

Erős dualitás, Karush—Kuhn—Tucker-tétel

Hajnal Péter

2021. tavasz

Erős dualitás: Emlékeztető

Erős dualitás: Emlékeztető

Emlékeztető

A primál feladat optimális értékét p^* -gal, a feladat optimális értékét d^* -gal jelöljük ($d^*, p^* \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$). Igaz a következő **(Gyenge-dualitás tétel)**: $d^* \leq p^*$.

Erős dualitás: Emlékeztető

Emlékeztető

A primál feladat optimális értékét p^* -gal, a feladat optimális értékét d^* -gal jelöljük ($d^*, p^* \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$). Igaz a következő **(Gyenge-dualitás tétel)**: $d^* \leq p^*$.

- Az erős dualitás tételről akkor beszélünk, ha $d^* = p^*$ -t garantálni tudjuk bizonyos feltételek mellett.

Erős dualitás: Emlékeztető

Emlékeztető

A primál feladat optimális értékét p^* -gal, a feladat optimális értékét d^* -gal jelöljük ($d^*, p^* \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$). Igaz a következő (**Gyenge-dualitás tétel**): $d^* \leq p^*$.

- Az erős dualitás tételről akkor beszélünk, ha $d^* = p^*$ -t garantálni tudjuk bizonyos feltételek mellett.
- A „bizonyos” feltételekre sokféle lehetőség van.

Erős dualitás: Emlékeztető

Emlékeztető

A primál feladat optimális értékét p^* -gal, a feladat optimális értékét d^* -gal jelöljük ($d^*, p^* \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$). Igaz a következő **(Gyenge-dualitás tétel)**: $d^* \leq p^*$.

- Az erős dualitás tételről akkor beszélünk, ha $d^* = p^*$ -t garantálni tudjuk bizonyos feltételek mellett.
- A „bizonyos” feltételekre sokféle lehetőség van.
- Egész „iparág” alakult ilyenek kifejlesztésére.

Erős dualitás: Emlékeztető

Emlékeztető

A primál feladat optimális értékét p^* -gal, a feladat optimális értékét d^* -gal jelöljük ($d^*, p^* \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$). Igaz a következő **(Gyenge-dualitás tétel)**: $d^* \leq p^*$.

- Az erős dualitás tételről akkor beszélünk, ha $d^* = p^*$ -t garantálni tudjuk bizonyos feltételek mellett.
- A „bizonyos” feltételekre sokféle lehetőség van.
- Egész „iparág” alakult ilyenek kifejlesztésére. Mi csak egy lehetőséget ismeretünk.

Slater-tétel

Slater-tétel

Slater-tétel

Adott a következő optimalizációs probléma:

Minimalizáljuk	$c(x), -t$
Feltéve, hogy	$f_i(x) \leq 0 \quad i = 1, \dots, k$
	$g_i(x) = 0 \quad i = 1, \dots, \ell$

Slater-tétel

Slater-tétel

Adott a következő optimalizációs probléma:

Minimalizáljuk	$c(x), -t$
Feltéve, hogy	$f_i(x) \leq 0 \quad i = 1, \dots, k$
	$g_i(x) = 0 \quad i = 1, \dots, \ell$

Tegyük fel, hogy

- (1) A probléma konvex. Tehát c és f_i konvex függvény, g_i pedig affín függvény. Ez azt jelenti, hogy a $g_i(x) = 0$ ($i = 1, \dots, \ell$) feltételek a következő alakban írhatók: $Ax - b = 0$, ahol $A \in \mathbb{R}^{\ell \times n}$ és $b \in \mathbb{R}^{\ell}$.

Slater-tétel

Slater-tétel

Adott a következő optimalizálási probléma:

Minimalizáljuk	$c(x)$, -t
Feltéve, hogy	$f_i(x) \leq 0 \quad i = 1, \dots, k$
	$g_i(x) = 0 \quad i = 1, \dots, \ell$

Tegyük fel, hogy

- (1) A probléma konvex. Tehát c és f_i konvex függvény, g_i pedig affin függvény. Ez azt jelenti, hogy a $g_i(x) = 0$ ($i = 1, \dots, \ell$) feltételek a következő alakban írhatók: $Ax - b = 0$, ahol $A \in \mathbb{R}^{\ell \times n}$ és $b \in \mathbb{R}^{\ell}$.
- (S) Létezik olyan $s \in \mathcal{D}$, amelyre

Slater-tétel

Slater-tétel

Adott a következő optimalizációs probléma:

Minimalizáljuk	$c(x), -t$
Feltéve, hogy	$f_i(x) \leq 0 \quad i = 1, \dots, k$
	$g_i(x) = 0 \quad i = 1, \dots, \ell$

Tegyük fel, hogy

- (1) A probléma konvex. Tehát c és f_i konvex függvény, g_i pedig affin függvény. Ez azt jelenti, hogy a $g_i(x) = 0$ ($i = 1, \dots, \ell$) feltételek a következő alakban írhatók: $Ax - b = 0$, ahol $A \in \mathbb{R}^{\ell \times n}$ és $b \in \mathbb{R}^{\ell}$.
- (S) Létezik olyan $s \in \mathcal{D}$, amelyre
 - (i) $f_i(s) < 0$ ($i = 1, \dots, k$) és $g_i(s) = 0$ ($i = 1, \dots, \ell$). Speciálisan $s \in \mathcal{L}$.

Slater-tétel

Slater-tétel

Adott a következő optimalizációs probléma:

Minimalizáljuk	$c(x), -t$
Feltéve, hogy	$f_i(x) \leq 0 \quad i = 1, \dots, k$
	$g_i(x) = 0 \quad i = 1, \dots, \ell$

Tegyük fel, hogy

- (1) A probléma konvex. Tehát c és f_i konvex függvény, g_i pedig affin függvény. Ez azt jelenti, hogy a $g_i(x) = 0$ ($i = 1, \dots, \ell$) feltételek a következő alakban írhatók: $Ax - b = 0$, ahol $A \in \mathbb{R}^{\ell \times n}$ és $b \in \mathbb{R}^{\ell}$.
- (S) Létezik olyan $s \in \mathcal{D}$, amelyre
 - (i) $f_i(s) < 0$ ($i = 1, \dots, k$) és $g_i(s) = 0$ ($i = 1, \dots, \ell$). Speciálisan $s \in \mathcal{L}$.
 - (ii) Továbbá $s \in \text{int } \mathcal{D} = \{x : \exists r > 0 \ B(x, r) \subset \mathcal{D}\}$, \mathcal{D} belső pontjainak halmaza, ahol $B(x, r)$ az x középpontú r sugarú gömb.

Slater-tétel

Slater-tétel

Adott a következő optimalizációs probléma:

Minimalizáljuk	$c(x), -t$
Feltéve, hogy	$f_i(x) \leq 0 \quad i = 1, \dots, k$
	$g_i(x) = 0 \quad i = 1, \dots, \ell$

Tegyük fel, hogy

- (1) A probléma konvex. Tehát c és f_i konvex függvény, g_i pedig affín függvény. Ez azt jelenti, hogy a $g_i(x) = 0$ ($i = 1, \dots, \ell$) feltételek a következő alakban írhatók: $Ax - b = 0$, ahol $A \in \mathbb{R}^{\ell \times n}$ és $b \in \mathbb{R}^{\ell}$.
 - (S) Létezik olyan $s \in \mathcal{D}$, amelyre
 - (i) $f_i(s) < 0$ ($i = 1, \dots, k$) és $g_i(s) = 0$ ($i = 1, \dots, \ell$). Speciálisan $s \in \mathcal{L}$.
 - (ii) Továbbá $s \in \text{int } \mathcal{D} = \{x : \exists r > 0 \ B(x, r) \subset \mathcal{D}\}$, \mathcal{D} belső pontjainak halmaza, ahol $B(x, r)$ az x középpontú r sugarú gömb.
- Ekkor erős dualitás van, azaz $d^* = p^*$.

A feltételekről

A feltételekről

- (S)-et Slater-feltételnek nevezzük.

A feltételekről

- (S) -et Slater-feltételnek nevezzük.
- Az (S) -beli feltételt kielégítő s pontokat Slater-pontoknak nevezzük.

A feltételekről

- (S) -et Slater-feltételnek nevezzük.
- Az (S) -beli feltételt kielégítő s pontokat Slater-pontoknak nevezzük.
- $(S)(i)$ és $(S)(ii)$ gyengíthetők.

