} 0 & x_{12} & 0 \\ x_{12} & x_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 1 + x_{12} \end{pmatrix} \succeq 0$$

Példa: Normálalakra hozás, bevezetés

Példa: Normálalakra hozás, bevezetés

A duálizáláshoz a feladatot a szemidefinit programozási feladatok I. standard alakjára hozzuk:

Példa: Normálalakra hozás, bevezetés

A duálizáláshoz a feladatot a szemidefinit programozási feladatok I. standard alakjára hozzuk:

Bevezetjük a következő változó mátrixot:

$$X = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{12} & x_{22} & x_{23} \\ x_{13} & x_{23} & x_{33} \end{pmatrix}$$

Példa: Normálalakra hozás, bevezetés

A duálizáláshoz a feladatot a szemidefinit programozási feladatok I. standard alakjára hozzuk:

Bevezetjük a következő változó mátrixot:

$$X = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{12} & x_{22} & x_{23} \\ x_{13} & x_{23} & x_{33} \end{pmatrix}$$

Az eredeti alak mátrixa $\begin{pmatrix} 0 & x_{12} & 0 \\ x_{12} & x_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 1 + x_{12} \end{pmatrix}$.

Példa: Normálalakra hozás, bevezetés

A duálizáláshoz a feladatot a szemidefinit programozási feladatok I. standard alakjára hozzuk:

Bevezetjük a következő változó mátrixot:

$$X = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{12} & x_{22} & x_{23} \\ x_{13} & x_{23} & x_{33} \end{pmatrix}$$

Az eredeti alak mátrixa $\begin{pmatrix} 0 & x_{12} & 0 \\ x_{12} & x_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 1 + x_{12} \end{pmatrix}$.

Ez ekvivalens azzal, hogy $x_{11} = 0$, $x_{13} = 0$, $x_{23} = 0$, $x_{33} = 1 + x_{12}$.

Példa: A feltételek átírása

Példa: A feltételek átírása

Ezen feltételek átírása az I. alak formájára:

Példa: A feltételek átírása

Ezen feltételek átírása az I. alak formájára:

- $x_{11} = 0$ átírása: $\left\langle \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, X \right\rangle = 0$ (ezen egyenlőség feltételhez tartozzon a μ_1 duális változó).

Példa: A feltételek átírása

Ezen feltételek átírása az I. alak formájára:

- $x_{11} = 0$ átírása: $\left\langle \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, X \right\rangle = 0$ (ezen egyenlőség

feltételhez tartozzon a μ_1 duális változó).

- $x_{13} = 0$ átírása $\left\langle \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, X \right\rangle = 0$ (ezen egyenlőség

feltételhez tartozzon a μ_2 duális változó).

Példa: A feltételek átírása

Ezen feltételek átírása az I. alak formájára:

- $x_{11} = 0$ átírása: $\left\langle \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, X \right\rangle = 0$ (ezen egyenlőség

feltételhez tartozzon a μ_1 duális változó).

- $x_{13} = 0$ átírása $\left\langle \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, X \right\rangle = 0$ (ezen egyenlőség

feltételhez tartozzon a μ_2 duális változó).

- $x_{23} = 0$ feltétel átírása $\left\langle \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, X \right\rangle = 0$ (ezen

egyenlőség feltételhez tartozzon a μ_3 duális változó).

Példa: A feltételek átírása

Ezen feltételek átírása az I. alak formájára:

- $x_{11} = 0$ átírása: $\left\langle \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, X \right\rangle = 0$ (ezen egyenlőség

feltételhez tartozzon a μ_1 duális változó).

- $x_{13} = 0$ átírása $\left\langle \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, X \right\rangle = 0$ (ezen egyenlőség

feltételhez tartozzon a μ_2 duális változó).

- $x_{23} = 0$ feltétel átírása $\left\langle \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, X \right\rangle = 0$ (ezen

egyenlőség feltételhez tartozzon a μ_3 duális változó).

- $x_{33} = 1 + x_{12}$ feltétel átírása $\left\langle \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, X \right\rangle = 1$ (ezen

egyenlőség feltételhez tartozzon a μ_4 duális változó).

A példa normálalakban

Feladatunk új alakja

Minimalizáljuk $\left\langle \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, X \right\rangle$ -t

Feltéve, hogy $\left\langle \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, X \right\rangle = 0$, $\left\langle \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, X \right\rangle = 0$,

$\left\langle \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, X \right\rangle = 0$, $\left\langle \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, X \right\rangle = 1$.

