Szemidefinit programozás és vektorrendszerek

Hajnal Péter

2021. tavasz

Emlékeztető

Emlékeztetünk a pozitív szemidefinit (így szimmetrikus) mátrixok két leírására:

(1) Sajátértékei nem negatívak,

(2) egy vektor rendszer Gram-mátrixa.

• Múlt alkalommal a sajátértékes értelmezés segítségével több sajátértékkel kapcsolatos problémát fogalmaztunk meg mint SDP probléma.

• Most a Gram-mátrixos leírást használjuk kombinatorikus optimalizálási kérdések megválaszolására.

Egy alapkérdés

Claude Shannon (1916—2001) — az információelmélet egyik alapító egyénisége — kérdezte a következő kérdést.

- Adott egy ábécé, amelyben bizonyos betűk összetéveszthetőek.

- Ez a reláció kiterjeszthető az ℓ hosszú szavakra: Két (azonos hosszú) szó összetéveszthető, ha minden pozícióban ugyanaz a betű vagy összetéveszthető betűpár áll.

- Ekvivalens módon két szó nem összetéveszthető, ha valamely pozícióban két különböző, nem összetéveszthető betűpár szerepel.

A fenti fogalmak a gráfelmélet nyelvén is megfogalmazhatók.

- Az ábécé karakterei alkossák a V halmazt. Ezen az összetéveszthetőség relációt egy G gráf írja le.

Gráfok szorzása

Definíció

Egy G és H gráf szorzata $G \boxtimes H$ az a gráf, amely csúcshalmaza $V(G) \times V(H)$ és (v, w) akkor és csak akkor összekötött (v', w')-vel, ha a következők valamelyike fennáll:

(i) $v = v'$ és $ww' \in E(H)$,

(ii) $vv' \in E(H)$ és $w = w'$,

(iii) $vv' \in E(G)$ és $ww' \in E(H)$.

- Két él szorzata egy négy csúcsú teljes gráf. Innen ered a jelölés.

Gráfelméleti átfogalmazás

Észrevétel

Könnyen látható, ha G egy ábécé összetéveszthetőségi gráfja, akkor $G^{\boxtimes k} := G \boxtimes G \boxtimes \ldots \boxtimes G$ k tényezős szorzat csúcsai a k hosszú szavak és a szomszédság az összetéveszthetőség relációt írja le.

- Shannon kérdése a következő volt: Hány páronként nem összetéveszthető szót választhatunk ki az ℓ hosszú szavak közül?
- $\ell = 1$ esetén ez nyilván $\alpha(G)$ a válasz.
- Általában a válasz
$$\alpha(G^{\boxtimes \ell}).$$

Gráfok Shannon-kapacitása

Könnyen látható, hogy az összeszámlálási kérdésre adandó válasz nagyságrendje (ahogy ℓ nő) exponenciális. Bizonyítás nélkül közöljük az ezt leíró matematikai állítást.

Fekete/szubadditivitási Lemma

Legyen G egy egyszerű gráf. Ekkor $\left(\sqrt[\ell]{\alpha(G^{\boxtimes \ell})}\right)_{\ell=1}^{\infty}$ egy konvergens sorozat.

Definíció

$$\mathrm{Sh}(G) = \lim_{\ell\to\infty} \sqrt[\ell]{\alpha(G^{\boxtimes \ell})},$$

a G Shannon-féle tetafüggvénye vagy Shannon-kapacitása.

A viszonylag egyszerű fogalom nagyon nehéz matematikai problémát takar.

Alap szendvics

Észrevétel

$$\alpha(G) \leq \mathrm{Sh}(G) \leq \overline{\chi}(G).$$

Mi is $\overline{\chi}(G)$?

Definíciók

$\overline{\chi}(G) = \chi(\overline{G})$

A G gráf *klikkfedési feladata*: Milyen kevés klikkel tudjuk lefedni $V(G)$-t?

$\alpha(G) \leq \overline{\chi}(G)$ nyilvánvaló.

Az alap szendvics elkészítése

• Legyen F egy $\alpha(G)$ elemű független halmaz G-ben. Ekkor F^ℓ egy független halmaz $G^{\boxtimes \ell}$-ben.

• Vegyük G egy klikkfedését $\overline{\chi}(G)$ osztállyal. Könnyen látható, hogy ez az osztályozás $G^{\boxtimes \ell}$ egy $\overline{\chi}^\ell(G)$ osztályra történő osztályozását adja, amelyben minden osztály egy klikk.

• Azaz

$$\alpha^\ell(G) \leq \alpha(G^{\boxtimes \ell}) \leq \overline{\chi}(G^{\boxtimes \ell}) \leq \overline{\chi}^\ell(G).$$

• Azaz

$$\alpha(G) \leq \mathrm{Sh}(G) \leq \overline{\chi}(G).$$

Következmény

Ha G olyan, hogy $\alpha(G) = \overline{\chi}(G)$, akkor

$$\mathrm{Sh}(G) = \alpha(G).$$

- A tétel megfogalmazásában szereplő feltétel nem olyan ritka.
- Például minden perfekt (például páros) gráf teljesíti.
- Igazából szép gráfok komplementerei esetén kapunk egyenlőséget.
- A legkisebb gráf, amelyre nem teljesül az öt-hosszú kör (C_5): $\alpha(C_5) = 2 < 3 = \overline{\chi}(G)$.