A feltételekről

- (S)-et Slater-feltételnek nevezzük.
- Az (S)-beli feltételt kielégítő s pontokat Slater-pontoknak nevezzük.
- (S)(i) és (S)(ii) gyengíthetők. A tétel állítása igaz marad az alábbi (gyengített) feltételek mellett:

(S) (i)₀ Az s Slater-ponttól csak azt kívánjuk meg, hogy $f_i(s) < 0$, ha f_i nem affin, továbbá $f_i(s) \leq 0$, ha affin.

A feltételekről

- (S)-et Slater-feltételnek nevezzük.
- Az (S)-beli feltételt kielégítő s pontokat Slater-pontoknak nevezzük.
- (S)(i) és (S)(ii) gyengíthetők. A tétel állítása igaz marad az alábbi (gyengített) feltételek mellett:

(S) (i)₀ Az s Slater-ponttól csak azt kívánjuk meg, hogy $f_i(s) < 0$, ha f_i nem affin, továbbá $f_i(s) \leq 0$, ha affin.

(S) (ii)₀ $s \in \text{relint } \mathcal{D} = \mathcal{D}$ belső pontjai \mathcal{D} affin burkában (int $\mathcal{D} \subset \text{relint } \mathcal{D}$).

A feltételekről

- (S)-et Slater-feltételnek nevezzük.
- Az (S)-beli feltételt kielégítő s pontokat Slater-pontoknak nevezzük.
- (S)(i) és (S)(ii) gyengíthetők. A tétel állítása igaz marad az alábbi (gyengített) feltételek mellett:
 - (S) (i)₀ Az s Slater-ponttól csak azt kívánjuk meg, hogy $f_i(s) < 0$, ha f_i nem affin, továbbá $f_i(s) \leq 0$, ha affin.
 - (S) (ii)₀ $s \in \text{relint } \mathcal{D} = \mathcal{D}$ belső pontjai \mathcal{D} affin burkában (int $\mathcal{D} \subset \text{relint } \mathcal{D}$).
- Az alábbiakban a bizonyítást írjuk le egy fontos feltevés mellett: A (az egyenlőség, affin feltételrendszer mátrixa) teljes sorrangú.

A feltételekről

- (S)-et Slater-feltételnek nevezzük.
- Az (S)-beli feltételt kielégítő s pontokat Slater-pontoknak nevezzük.
- (S)(i) és (S)(ii) gyengíthetők. A tétel állítása igaz marad az alábbi (gyengített) feltételek mellett:

(S) (i)₀ Az s Slater-ponttól csak azt kívánjuk meg, hogy $f_i(s) < 0$, ha f_i nem affin, továbbá $f_i(s) \leq 0$, ha affin.

(S) (ii)₀ $s \in \text{relint } \mathcal{D} = \mathcal{D}$ belső pontjai \mathcal{D} affin burkában (int $\mathcal{D} \subset \text{relint } \mathcal{D}$).

- Az alábbiakban a bizonyítást írjuk le egy fontos feltevés mellett: A (az egyenlőség, affin feltételrendszer mátrixa) teljes sorrangú.
- A feltevés nélkül a bizonyítás lényegi része megmaradna, csupán néhány technikai bonyodalommal lenne hosszadalmasabb.

Bizonyítás: 1. észrevétel

Bizonyítás: 1. észrevétel

1. Észrevétel

Feltehető, hogy

$$p^* \in \mathbb{R}.$$

Bizonyítás: 1. észrevétel

1. Észrevétel

Feltehető, hogy

$$p^* \in \mathbb{R}.$$

- (S)-ből következik, hogy $\mathcal{L} \neq \emptyset$ amiből $p^* < \infty$.

Bizonyítás: 1. észrevétel

1. Észrevétel

Feltehető, hogy

$$p^* \in \mathbb{R}.$$

- (S)-ből következik, hogy $\mathcal{L} \neq \emptyset$ amiből $p^* < \infty$.
- Továbbá a gyenge dualitásból következik az erős dualitás, ha $p^* = -\infty$. Így feltehető, hogy $p^* > -\infty$. Összegezve .

Bizonyítás: \mathcal{E} , \mathcal{F} és észrevételek

Bizonyítás: \mathcal{E} , \mathcal{F} és észrevételek

- Legyen

$$\mathcal{E} = \{(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_k, \gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_\ell, \tau) \in \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^\ell \times \mathbb{R} :$$

$\exists x \in \mathcal{D}$, hogy

$$\varphi_i \geq f_i(x) \quad i = 1, \dots, k$$

$$\gamma_i = g_i(x) \quad i = 1, \dots, \ell$$

$$\tau \geq c(x)\},$$

Bizonyítás: \mathcal{E} , \mathcal{F} és észrevételek

- Legyen

$$\mathcal{E} = \{(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_k, \gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_\ell, \tau) \in \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^\ell \times \mathbb{R} :$$

$\exists x \in \mathcal{D}$, hogy

$$\varphi_i \geq f_i(x) \quad i = 1, \dots, k$$

$$\gamma_i = g_i(x) \quad i = 1, \dots, \ell$$

$$\tau \geq c(x)\},$$

$$\mathcal{F} = \{(0, 0, \dots, 0, \tau) \in \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^\ell \times \mathbb{R} : \tau < p^*\}.$$

Bizonyítás: \mathcal{E} , \mathcal{F} és észrevételek

- Legyen

$$\mathcal{E} = \{(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_k, \gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_\ell, \tau) \in \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^\ell \times \mathbb{R} :$$

$\exists x \in \mathcal{D}$, hogy

$$\varphi_i \geq f_i(x) \quad i = 1, \dots, k$$

$$\gamma_i = g_i(x) \quad i = 1, \dots, \ell$$

$$\tau \geq c(x)\},$$

$$\mathcal{F} = \{(0, 0, \dots, 0, \tau) \in \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^\ell \times \mathbb{R} : \tau < p^*\}.$$

2. Észrevétel

\mathcal{E} és \mathcal{F} konvex halmazok.

Bizonyítás: \mathcal{E} , \mathcal{F} és észrevételek

- Legyen

$$\mathcal{E} = \{(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_k, \gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_\ell, \tau) \in \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^\ell \times \mathbb{R} :$$

$\exists x \in \mathcal{D}$, hogy

$$\varphi_i \geq f_i(x) \quad i = 1, \dots, k$$

$$\gamma_i = g_i(x) \quad i = 1, \dots, \ell$$

$$\tau \geq c(x)\},$$

$$\mathcal{F} = \{(0, 0, \dots, 0, \tau) \in \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^\ell \times \mathbb{R} : \tau < p^*\}.$$

2. Észrevétel

\mathcal{E} és \mathcal{F} konvex halmazok.

3. Észrevétel

\mathcal{E} zárt a φ_i és τ koordináták növelésére.

Bizonyítás: Lemma

Bizonyítás: Lemma

Lemma

$$\mathcal{E} \cap \mathcal{F} = \emptyset.$$

Bizonyítás: Lemma

Lemma

$$\mathcal{E} \cap \mathcal{F} = \emptyset.$$

- Indirekt úton fogjuk bizonyítani.

Bizonyítás: Lemma

Lemma

$$\mathcal{E} \cap \mathcal{F} = \emptyset.$$

- Indirekt úton fogjuk bizonyítani.
- Tegyük fel, hogy $v \in \mathcal{E} \cap \mathcal{F}$, azaz $v \in \mathcal{E}$ és $v \in \mathcal{F}$.

Bizonyítás: Lemma

Lemma

$$\mathcal{E} \cap \mathcal{F} = \emptyset.$$

- Indirekt úton fogjuk bizonyítani.
- Tegyük fel, hogy $v \in \mathcal{E} \cap \mathcal{F}$, azaz $v \in \mathcal{E}$ és $v \in \mathcal{F}$.
- $v \in \mathcal{F}$ azt jelenti, hogy $v = (0, \dots, 0, \tau)$, ahol $\tau < p^*$.

Bizonyítás: Lemma

Lemma

$$\mathcal{E} \cap \mathcal{F} = \emptyset.$$

- Indirekt úton fogjuk bizonyítani.
- Tegyük fel, hogy $v \in \mathcal{E} \cap \mathcal{F}$, azaz $v \in \mathcal{E}$ és $v \in \mathcal{F}$.
- $v \in \mathcal{F}$ azt jelenti, hogy $v = (0, \dots, 0, \tau)$, ahol $\tau < p^*$.
- $v \in \mathcal{E}$ azt jelenti, hogy van olyan $x \in \mathcal{D}$, amelyre $f_i(x) \leq 0$, $g_i(x) = 0$, továbbá $\tau \geq c(x)$.