$X \succeq 0$

Példa: dualizálás

Példa: dualizálás

Maximalizáljuk

$-\mu_4 - t$

Feltéve, hogy

$$\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \mu_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \mu_2 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} +$$

$$\mu_3 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} + \mu_4 \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \preceq 0.$$

Példa: dualizálás

Maximalizáljuk

 $-\mu_4 - t$

Feltéve, hogy

$$\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \mu_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \mu_2 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \mu_3 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} + \mu_4 \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \succeq 0.$$

Azaz

Maximalizáljuk

 $-\mu_4 - t$

Feltéve, hogy

$$\begin{pmatrix} \mu_1 & \frac{1-\mu_4}{2} & \mu_2 \\ \frac{1-\mu_4}{2} & 0 & \mu_3 \\ \mu_2 & \mu_3 & \mu_4 \end{pmatrix} \succeq 0.$$

p^* elemi módszerekkel

p^* elemi módszerekkel

Minimalizáljuk

 x_{12} -t

Feltéve, hogy

$$\begin{pmatrix} 0 & x_{12} & 0 \\ x_{12} & x_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 1 + x_{12} \end{pmatrix} \succeq 0$$

p^* elemi módszerekkel

Minimalizáljuk	x_{12} -t
Feltéve, hogy	$\begin{pmatrix} 0 & x_{12} & 0 \\ x_{12} & x_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 1 + x_{12} \end{pmatrix} \succeq 0$

Ha létezik egy $X \in \mathcal{L}$, akkor a példabeli feltétel mátrixának balfelső 2×2 -es főminorának pozitív szemidefinitnek kell lennie. Így a sajátértékeinek szorzata (determinánsa) legyen nagyobb, mint nulla.

p^* elemi módszerekkel

Minimalizáljuk	x_{12} -t
Feltéve, hogy	$\begin{pmatrix} 0 & x_{12} & 0 \\ x_{12} & x_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 1 + x_{12} \end{pmatrix} \succeq 0$

Ha létezik egy $X \in \mathcal{L}$, akkor a példabeli feltétel mátrixának balfelső 2×2 -es főminorának pozitív szemidefinitnek kell lennie. Így a sajátértékeinek szorzata (determinánsa) legyen nagyobb, mint nulla.

Esetünkben $-x_{12}^2 \geq 0$, azaz $x_{12} = 0$. Tehát $p^* = 0$.

d^* elemi módszerekkel

d^* elemi módszerekkel

Maximalizáljuk	$-\mu_4$ -t	
Feltéve, hogy	$\begin{pmatrix} \mu_1 & \frac{1-\mu_4}{2} & \mu_2 \\ \frac{1-\mu_4}{2} & 0 & \mu_3 \\ \mu_2 & \mu_3 & \mu_4 \end{pmatrix} \succeq 0.$	

d^* elemi módszerekkel

Maximalizáljuk

 $-\mu_4$ -t

Feltéve, hogy

$$\begin{pmatrix} \mu_1 & \frac{1-\mu_4}{2} & \mu_2 \\ \frac{1-\mu_4}{2} & 0 & \mu_3 \\ \mu_2 & \mu_3 & \mu_4 \end{pmatrix} \succeq 0.$$

 d^* : Az előző megfontolások alapján teljesülni kell, hogy

$$\det \begin{pmatrix} \mu_1 & \frac{1-\mu_4}{2} \\ \frac{1-\mu_4}{2} & 0 \end{pmatrix} \geq 0$$

d^* elemi módszerekkel

Maximalizáljuk	$-\mu_4$ -t	
Feltéve, hogy	$\begin{pmatrix} \mu_1 & \frac{1-\mu_4}{2} & \mu_2 \\ \frac{1-\mu_4}{2} & 0 & \mu_3 \\ \mu_2 & \mu_3 & \mu_4 \end{pmatrix} \succeq 0.$	

d^* : Az előző megfontolások alapján teljesülni kell, hogy

$$\det \begin{pmatrix} \mu_1 & \frac{1-\mu_4}{2} \\ \frac{1-\mu_4}{2} & 0 \end{pmatrix} \geq 0$$

Ez csak $\mu_4 = 1$ esetén teljesül. Így $d^* = -1$.

d^* elemi módszerekkel

Maximalizáljuk	$-\mu_4$ -t	
Feltéve, hogy	$\begin{pmatrix} \mu_1 & \frac{1-\mu_4}{2} & \mu_2 \\ \frac{1-\mu_4}{2} & 0 & \mu_3 \\ \mu_2 & \mu_3 & \mu_4 \end{pmatrix} \succeq 0.$	

d^* : Az előző megfontolások alapján teljesülni kell, hogy

$$\det \begin{pmatrix} \mu_1 & \frac{1-\mu_4}{2} \\ \frac{1-\mu_4}{2} & 0 \end{pmatrix} \geq 0$$

Ez csak $\mu_4 = 1$ esetén teljesül. Így $d^* = -1$.