Az első probléma

$\mathrm{Sh}(C_5)$ meghatározása egy komoly matematika probléma.

- A kérdés felvetése után több mint egy évtized után sikerült megoldani. Lovász László bizonyítása az optimalizálás egy központi eszközévé vált.

- A kiinduló gondolatok alapján $2 \leq \mathrm{Sh}(C_5) \leq 3$.

- Az alsó becslés javítása az egyszerűbb.

Lemma

$$\sqrt{5} \leq \mathrm{Sh}(C_5).$$

A Lemma könnyen ellenőrizhető.

Sh(C_5) alsó becslése

Páros k esetén

$$\alpha\left(C_5^{\boxtimes k}\right) = \alpha\left((C_5 \boxtimes C_5)^{\boxtimes k/2}\right) \geq 5^{k/2} = \sqrt{5}^k,$$

Következmény

$$\sqrt{5} \leq \mathrm{Sh}(C_5).$$

A felső becslés erősítése a Lovász megoldás lényege. A klikkfedés fogalmát írja át forradalmi módon.

Újból a klikkfedés

Először fogalmazzuk meg a G gráf klikkfedését k klikkel.

Klikkfedés

Egy $c : V(G) \to \{e_1, e_2, \ldots, e_k\}$ függvény klikkfedés, ahol minden $uv \notin E(G)$ élre $c(u) = e_i$, $c(v) = e_j$ esetén $i \neq j$.

- Az e_i-kre úgy gondolunk, hogy színek.

- Klikkfedés esetén össze nem kötött csúcsok képei/színei különbözőek.

Gráfok ortonormált reprezentációja

Lovász László a színeket vektorokkal helyettesíti, a különbözőséget merőlegességgel helyettesíti.

Definíció

Legyen G egy egyszerű gráf.

$$\rho : V(G) \to \mathbb{R}^d \qquad \text{azaz} \qquad (\rho_v)_{v \in V} \in \mathbb{R}^{V(G)}$$

a G gráf egy ortonormált reprezentációja (röviden ONR), ha a ρ_v vektorok ($v \in V$) egységvektorok ($\rho : V(G) \to \mathbb{S}^{d-1} \subset \mathbb{R}^d$) és $uv \notin E$ esetén $\rho_u \perp \rho_v$.

Vektor-klikkfedés

Az ONR felfogható mint egy vektor-klikkfedés.

• A szokásos klikkfedés egy vektor-klikkfedés lesz, ha a megfogalmazásunkban használt e_i-kre mint páronként ortogonális egységvektorokra gondolunk (az eredeti színfelfogás helyett). Azaz $\{e_i\}$ lehet $\mathbb{R}^k$ standard bázisa (a dimenzió a klikkek száma).

• Mi lesz az új fogalom, egy vektor-klikkfedés színigénye? Ehhez tegyünk egy kitérőt.

Kitérő: Pitagorasz-tétel

- Legyenek $e_1, e_2, \ldots, e_k$ páronként ortogonális egységvektorok és h egy tetszőleges egységvektor.
- Ha (e_i) egy bázisa lenne a terünknek

$$1 = |h|^2 = h^{\mathsf{T}} h = \sum_{i=1}^{k} (e_i^{\mathsf{T}} h)^2.$$

Ez a Pitagorasz-tétel magasabb dimenziós alakja. általában a következő lemmát állíthatjuk.

Lemma

Legyenek $e_1, e_2, \ldots, e_k$ páronként ortogonális egységvektorok és h egy tetszőleges egységvektor. Ekkor

$$1 = |h|^2 = h^{\mathsf{T}} h \geq \sum_{i=1}^{k} (e_i^{\mathsf{T}} h)^2.$$

- A lemmából adódik, hogy

$$\min_{i=1,2,\ldots,k} (e_i^{\mathsf{T}} h)^2 \leq \frac{1}{k}.$$

- Másképpen

$$\max_{i=1,2,\ldots,k} \frac{1}{(e_i^{\mathsf{T}} h)^2} \geq k.$$

- Ha $h = 1/\sqrt{k}(e_1 + e_2 + \ldots + e_k)$ (egységvektor):

$$\max_{i=1,2,\ldots,k} \frac{1}{(e_i^{\mathsf{T}} h)^2} = k.$$

- A fentiek alapján ha az ONR-ban „színezünk”, akkor

$$\min_{h} \max_{i=1,2,\ldots,k} \frac{1}{(e_i^{\mathsf{T}} h)^2} = k,$$

a klasszikus klikkfedés színigénye.