Bizonyítás: Lemma

Lemma

$$\mathcal{E} \cap \mathcal{F} = \emptyset.$$

- Indirekt úton fogjuk bizonyítani.
- Tegyük fel, hogy $v \in \mathcal{E} \cap \mathcal{F}$, azaz $v \in \mathcal{E}$ és $v \in \mathcal{F}$.
- $v \in \mathcal{F}$ azt jelenti, hogy $v = (0, \dots, 0, \tau)$, ahol $\tau < p^*$.
- $v \in \mathcal{E}$ azt jelenti, hogy van olyan $x \in \mathcal{D}$, amelyre $f_i(x) \leq 0$, $g_i(x) = 0$, továbbá $\tau \geq c(x)$.
- Azaz $x \in \mathcal{L}$, továbbá $c(x) \leq \tau < p^*$, ami ellentmondás.

Bizonyítás: Szeparációs tétel alkalmazása

Bizonyítás: Szeparációs tétel alkalmazása

Konvex halmazok szeparációs tétele \approx Farkas lemma

K, L konvex és $K \cap L = \emptyset$ akkor létezik H hipersík, amely elválasztja a két halmazt.

Bizonyítás: Szeperációs tétel alkalmazása

Konvex halmazok szeperációs tétele \approx Farkas lemma

K, L konvex és $K \cap L = \emptyset$ akkor létezik H hipersík, amely elválasztja a két halmazt.

Azaz úgy osztja fel a teret H^{\leq} és H^{\geq} zárt félsíkokra, hogy $H^{\leq} \supset K$ és $H^{\geq} \supset L$.

Bizonyítás: Szeperációs tétel alkalmazása

Konvex halmazok szeperációs tétele \approx Farkas lemma

K, L konvex és $K \cap L = \emptyset$ akkor létezik H hipersík, amely elválasztja a két halmazt.

Azaz úgy osztja fel a teret H^{\leq} és H^{\geq} zárt félsíkokra, hogy $H^{\leq} \supset K$ és $H^{\geq} \supset L$.

- A tételből és a 2. Lemmából adódik, hogy létezik $n = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k, \mu_1, \dots, \mu_\ell, \nu)$ ($n \in \mathbb{R}^{k+\ell+1} = \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^\ell \times \mathbb{R}$) nem-nulla vektor és α valós szám, hogy a $H_{n,\alpha} = \{x \in \mathbb{R}^{k+\ell+1}, n^T x = \alpha\}$ hipersík két félterére:

Bizonyítás: Szeperációs tétel alkalmazása

Konvex halmazok szeperációs tétele \approx Farkas lemma

K, L konvex és $K \cap L = \emptyset$ akkor létezik H hipersík, amely elválasztja a két halmazt.

Azaz úgy osztja fel a teret H^{\leq} és H^{\geq} zárt félsíkokra, hogy $H^{\leq} \supset K$ és $H^{\geq} \supset L$.

- A tételből és a 2. Lemmából adódik, hogy létezik $n = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k, \mu_1, \dots, \mu_\ell, \nu)$ ($n \in \mathbb{R}^{k+\ell+1} = \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^\ell \times \mathbb{R}$) nem-nulla vektor és α valós szám, hogy a $H_{n,\alpha} = \{x \in \mathbb{R}^{k+\ell+1}, n^T x = \alpha\}$ hipersík két félterére:

$$H_{n,\alpha}^{\geq} = \{x \in \mathbb{R}^{k+\ell+1} : n^T x \geq \alpha\} \supseteq \mathcal{E},$$

Bizonyítás: Szeperációs tétel alkalmazása

Konvex halmazok szeperációs tétele \approx Farkas lemma

K, L konvex és $K \cap L = \emptyset$ akkor létezik H hipersík, amely elválasztja a két halmazt.

Azaz úgy osztja fel a teret H^{\leq} és H^{\geq} zárt félsíkokra, hogy $H^{\leq} \supset K$ és $H^{\geq} \supset L$.

- A tételből és a 2. Lemmából adódik, hogy létezik $n = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k, \mu_1, \dots, \mu_\ell, \nu)$ ($n \in \mathbb{R}^{k+\ell+1} = \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^\ell \times \mathbb{R}$) nem-nulla vektor és α valós szám, hogy a $H_{n,\alpha} = \{x \in \mathbb{R}^{k+\ell+1}, n^T x = \alpha\}$ hipersík két félterére:

$$H_{n,\alpha}^{\geq} = \{x \in \mathbb{R}^{k+\ell+1} : n^T x \geq \alpha\} \supseteq \mathcal{E},$$

$$H_{n,\alpha}^{\leq} = \{x \in \mathbb{R}^{k+\ell+1} : n^T x \leq \alpha\} \supseteq \mathcal{F}.$$

Bizonyítás: További észrevételek

Bizonyítás: További észrevételek

- A 3. Észrevételből tudjuk, hogy az első k és az utolsó koordináta növelésével \mathcal{E} -ben és így H^{\geq} -ben is maradunk.

Bizonyítás: További észrevételek

- A 3. Észrevételből tudjuk, hogy az első k és az utolsó koordináta növelésével \mathcal{E} -ben és így H^{\geq} -ben is maradunk.

4. Észrevétel

$\lambda \succeq 0$ és $\nu \geq 0$.

Bizonyítás: További észrevételek

- A 3. Észrevételből tudjuk, hogy az első k és az utolsó koordináta növelésével \mathcal{E} -ben és így H^{\geq} -ben is maradunk.

4. Észrevétel

$\lambda \succeq 0$ és $\nu \geq 0$.

- $(0, 0, p^* - \epsilon) \in \mathcal{F}$, amiből $(0, 0, p^* - \epsilon) \in H^{\leq}$, azaz $\nu(p^* - \epsilon) \leq \alpha$. Mivel $\epsilon > 0$ tetszőleges, határátmeneteket kapjuk, hogy

Bizonyítás: További észrevételek

- A 3. Észrevételből tudjuk, hogy az első k és az utolsó koordináta növelésével \mathcal{E} -ben és így H^{\geq} -ben is maradunk.

4. Észrevétel

$\lambda \succeq 0$ és $\nu \geq 0$.

- $(0, 0, p^* - \epsilon) \in \mathcal{F}$, amiből $(0, 0, p^* - \epsilon) \in H^{\leq}$, azaz $\nu(p^* - \epsilon) \leq \alpha$. Mivel $\epsilon > 0$ tetszőleges, határátmeneteket kapjuk, hogy

5. Észrevétel

$\nu p^* \leq \alpha$.

Bizonyítás: További észrevételek

- A 3. Észrevételből tudjuk, hogy az első k és az utolsó koordináta növelésével \mathcal{E} -ben és így H^{\geq} -ben is maradunk.

4. Észrevétel

$\lambda \succeq 0$ és $\nu \geq 0$.

- $(0, 0, p^* - \epsilon) \in \mathcal{F}$, amiből $(0, 0, p^* - \epsilon) \in H^{\leq}$, azaz $\nu(p^* - \epsilon) \leq \alpha$. Mivel $\epsilon > 0$ tetszőleges, határátmeneteket kapjuk, hogy

5. Észrevétel

$\nu p^* \leq \alpha$.

- $x \in \mathcal{D}$ esetén $(f(x), g(x), c(x)) \in \mathcal{E}$,

Bizonyítás: További észrevételek

- A 3. Észrevételből tudjuk, hogy az első k és az utolsó koordináta növelésével \mathcal{E} -ben és így H^{\geq} -ben is maradunk.

4. Észrevétel

$\lambda \succeq 0$ és $\nu \geq 0$.

- $(0, 0, p^* - \epsilon) \in \mathcal{F}$, amiből $(0, 0, p^* - \epsilon) \in H^{\leq}$, azaz $\nu(p^* - \epsilon) \leq \alpha$. Mivel $\epsilon > 0$ tetszőleges, határátmeneteket kapjuk, hogy

5. Észrevétel

$\nu p^* \leq \alpha$.

- $x \in \mathcal{D}$ esetén $(f(x), g(x), c(x)) \in \mathcal{E}$, speciálisan $\in H^{\geq}$.

Bizonyítás: További észrevételek

- A 3. Észrevételből tudjuk, hogy az első k és az utolsó koordináta növelésével \mathcal{E} -ben és így H^{\geq} -ben is maradunk.