Azaz valóban teljesül a gyenge dualitás tétele, tehát $p^* \geq d^*$ ($0 \geq -1$).

d^* elemi módszerekkel

Maximalizáljuk	$-\mu_4$ -t	
Feltéve, hogy	$\begin{pmatrix} \mu_1 & \frac{1-\mu_4}{2} & \mu_2 \\ \frac{1-\mu_4}{2} & 0 & \mu_3 \\ \mu_2 & \mu_3 & \mu_4 \end{pmatrix} \succeq 0.$	

d^* : Az előző megfontolások alapján teljesülni kell, hogy

$$\det \begin{pmatrix} \mu_1 & \frac{1-\mu_4}{2} \\ \frac{1-\mu_4}{2} & 0 \end{pmatrix} \geq 0$$

Ez csak $\mu_4 = 1$ esetén teljesül. Így $d^* = -1$.

Azaz valóban teljesül a gyenge dualitás tétele, tehát $p^* \geq d^*$ ($0 \geq -1$).

Azonban erős dualitás nincs.

Erős dualitás

Erős dualitás

Jelölés

$X \in \mathcal{L}_p^+$ akkor és csak akkor teljesül, ha $\langle A_i, X \rangle = b_i, i = 1, \dots, \ell$
és $X \succ 0$ (azaz X pozitív definit).

Erős dualitás

Jelölés

$X \in \mathcal{L}_P^+$ akkor és csak akkor teljesül, ha $\langle A_i, X \rangle = b_i, i = 1, \dots, \ell$
és $X \succ 0$ (azaz X pozitív definit).

Hasonlóan definiálható \mathcal{L}_D^+ .

Erős dualitás

Jelölés

$X \in \mathcal{L}_P^+$ akkor és csak akkor teljesül, ha $\langle A_i, X \rangle = b_i, i = 1, \dots, \ell$ és $X \succ 0$ (azaz X pozitív definit).

Hasonlóan definiálható \mathcal{L}_D^+ .

Erős dualitás

$\mathcal{L}_P^+, \mathcal{L}_D^+ \neq \emptyset$ esetén $p^* = d^*$.

Erős dualitás

Jelölés

$X \in \mathcal{L}_P^+$ akkor és csak akkor teljesül, ha $\langle A_i, X \rangle = b_i, i = 1, \dots, \ell$
és $X \succ 0$ (azaz X pozitív definit).

Hasonlóan definiálható \mathcal{L}_D^+ .

Erős dualitás

$\mathcal{L}_P^+, \mathcal{L}_D^+ \neq \emptyset$ esetén $p^* = d^*$.

Sőt az optimumhelyek halmaza nem üres, kompakt

Erős dualitás

Jelölés

$X \in \mathcal{L}_P^+$ akkor és csak akkor teljesül, ha $\langle A_i, X \rangle = b_i, i = 1, \dots, \ell$ és $X \succ 0$ (azaz X pozitív definit).

Hasonlóan definiálható \mathcal{L}_D^+ .

Erős dualitás

$\mathcal{L}_P^+, \mathcal{L}_D^+ \neq \emptyset$ esetén $p^* = d^*$.

Sőt az optimumhelyek halmaza nem üres, kompakt

Az erős dualitás egy kissé gyengített feltételek mellett is igaz.

Erős dualitás

Jelölés

$X \in \mathcal{L}_P^+$ akkor és csak akkor teljesül, ha $\langle A_i, X \rangle = b_i, i = 1, \dots, \ell$ és $X \succ 0$ (azaz X pozitív definit).

Hasonlóan definiálható \mathcal{L}_D^+ .

Erős dualitás

$\mathcal{L}_P^+, \mathcal{L}_D^+ \neq \emptyset$ esetén $p^* = d^*$.

Sőt az optimumhelyek halmaza nem üres, kompakt

Az erős dualitás egy kissé gyengített feltételek mellett is igaz.

Erős dualitás

$\mathcal{L}_P^+, \mathcal{L}_D \neq \emptyset$ esetén $p^* = d^*$.

Erős dualitás

Jelölés

$X \in \mathcal{L}_P^+$ akkor és csak akkor teljesül, ha $\langle A_i, X \rangle = b_i, i = 1, \dots, \ell$ és $X \succ 0$ (azaz X pozitív definit).

Hasonlóan definiálható \mathcal{L}_D^+ .

Erős dualitás

$\mathcal{L}_P^+, \mathcal{L}_D^+ \neq \emptyset$ esetén $p^* = d^*$.

Sőt az optimumhelyek halmaza nem üres, kompakt

Az erős dualitás egy kissé gyengített feltételek mellett is igaz.

Erős dualitás

$\mathcal{L}_P^+, \mathcal{L}_D \neq \emptyset$ esetén $p^* = d^*$.

A tételeket most nem bizonyítjuk.

Vége van!

Köszönöm a figyelmet!