4. Észrevétel

$\lambda \succeq 0$ és $\nu \geq 0$.

- $(0, 0, p^* - \epsilon) \in \mathcal{F}$, amiből $(0, 0, p^* - \epsilon) \in H^{\leq}$, azaz $\nu(p^* - \epsilon) \leq \alpha$. Mivel $\epsilon > 0$ tetszőleges, határátmeneteket kapjuk, hogy

5. Észrevétel

$\nu p^* \leq \alpha$.

- $x \in \mathcal{D}$ esetén $(f(x), g(x), c(x)) \in \mathcal{E}$, speciálisan $\in H^{\geq}$.

6. Észrevétel

Minden $x \in \mathcal{D}$ esetén:

$$\sum_{i=1}^k \lambda_i f_i(x) + \sum_{i=1}^{\ell} \mu_i g_i(x) + \nu c(x) \geq \alpha.$$

Bizonyítás: 1. eset: $\nu \neq 0$ ($\nu > 0$)

Bizonyítás: 1. eset: $\nu \neq 0$ ($\nu > 0$)

- Ekkor minden $x \in \mathcal{D}$ -re

$$L\left(\frac{\lambda_i}{\nu}, \frac{\mu_i}{\nu}, x\right) = \sum_{i=1}^k \frac{\lambda_i}{\nu} f_i(x) + \frac{\mu_i}{\nu} g_i(x) + c(x) \geq \frac{\alpha}{\nu}.$$

Bizonyítás: 1. eset: $\nu \neq 0$ ($\nu > 0$)

- Ekkor minden $x \in \mathcal{D}$ -re

$$L\left(\frac{\lambda_i}{\nu}, \frac{\mu_i}{\nu}, x\right) = \sum_{i=1}^k \frac{\lambda_i}{\nu} f_i(x) + \frac{\mu_i}{\nu} g_i(x) + c(x) \geq \frac{\alpha}{\nu}.$$

- Adódik

$$\tilde{c}\left(\frac{\lambda_i}{\nu}, \frac{\mu_i}{\nu}\right) \geq \frac{\alpha}{\nu} \geq p^*.$$

$\left(\frac{\lambda_i}{\nu}\right)_{i=1}^k$ a duális optimalizálási feladat lehetséges megoldásai.

Bizonyítás: 1. eset: $\nu \neq 0$ ($\nu > 0$)

- Ekkor minden $x \in \mathcal{D}$ -re

$$L\left(\frac{\lambda_i}{\nu}, \frac{\mu_i}{\nu}, x\right) = \sum_{i=1}^k \frac{\lambda_i}{\nu} f_i(x) + \frac{\mu_i}{\nu} g_i(x) + c(x) \geq \frac{\alpha}{\nu}.$$

- Adódik

$$\tilde{c}\left(\frac{\lambda_i}{\nu}, \frac{\mu_i}{\nu}\right) \geq \frac{\alpha}{\nu} \geq p^*.$$

$\left(\frac{\lambda_i}{\nu}\right)_{i=1}^k$ a duális optimalizálási feladat lehetséges megoldásai.

- Ebből és az előző egyenlőtlenségből adódik, hogy

$$d^* \geq \tilde{c}\left(\frac{\lambda_i}{\nu}, \frac{\mu_i}{\nu}\right) \geq p^*.$$

Bizonyítás: 1. eset: $\nu \neq 0$ ($\nu > 0$)

- Ekkor minden $x \in \mathcal{D}$ -re

$$L\left(\frac{\lambda_i}{\nu}, \frac{\mu_i}{\nu}, x\right) = \sum_{i=1}^k \frac{\lambda_i}{\nu} f_i(x) + \frac{\mu_i}{\nu} g_i(x) + c(x) \geq \frac{\alpha}{\nu}.$$

- Adódik

$$\tilde{c}\left(\frac{\lambda_i}{\nu}, \frac{\mu_i}{\nu}\right) \geq \frac{\alpha}{\nu} \geq p^*.$$

$\left(\frac{\lambda_i}{\nu}\right)_{i=1}^k$ a duális optimalizálási feladat lehetséges megoldásai.

- Ebből és az előző egyenlőtlenségből adódik, hogy

$$d^* \geq \tilde{c}\left(\frac{\lambda_i}{\nu}, \frac{\mu_i}{\nu}\right) \geq p^*.$$

- A gyenge dualitással összevetve, kapjuk az erős dualitást.

Bizonyítás: 2. eset: $\nu = 0$

Bizonyítás: 2. eset: $\nu = 0$

- Ekkor $\sum_{i=1}^k \lambda_i f_i(x) + \sum_{i=1}^{\ell} \mu_i g_i(x) \geq \alpha \geq \nu p^* = 0$ minden $x \in \mathcal{D}$ esetén.

Bizonyítás: 2. eset: $\nu = 0$

- Ekkor $\sum_{i=1}^k \lambda_i f_i(x) + \sum_{i=1}^{\ell} \mu_i g_i(x) \geq \alpha \geq \nu p^* = 0$ minden $x \in \mathcal{D}$ esetén.
- Írjuk fel az egyenlőtlenséget $x = s$ pontra, ahol s egy Slater-pont.

$$\sum_{i=1}^k \lambda_i f_i(s) + \sum_{i=1}^{\ell} \mu_i g_i(s) \geq 0, \quad \text{ahol } \lambda_i \geq 0, f_i(s) < 0 \text{ és } g_i(s) = 0.$$

Bizonyítás: 2. eset: $\nu = 0$

- Ekkor $\sum_{i=1}^k \lambda_i f_i(x) + \sum_{i=1}^{\ell} \mu_i g_i(x) \geq \alpha \geq \nu p^* = 0$ minden $x \in \mathcal{D}$ esetén.
- Írjuk fel az egyenlőtlenséget $x = s$ pontra, ahol s egy Slater-pont.

$$\sum_{i=1}^k \lambda_i f_i(s) + \sum_{i=1}^{\ell} \mu_i g_i(s) \geq 0, \quad \text{ahol } \lambda_i \geq 0, f_i(s) < 0 \text{ és } g_i(s) = 0.$$

- Ekkor minden i -re λ_i -nek nullának kell, hogy legyen.

Bizonyítás: 2. eset: $\nu = 0$

- Ekkor $\sum_{i=1}^k \lambda_i f_i(x) + \sum_{i=1}^{\ell} \mu_i g_i(x) \geq \alpha \geq \nu p^* = 0$ minden $x \in \mathcal{D}$ esetén.
- Írjuk fel az egyenlőtlenséget $x = s$ pontra, ahol s egy Slater-pont.

$$\sum_{i=1}^k \lambda_i f_i(s) + \sum_{i=1}^{\ell} \mu_i g_i(s) \geq 0, \quad \text{ahol } \lambda_i \geq 0, f_i(s) < 0 \text{ és } g_i(s) = 0.$$

- Ekkor minden i -re λ_i -nek nullának kell, hogy legyen.
- Kiinduló egyenlőtlenségünk újra egyszerűsödik:

$$\sum_{i=1}^{\ell} \mu_i g_i(x) \geq 0,$$

ami átírva $\mu^T(Ax - b) \geq 0$ minden $x \in \mathcal{D}$ -re.

Bizonyítás: 2.eset (folytatás)

Bizonyítás: 2.eset (folytatás)

- Legyen $x = s + \delta$, ahol $\delta \in \mathbb{R}^{k+\ell+1}$ és $|\delta| < r_0$, ahol r_0 olyan kicsi, hogy $B(s, r_0) \subset \mathcal{D}$.

$$\begin{aligned}\mu^T(A(s + \delta) - b) &= \mu^T(As + A\delta - b) = \mu^T(b + A\delta - b) \\ &= \mu^T A\delta = \sum_{i=1}^{\ell} (\mu^T A)_i \delta_i \geq 0.\end{aligned}$$

Bizonyítás: 2.eset (folytatás)

- Legyen $x = s + \delta$, ahol $\delta \in \mathbb{R}^{k+\ell+1}$ és $|\delta| < r_0$, ahol r_0 olyan kicsi, hogy $B(s, r_0) \subset \mathcal{D}$.

$$\begin{aligned}\mu^T(A(s + \delta) - b) &= \mu^T(As + A\delta - b) = \mu^T(b + A\delta - b) \\ &= \mu^T A\delta = \sum_{i=1}^{\ell} (\mu^T A)_i \delta_i \geq 0.\end{aligned}$$

- Ez teljesül $-\delta$ -ra is, amiből $\mu^T A = 0$.

Bizonyítás: 2.eset (folytatás)

- Legyen $x = s + \delta$, ahol $\delta \in \mathbb{R}^{k+\ell+1}$ és $|\delta| < r_0$, ahol r_0 olyan kicsi, hogy $B(s, r_0) \subset \mathcal{D}$.

$$\begin{aligned}\mu^T(A(s + \delta) - b) &= \mu^T(As + A\delta - b) = \mu^T(b + A\delta - b) \\ &= \mu^T A\delta = \sum_{i=1}^{\ell} (\mu^T A)_i \delta_i \geq 0.\end{aligned}$$

- Ez teljesül $-\delta$ -ra is, amiből $\mu^T A = 0$.
- Kezdeti feltételünk (A teljes sorrangú) miatt $\mu = 0$.

Bizonyítás: 2.eset (folytatás)

- Legyen $x = s + \delta$, ahol $\delta \in \mathbb{R}^{k+\ell+1}$ és $|\delta| < r_0$, ahol r_0 olyan kicsi, hogy $B(s, r_0) \subset \mathcal{D}$.

$$\begin{aligned}\mu^T(A(s + \delta) - b) &= \mu^T(As + A\delta - b) = \mu^T(b + A\delta - b) \\ &= \mu^T A\delta = \sum_{i=1}^{\ell} (\mu^T A)_i \delta_i \geq 0.\end{aligned}$$

- Ez teljesül $-\delta$ -ra is, amiből $\mu^T A = 0$.
- Kezdeti feltételünk (A teljes sorrangú) miatt $\mu = 0$.
- Így $n = (\lambda, \mu, \nu) = 0$, ami ellentmondás.

Szünet



Laza feltételek, gyenge dualitás emlékeztető

Laza feltételek, gyenge dualitás emlékeztető

Jelölés

Legyen $x \in \mathcal{L}$. Azt mondjuk, hogy x -ben az i -edik egyenlőtlenség feltétel laza, ha

$$f_i(x) < 0.$$

Laza feltételek, gyenge dualitás emlékeztető

Jelölés

Legyen $x \in \mathcal{L}$. Azt mondjuk, hogy x -ben az i -edik egyenlőtlenség feltétel laza, ha

$$f_i(x) < 0.$$

- Legyen x^* primál optimális hely és (λ^*, μ^*) duál optimális hely. Speciálisan $\lambda^* \succeq 0$.

Laza feltételek, gyenge dualitás emlékeztető

Jelölés

Legyen $x \in \mathcal{L}$. Azt mondjuk, hogy x -ben az i -edik egyenlőtlenség feltétel laza, ha

$$f_i(x) < 0.$$

- Legyen x^* primál optimális hely és (λ^*, μ^*) duál optimális hely. Speciálisan $\lambda^* \succeq 0$.
- A gyenge duálitás bizonyítását összefoglaljuk.

Laza feltételek, gyenge dualitás emlékeztető

Jelölés

Legyen $x \in \mathcal{L}$. Azt mondjuk, hogy x -ben az i -edik egyenlőtlenség feltétel laza, ha

$$f_i(x) < 0.$$

- Legyen x^* primál optimális hely és (λ^*, μ^*) duál optimális hely. Speciálisan $\lambda^* \succeq 0$.
- A gyenge duálitás bizonyítását összefoglaljuk.
- Legyen $L(\lambda, \mu, x) = c(x) + \lambda^T f(x) + \mu^T g(x)$.

Laza feltételek, gyenge dualitás emlékeztető

Jelölés

Legyen $x \in \mathcal{L}$. Azt mondjuk, hogy x -ben az i -edik egyenlőtlenség feltétel laza, ha

$$f_i(x) < 0.$$

- Legyen x^* primál optimális hely és (λ^*, μ^*) duál optimális hely. Speciálisan $\lambda^* \succeq 0$.

- A gyenge duálitás bizonyítását összefoglaljuk.

- Legyen $L(\lambda, \mu, x) = c(x) + \lambda^T f(x) + \mu^T g(x)$.

- Ekkor

$$\begin{aligned} d^* = \tilde{c}(\lambda^*, \mu^*) &= \inf L(\lambda^*, \mu^*, x) = \inf_{x \in \mathcal{D}} (c(x) + (\lambda^*)^T f(x) + (\mu^*)^T g(x)) \\ &\leq c(x^*) + (\lambda^*)^T f(x^*) + (\mu^*)^T g(x^*) \leq c(x^*) = p^*. \end{aligned}$$

Laza feltételek, gyenge dualitás emlékeztető

Jelölés

Legyen $x \in \mathcal{L}$. Azt mondjuk, hogy x -ben az i -edik egyenlőtlenség feltétel laza, ha

$$f_i(x) < 0.$$

- Legyen x^* primál optimális hely és (λ^*, μ^*) duál optimális hely. Speciálisan $\lambda^* \succeq 0$.

- A gyenge duálitás bizonyítását összefoglaljuk.

- Legyen $L(\lambda, \mu, x) = c(x) + \lambda^T f(x) + \mu^T g(x)$.

- Ekkor

$$\begin{aligned} d^* = \tilde{c}(\lambda^*, \mu^*) &= \inf L(\lambda^*, \mu^*, x) = \inf_{x \in \mathcal{D}} (c(x) + (\lambda^*)^T f(x) + (\mu^*)^T g(x)) \\ &\leq c(x^*) + (\lambda^*)^T f(x^*) + (\mu^*)^T g(x^*) \leq c(x^*) = p^*. \end{aligned}$$

- Amennyiben erős dualitás van, akkor végig egyenlőség teljesül.

Gyenge dualitás: Második egyenlőtlenség analízise

Gyenge dualitás: Második egyenlőtlenség analízise

$$\begin{aligned}d^* = \tilde{c}(\lambda^*, \mu^*) &= \inf L(\lambda^*, \mu^*, x) = \inf_{x \in \mathcal{D}} (c(x) + (\lambda^*)^\top f(x) + (\mu^*)^\top g(x)) \\ &\leq c(x^*) + (\lambda^*)^\top f(x^*) + (\mu^*)^\top g(x^*) \leq c(x^*) = p^*.\end{aligned}$$

Gyenge dualitás: Második egyenlőtlenség analízise

$$\begin{aligned}d^* &= \tilde{c}(\lambda^*, \mu^*) = \inf L(\lambda^*, \mu^*, x) = \inf_{x \in \mathcal{D}} (c(x) + (\lambda^*)^T f(x) + (\mu^*)^T g(x)) \\ &\leq c(x^*) + (\lambda^*)^T f(x^*) + (\mu^*)^T g(x^*) \leq c(x^*) = p^*.\end{aligned}$$

Definíció

Legyen x_0 primál lehetséges megoldás, azaz $f_i(x_0) \leq 0$, $g_i(x_0) = 0$.
Legyen (λ_0, μ_0) duál lehetséges megoldás, azaz $(\lambda_0)_i \geq 0$. Ezen megoldaspár rendelkezik a *komplemetáris lazasági tulajdonsággal*, ha

- (i) $f_i(x_0) < 0$, akkor $(\lambda_0)_i = 0$.
- (ii) $(\lambda_0)_i > 0$, akkor $f_i(x_0) = 0$.

Gyenge dualitás: Második egyenlőtlenség analízise

$$d^* = \tilde{c}(\lambda^*, \mu^*) = \inf L(\lambda^*, \mu^*, x) = \inf_{x \in \mathcal{D}} (c(x) + (\lambda^*)^T f(x) + (\mu^*)^T g(x)) \\ \leq c(x^*) + (\lambda^*)^T f(x^*) + (\mu^*)^T g(x^*) \leq c(x^*) = p^*.$$

Definíció

Legyen x_0 primál lehetséges megoldás, azaz $f_i(x_0) \leq 0$, $g_i(x_0) = 0$.
 Legyen (λ_0, μ_0) duál lehetséges megoldás, azaz $(\lambda_0)_i \geq 0$. Ezen
 megoldáspár rendelkezik a *komplementáris lazasági tulajdonsággal*,
 ha

- (i) $f_i(x_0) < 0$, akkor $(\lambda_0)_i = 0$.
- (ii) $(\lambda_0)_i > 0$, akkor $f_i(x_0) = 0$.

Észrevétel

Az első egyenlőtlenségben akkor és csak akkor van egyenlőség, ha x^* és (λ^*, μ^*) komplementárisan laza tulajdonságú.

Gyenge dualitás: Első egyenlőtlenség analízise

Gyenge dualitás: Első egyenlőtlenség analízise

$$\begin{aligned}d^* = \tilde{c}(\lambda^*, \mu^*) &= \inf L(\lambda^*, \mu^*, x) = \inf_{x \in \mathcal{D}} (c(x) + (\lambda^*)^\top f(x) + (\mu^*)^\top g(x)) \\ &\leq c(x^*) + (\lambda^*)^\top f(x^*) + (\mu^*)^\top g(x^*) \leq c(x^*) = p^*.\end{aligned}$$

Gyenge dualitás: Első egyenlőtlenség analízise

$$\begin{aligned}d^* = \tilde{c}(\lambda^*, \mu^*) &= \inf L(\lambda^*, \mu^*, x) = \inf_{x \in \mathcal{D}} (c(x) + (\lambda^*)^\top f(x) + (\mu^*)^\top g(x)) \\ &\leq c(x^*) + (\lambda^*)^\top f(x^*) + (\mu^*)^\top g(x^*) \leq c(x^*) = p^*.\end{aligned}$$

Észrevétel

Ha az első egyenlőtlenség egyenlőség, akkor $c(x) + (\lambda^*)^\top f(x) + (\mu^*)^\top g(x)$ függvényeknek x^* egy optimális helye.

Gyenge dualitás: Első egyenlőtlenség analízise

$$\begin{aligned}d^* = \tilde{c}(\lambda^*, \mu^*) &= \inf L(\lambda^*, \mu^*, x) = \inf_{x \in \mathcal{D}} (c(x) + (\lambda^*)^\top f(x) + (\mu^*)^\top g(x)) \\ &\leq c(x^*) + (\lambda^*)^\top f(x^*) + (\mu^*)^\top g(x^*) \leq c(x^*) = p^*.\end{aligned}$$

Észrevétel

Ha az első egyenlőtlenség egyenlőség, akkor $c(x) + (\lambda^*)^\top f(x) + (\mu^*)^\top g(x)$ függvényeknek x^* egy optimális helye.

Tegyük fel, hogy c és f_i függvények differenciálhatók.

Gyenge dualitás: Első egyenlőtlenség analízise

$$\begin{aligned}d^* &= \tilde{c}(\lambda^*, \mu^*) = \inf L(\lambda^*, \mu^*, x) = \inf_{x \in \mathcal{D}} (c(x) + (\lambda^*)^\top f(x) + (\mu^*)^\top g(x)) \\ &\leq c(x^*) + (\lambda^*)^\top f(x^*) + (\mu^*)^\top g(x^*) \leq c(x^*) = p^*.\end{aligned}$$

Észrevétel

Ha az első egyenlőtlenség egyenlőség, akkor $c(x) + (\lambda^*)^\top f(x) + (\mu^*)^\top g(x)$ függvényeknek x^* egy optimális helye.

Tegyük fel, hogy c és f_i függvények differenciálhatók. Ekkor

$$\nabla c(x^*) + (\lambda^*)^\top \nabla f(x^*) + (\mu^*)^\top \nabla g(x^*) = 0.$$

Gyenge dualitás: Első egyenlőtlenség analízise

$$\begin{aligned}d^* = \tilde{c}(\lambda^*, \mu^*) &= \inf L(\lambda^*, \mu^*, x) = \inf_{x \in \mathcal{D}} (c(x) + (\lambda^*)^\top f(x) + (\mu^*)^\top g(x)) \\ &\leq c(x^*) + (\lambda^*)^\top f(x^*) + (\mu^*)^\top g(x^*) \leq c(x^*) = p^*.\end{aligned}$$

Észrevétel

Ha az első egyenlőtlenség egyenlőség, akkor $c(x) + (\lambda^*)^\top f(x) + (\mu^*)^\top g(x)$ függvényeknek x^* egy optimális helye.

Tegyük fel, hogy c és f_i függvények differenciálhatók. Ekkor

$$\nabla c(x^*) + (\lambda^*)^\top \nabla f(x^*) + (\mu^*)^\top \nabla g(x^*) = 0.$$

Tegyük fel, hogy c , f_i konvexek és g_i affin.

Gyenge dualitás: Első egyenlőtlenség analízise

$$d^* = \tilde{c}(\lambda^*, \mu^*) = \inf L(\lambda^*, \mu^*, x) = \inf_{x \in \mathcal{D}} (c(x) + (\lambda^*)^\top f(x) + (\mu^*)^\top g(x)) \\ \leq c(x^*) + (\lambda^*)^\top f(x^*) + (\mu^*)^\top g(x^*) \leq c(x^*) = p^*.$$

Észrevétel

Ha az első egyenlőtlenség egyenlőség, akkor $c(x) + (\lambda^*)^\top f(x) + (\mu^*)^\top g(x)$ függvényeknek x^* egy optimális helye.

Tegyük fel, hogy c és f_i függvények differenciálhatók. Ekkor

$$\nabla c(x^*) + (\lambda^*)^\top \nabla f(x^*) + (\mu^*)^\top \nabla g(x^*) = 0.$$

Tegyük fel, hogy c , f_i konvexek és g_i affin. Ekkor $c(x) + (\lambda^*)^\top f(x) + (\mu^*)^\top g(x)$ is konvex ($\lambda^* \succeq 0$).

Gyenge dualitás: Első egyenlőtlenség analízise

$$d^* = \tilde{c}(\lambda^*, \mu^*) = \inf L(\lambda^*, \mu^*, x) = \inf_{x \in \mathcal{D}} (c(x) + (\lambda^*)^\top f(x) + (\mu^*)^\top g(x)) \\ \leq c(x^*) + (\lambda^*)^\top f(x^*) + (\mu^*)^\top g(x^*) \leq c(x^*) = p^*.$$

Észrevétel

Ha az első egyenlőtlenség egyenlőség, akkor $c(x) + (\lambda^*)^\top f(x) + (\mu^*)^\top g(x)$ függvényeknek x^* egy optimális helye.

Tegyük fel, hogy c és f_i függvények differenciálhatók. Ekkor

$$\nabla c(x^*) + (\lambda^*)^\top \nabla f(x^*) + (\mu^*)^\top \nabla g(x^*) = 0.$$

Tegyük fel, hogy c , f_i konvexek és g_i affin. Ekkor $c(x) + (\lambda^*)^\top f(x) + (\mu^*)^\top g(x)$ is konvex ($\lambda^* \succeq 0$). Ekkor a fenti feltétel szükséges és elégséges is a második egyenlőtlenség egyenlőségként való teljesüléséhez.

Karush—Kuhn—Tucher-tétel: Előzmények

Karush—Kuhn—Tucher-tétel: Előzmények

- A tétel Karush MSc tézise volt a 30-as években.

Karush—Kuhn—Tucher-tétel: Előzmények

- A tétel Karush MSc tézise volt a 30-as években.
- Később Kuhn és Tucker is felfedezik a tételt és ők tették ismertté az 50-es években.

Karush—Kuhn—Tucher-tétel: Előzmények

- A tétel Karush MSc tézise volt a 30-as években.
- Később Kuhn és Tucker is felfedezik a tételt és ők tették ismertté az 50-es években.

Tegyük fel, hogy c, f_i, g_j differenciálhatóak. Továbbá c, f_i konvexek és g_j affin.

Karush—Kuhn—Tucher-tétel: Előzmények

- A tétel Karush MSc tézise volt a 30-as években.
- Később Kuhn és Tucker is felfedezik a tételt és ők tették ismertté az 50-es években.

Tegyük fel, hogy c, f_i, g_j differenciálhatóak. Továbbá c, f_i konvexek és g_j affin.

Definíció: Karush—Kuhn—Tucker-feltételek

$x^* \in \mathbb{R}^n, (\lambda^*, \mu^*) \in \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^\ell$ esetén

(KKT1) $f_i(x^*) \leq 0$ és $g_j(x^*) = 0$, azaz x primál lehetséges megoldás.

(KKT2) $\lambda_i^* \geq 0$, azaz (λ^*, μ^*) duál lehetséges megoldás.

(KKT3) x^* és (λ^*, μ^*) komplementárisan laza tulajdonságú.

(KKT4) $(\nabla c)(x^*) + (\lambda^*)^T \nabla f(x^*) + (\mu^*)^T \nabla g(x^*) = 0$.

Karush—Kuhn—Tucker-tétel: A Tétel

Karush—Kuhn—Tucker-tétel: A Tétel

KKT tétel

Tegyük fel, hogy g_i affin függvény, c , f_i konvex és differenciálható függvények.

Karush—Kuhn—Tucker-tétel: A Tétel

KKT tétel

Tegyük fel, hogy g_i affin függvény, c , f_i konvex és differenciálható függvények.

Ha van erős dualitás optimális helyekkel, akkor van olyan x_0 és (λ_0, μ_0) , amelyek teljesítik a (KKT1), (KKT2), (KKT3), (KKT4) feltételeket.

Karush—Kuhn—Tucker-tétel: A Tétel

KKT tétel

Tegyük fel, hogy g_i affin függvény, c , f_i konvex és differenciálható függvények.

Ha van erős dualitás optimális helyekkel, akkor van olyan x_0 és (λ_0, μ_0) , amelyek teljesítik a (KKT1), (KKT2), (KKT3), (KKT4) feltételeket.

Fordítva ha van x_0 , (λ_0, μ_0) , amelyek teljesítik a (KKT1), (KKT2), (KKT3), (KKT4) feltételeket akkor erős dualitás van és ezek primál és duál optimum helyek.

Karush—Kuhn—Tucker-tétel: A Tétel

KKT tétel

Tegyük fel, hogy g_i affin függvény, c , f_i konvex és differenciálható függvények.

Ha van erős dualitás optimális helyekkel, akkor van olyan x_0 és (λ_0, μ_0) , amelyek teljesítik a (KKT1), (KKT2), (KKT3), (KKT4) feltételeket.

Fordítva ha van x_0 , (λ_0, μ_0) , amelyek teljesítik a (KKT1), (KKT2), (KKT3), (KKT4) feltételeket akkor erős dualitás van és ezek primál és duál optimum helyek.

- A tétel első részét láttuk korábban.

Az elégség igazolása

Az elégség igazolása

$$\begin{aligned}\tilde{c}(\lambda_0, \mu_0) &= \inf(c(x) + \lambda_0^\top f(x) + \mu_0^\top g(x)) \\ &\stackrel{\text{(KKT4)}}{=} c(x_0) + \lambda_0^\top f(x_0) + \mu_0^\top g(x_0) \\ &\stackrel{\text{(KKT3)}}{=} c(x_0).\end{aligned}$$

Az elégség igazolása

$$\begin{aligned}\tilde{c}(\lambda_0, \mu_0) &= \inf(c(x) + \lambda_0^T f(x) + \mu_0^T g(x)) \\ &\stackrel{\text{(KKT4)}}{=} c(x_0) + \lambda_0^T f(x_0) + \mu_0^T g(x_0) \\ &\stackrel{\text{(KKT3)}}{=} c(x_0).\end{aligned}$$

Hiszen KKT4 a differenciálhatósági és konvexitási feltétel miatt szükséges és elegendő feltétele annak, hogy x_0 optimum hely legyen.

Az elégség igazolása

$$\begin{aligned}
 \tilde{c}(\lambda_0, \mu_0) &= \inf(c(x) + \lambda_0^\top f(x) + \mu_0^\top g(x)) \\
 &\stackrel{\text{(KKT4)}}{=} c(x_0) + \lambda_0^\top f(x_0) + \mu_0^\top g(x_0) \\
 &\stackrel{\text{(KKT3)}}{=} c(x_0).
 \end{aligned}$$

Hiszen KKT4 a differenciálhatósági és konvexitási feltétel miatt szükséges és elegendő feltétele annak, hogy x_0 optimum hely legyen.

Ezekután

$$d^* \stackrel{\text{(KKT2)}}{\geq} \tilde{c}(\lambda_0, \mu_0) = c(x_0) \stackrel{\text{(KKT1)}}{\geq} p^* \stackrel{\text{gyenge dualitás}}{\geq} d^*.$$

Az elégség igazolása

$$\begin{aligned}
 \tilde{c}(\lambda_0, \mu_0) &= \inf(c(x) + \lambda_0^\top f(x) + \mu_0^\top g(x)) \\
 &\stackrel{\text{(KKT4)}}{=} c(x_0) + \lambda_0^\top f(x_0) + \mu_0^\top g(x_0) \\
 &\stackrel{\text{(KKT3)}}{=} c(x_0).
 \end{aligned}$$

Hiszen KKT4 a differenciálhatósági és konvexitási feltétel miatt szükséges és elegendő feltétele annak, hogy x_0 optimum hely legyen.

Ezekután

$$d^* \stackrel{\text{(KKT2)}}{\geq} \tilde{c}(\lambda_0, \mu_0) = c(x_0) \stackrel{\text{(KKT1)}}{\geq} p^* \stackrel{\text{gyenge dualitás}}{\geq} d^*.$$

Az egyenlőtlenség láncból kiolvasható, hogy végig egyenlőség teljesül, azaz erős dualitás van, x_0 primál optimál hely és (λ_0, μ_0) duál optimál hely.

KKT: Példa I

KKT: Példa I

Minimalizáljuk	$\frac{1}{2}x^T P x + q^T x + r - t$
Feltéve, hogy	$Ax = b,$

ahol $P \in S_+^n$.

KKT: Példa I

Minimalizáljuk	$\frac{1}{2}x^T P x + q^T x + r$
Feltéve, hogy	$Ax = b,$

ahol $P \in \mathcal{S}_+^n$.

- $c(x)$ konvex ($P \in \mathcal{S}_+^n$) és differenciálható, azaz KKT tétel alkalmazható.

KKT: Példa I

Minimalizáljuk	$\frac{1}{2}x^T P x + q^T x + r - t$
Feltéve, hogy	$Ax = b,$

ahol $P \in \mathcal{S}_+^n$.

- $c(x)$ konvex ($P \in \mathcal{S}_+^n$) és differenciálható, azaz KKT tétel alkalmazható.
- Olyan x_0, μ_0 értékeket kell keresnünk, amelyek mind a négy Karush—Kuhn-Tucker-feltételt teljesítik:

KKT: Példa I

Minimalizáljuk	$\frac{1}{2}x^T P x + q^T x + r$
Feltéve, hogy	$Ax = b,$

ahol $P \in \mathcal{S}_+^n$.

- $c(x)$ konvex ($P \in \mathcal{S}_+^n$) és differenciálható, azaz KKT tétel alkalmazható.
- Olyan x_0, μ_0 értékeket kell keresnünk, amelyek mind a négy Karush—Kuhn-Tucker-feltételt teljesítik:
(KKT1): $Ax_0 = b$.

KKT: Példa I

Minimalizáljuk	$\frac{1}{2}x^T P x + q^T x + r$
Feltéve, hogy	$Ax = b,$

ahol $P \in S_+^n$.

- $c(x)$ konvex ($P \in S_+^n$) és differenciálható, azaz KKT tétel alkalmazható.
- Olyan x_0, μ_0 értékeket kell keresnünk, amelyek mind a négy Karush—Kuhn-Tucker-feltételt teljesítik:
(KKT1): $Ax_0 = b$.
(KKT2): \emptyset .

KKT: Példa I

Minimalizáljuk	$\frac{1}{2}x^T P x + q^T x + r$
Feltéve, hogy	$Ax = b,$

ahol $P \in \mathcal{S}_+^n$.

- $c(x)$ konvex ($P \in \mathcal{S}_+^n$) és differenciálható, azaz KKT tétel alkalmazható.
- Olyan x_0, μ_0 értékeket kell keresnünk, amelyek mind a négy Karush—Kuhn-Tucker-feltételt teljesítik:

(KKT1): $Ax_0 = b$.

(KKT2): \emptyset .

(KKT3): \emptyset .

KKT: Példa I

Minimalizáljuk	$\frac{1}{2}x^T P x + q^T x + r$
Feltéve, hogy	$Ax = b,$

ahol $P \in \mathcal{S}_+^n$.

- $c(x)$ konvex ($P \in \mathcal{S}_+^n$) és differenciálható, azaz KKT tétel alkalmazható.
- Olyan x_0, μ_0 értékeket kell keresnünk, amelyek mind a négy Karush—Kuhn-Tucker-feltételt teljesítik:

(KKT1): $Ax_0 = b.$

(KKT2): $\emptyset.$

(KKT3): $\emptyset.$

(KKT4): $\nabla c(x_0) + \mu_0^T \nabla(Ax - b)|_{x=x_0} = 0,$ azaz

$$Px_0 + q + A^T \mu_0 = 0.$$

KKT: Példa I (folytatás)

KKT: Példa I (folytatás)

- A keresett x_0, μ_0 -k tulajdonságai összefoglalva:

KKT: Példa I (folytatás)

- A keresett x_0, μ_0 -k tulajdonságai összefoglalva:

$$\begin{pmatrix} P_{n \times n} & A_{n \times k}^T \\ A_{k \times n} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ \mu_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -q \\ b \end{pmatrix}.$$

KKT: Példa I (folytatás)

- A keresett x_0, μ_0 -k tulajdonságai összefoglalva:

$$\begin{pmatrix} P_{n \times n} & A_{n \times k}^T \\ A_{k \times n} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ \mu_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -q \\ b \end{pmatrix}.$$

- Ezen egyenletrendszer megoldhatóságának diszkussziója, illetve megoldhatóság esetén a megoldás megkeresése egyszerű lineáris algebrai feladat.

KKT: Példa II

KKT: Példa II

Példa

Minimalizáljuk	$2x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 - 10x_1 - 10x_2 - t$
Feltéve, hogy	$x_1^2 + x_2^2 \leq 5,$
	$3x_1 + x_2 \leq 6.$

KKT: Példa II

Példa

Minimalizáljuk	$2x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 - 10x_1 - 10x_2 - t$
Feltéve, hogy	$x_1^2 + x_2^2 \leq 5,$
	$3x_1 + x_2 \leq 6.$

- Esetünkben $\mathcal{D} = \mathbb{R}^2$.

KKT: Példa II

Példa

Minimalizáljuk	$2x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 - 10x_1 - 10x_2$ -t
Feltéve, hogy	$x_1^2 + x_2^2 \leq 5,$
	$3x_1 + x_2 \leq 6.$

- Esetünkben $\mathcal{D} = \mathbb{R}^2$.
- Könnyen ellenőrizhető, hogy a célfüggvény konvex, az egyenlőtlenség feltételek f_i függvényei is konvexek.

KKT: Példa II

Példa

Minimalizáljuk	$2x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 - 10x_1 - 10x_2 - t$
Feltéve, hogy	$x_1^2 + x_2^2 \leq 5,$
	$3x_1 + x_2 \leq 6.$

- Esetünkben $\mathcal{D} = \mathbb{R}^2$.
- Könnyen ellenőrizhető, hogy a célfüggvény konvex, az egyenlőtlenség feltételek f_i függvényei is konvexek.
- Minden előforduló függvény differenciálható.

KKT: Példa II (folytatás)

KKT: Példa II (folytatás)

- A KKT olyan primál/duál $x_1, x_2, \lambda_1, \lambda_2$ helyett keres, amelyek eleget tesznek a primál/duál feltételeknek ((KKT1) és (KKT2)):

$$x_1^2 + x_2^2 \leq 5, \quad 3x_1 + x_2 \leq 6, \quad \lambda_1 \geq 0, \quad \lambda_2 \geq 0.$$

KKT: Példa II (folytatás)

- A KKT olyan primál/duál $x_1, x_2, \lambda_1, \lambda_2$ helyett keres, amelyek eleget tesznek a primál/duál feltételeknek ((KKT1) és (KKT2)):

$$x_1^2 + x_2^2 \leq 5, \quad 3x_1 + x_2 \leq 6, \quad \lambda_1 \geq 0, \quad \lambda_2 \geq 0.$$

Továbbá (KKT4) is teljesül.

KKT: Példa II (folytatás)

- A KKT olyan primál/duál $x_1, x_2, \lambda_1, \lambda_2$ helyett keres, amelyek eleget tesznek a primál/duál feltételeknek ((KKT1) és (KKT2)):

$$x_1^2 + x_2^2 \leq 5, \quad 3x_1 + x_2 \leq 6, \quad \lambda_1 \geq 0, \quad \lambda_2 \geq 0.$$

Továbbá (KKT4) is teljesül.

- Ehhez:

$$\nabla(2x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 - 10x_1 - 10x_2) = \begin{pmatrix} 4x_1 + 2x_2 - 10 \\ 2x_1 + 2x_2 - 10 \end{pmatrix},$$

KKT: Példa II (folytatás)

- A KKT olyan primál/duál $x_1, x_2, \lambda_1, \lambda_2$ helyett keres, amelyek eleget tesznek a primál/duál feltételeknek ((KKT1) és (KKT2)):

$$x_1^2 + x_2^2 \leq 5, \quad 3x_1 + x_2 \leq 6, \quad \lambda_1 \geq 0, \quad \lambda_2 \geq 0.$$

Továbbá (KKT4) is teljesül.

- Ehhez:

$$\nabla(2x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 - 10x_1 - 10x_2) = \begin{pmatrix} 4x_1 + 2x_2 - 10 \\ 2x_1 + 2x_2 - 10 \end{pmatrix},$$

$$\nabla(x_1^2 + x_2^2 - 5) = \begin{pmatrix} 2x_1 \\ 2x_2 \end{pmatrix}, \quad \nabla(3x_1 + x_2 - 6) = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

KKT: Példa II (folytatás)

- A KKT olyan primál/duál $x_1, x_2, \lambda_1, \lambda_2$ helyett keres, amelyek eleget tesznek a primál/duál feltételeknek ((KKT1) és (KKT2)):

$$x_1^2 + x_2^2 \leq 5, \quad 3x_1 + x_2 \leq 6, \quad \lambda_1 \geq 0, \quad \lambda_2 \geq 0.$$

Továbbá (KKT4) is teljesül.

- Ehhez:

$$\nabla(2x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 - 10x_1 - 10x_2) = \begin{pmatrix} 4x_1 + 2x_2 - 10 \\ 2x_1 + 2x_2 - 10 \end{pmatrix},$$

$$\nabla(x_1^2 + x_2^2 - 5) = \begin{pmatrix} 2x_1 \\ 2x_2 \end{pmatrix}, \quad \nabla(3x_1 + x_2 - 6) = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

- Azaz (KKT4) teljesülése kiírva:

$$4x_1 + 2x_2 - 10 + 2\lambda_1x_1 + 3\lambda_2 = 0, \quad 2x_1 + 2x_2 - 10 + 2\lambda_1x_2 + \lambda_2 = 0.$$

KKT: Példa II (folytatás)

KKT: Példa II (folytatás)

- Amit még tudnia kell számnégyesünknek, az a komplementáris hézagosság tulajdonsága.

KKT: Példa II (folytatás)

- Amit még tudnia kell számnégyesünknek, az a komplementáris hézagosság tulajdonsága.
- Ez négyféle módon teljesülhet:

$$I : \quad x_1^2 + x_2^2 = 5 \text{ és } \lambda_1 \geq 0, \quad 3x_1 + x_2 = 6 \text{ és } \lambda_2 \geq 0.$$

$$II : \quad x_1^2 + x_2^2 < 5 \text{ és } \lambda_1 = 0, \quad 3x_1 + x_2 < 6 \text{ és } \lambda_2 = 0.$$

$$III : \quad x_1^2 + x_2^2 < 5 \text{ és } \lambda_1 = 0, \quad 3x_1 + x_2 = 6 \text{ és } \lambda_2 \geq 0.$$

$$IV : \quad x_1^2 + x_2^2 = 5 \text{ és } \lambda_1 \geq 0, \quad 3x_1 + x_2 < 6 \text{ és } \lambda_2 = 0.$$

KKT: Példa II (folytatás)

KKT: Példa II (folytatás)

- Elemi módszerekkel megállapítható, hogy I, II és III nem vezet megfelelő számnégyeshez.

KKT: Példa II (folytatás)

- Elemi módszerekkel megállapítható, hogy I, II és III nem vezet megfelelő számnégyeshez.
- A IV lehetőség viszont, elvezet a

$$x_1 = 1, x_2 = 2, \lambda_1 = 1, \lambda_2 = 0$$

megoldáshoz.

KKT: Példa II (folytatás)

- Elemi módszerekkel megállapítható, hogy I, II és III nem vezet megfelelő számnégyeshez.
- A IV lehetőség viszont, elvezet a

$$x_1 = 1, x_2 = 2, \lambda_1 = 1, \lambda_2 = 0$$

megoldáshoz.

- Ebből adódik, hogy $(1, 2)$ egy primál optimális megoldás, $(1, 0)$ egy duál optimális megoldás. Továbbá erős dualitás áll fenn.

Vége van!

Köszönöm a figyelmet!