A Lovász-paraméter

Definíció

Egy $(\rho_v)_{v\in V}$ ONR és h egységvektorhoz (a továbbiakban NYÉL) egy értéket rendelünk:

$$\mathrm{Lov}(((\rho_v)_{v\in V}, h)) = \max_{v:v\in V} \frac{1}{(h^{\mathsf{T}}\rho_v)^2}.$$

Definíció

$$\mathrm{Lov}(G) = \inf\{\mathrm{Lov}(((\rho_v)_{v\in V}, h)) : (\rho_v)_{v\in V} \text{ egy } ONR, h \text{ egy nyél}\}.$$

A klasszikus klikkfedés vektor-klikkfedésként való értelmezése egy „versenyző” $\mathrm{Lov}(G)$ definíciójában. Így

Következmény

$$\mathrm{Lov}(G) \leq \overline{\chi}(G).$$

PÉLDA: Esernyő konstukció

- Legyen $G = C_5$, tegyük fel, hogy csúcshalmaza $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ (szomszédság a „modulo 5 aritmetikában 1 a különbség").
- Legyen $h = \rho_1 = \rho_2 = \rho_3 = \rho_4 = \rho_5$, hat darab egységvektor egyik végpontjuknál „összeragasztva". Ez természetesen nem ONR.
- h-t gondoljuk egy összecsukott esernyő nyelének (angolul „handle", innen az elnvezés), $\rho_1 = \rho_2 = \rho_3 = \rho_4 = \rho_5$-t gondoljuk a bordáinak. Kezdjük kinyitni az esernyőt.
- A nyél stabilan lefelé mutat, bordák szabályosan nyilnak.
- Minden pillanatban végpontjaik egy síkra esnek, egy szabályos ötszög csúcsait adják.
- Alkalmas pozícióban a nyél és az öt borda C_5 egy ONR-ját adják. Ez C_5 esernyő-reprezentációja.
- Középiskolai, egyszerű térgeometriai számolás adja, hogy a reprezentációhoz (a nyéllel együtt) $\sqrt{5}$ érték tartozik.

Következmények, kapcsolatok

C_5 esetében $\overline{\chi}$ értéke 3. A klasszikus klikkfedés vektor-klikkfedésként való értelmezése egy „versenyző" $\mathrm{Lov}(C_5)$ definíciójában. Három páronként merőleges egységvektort „osztunk ki" öt csúcs között aszimmetrikus módon. Az esernyő konstrukció alapján jobb becslés adható $\mathrm{Lov}(C_5)$-re.

Következmény

C_5 esernyő-reprezentációja bizonyítja, hogy $\mathrm{Lov}(C_5) \leq \sqrt{5}$.

A Lovász-függvény és a Shannon-kapacitás között szoros kapcsolat van:

Tétel

(i) $\alpha(G) \leq \mathrm{Lov}(G)$.

(ii) $\mathrm{Sh}(G) \leq \mathrm{Lov}(G) \leq \overline{\chi}(G)$.

Bizonyítás (i)

- Legyen G egy tetszőleges gráf, benne egy F maximális méretű független csúcshalmazzal.
- Vegyük G egy tetszőleges ONR-ját egy tetszőleges nyéllel.
- A reprezentáció F elemeihez páronként merőleges egységvektorokat rendel.
- Így $\sum_{f\in F}(h^{\mathsf{T}}\rho_f)^2 \leq |h|^2 = 1$.
- Ebből $\min_{f\in F}(h^{\mathsf{T}}\rho_f)^2 \leq 1/|F|$.
- Továbbá

$$\mathrm{Lov}(\rho, h) \geq \max_{f\in F} \frac{1}{(h^{\mathsf{T}}\rho_f)^2} \geq |F| = \alpha(G).$$

Bizonyítás (ii)

- Legyen $(\rho_v)_{v\in V(G)}, h$ a G gráf egy ONR-ja h nyéllel, amelyhez a $\mathrm{Lov}(G)$ paraméter tartozik.
- Ebből könnyen adható $G^{\boxtimes \ell}$ egy ONR-ja egy új nyéllel, amely értéke $\mathrm{Lov}^{\ell}(G)$ lesz.
- A szorzat gráf egy $(v_1, v_2, \ldots, v_\ell)$ csúcsának feleltessük meg $\rho_{v_1} \otimes \rho_{v_1} \otimes \ldots \otimes \rho_{v_\ell}$ vektort, míg a nyél $h \otimes h \otimes \ldots \otimes h$ legyen.

Definíció: vektorok tenzor szorzata

$x \in \mathbb{R}^d$ és $y \in \mathbb{R}^e$ vektorok esetén $x \otimes y \in \mathbb{R}^{d\cdot e}$, ahol az (i, j) komponens értéke $x_i y_j$. Másképpen $x \otimes y \in \mathbb{R}^{d\times e}$ az xy^{T} mátrix vektorként olvasva.

Bizonyítás (ii) befejezése

- A részletek kidolgozása az

$$(x_1 \otimes x_2 \otimes \ldots \otimes x_\ell)^\mathsf{T}(y_1 \otimes y_2 \otimes \ldots \otimes y_\ell) = (x_1^\mathsf{T} y_1)(x_2^\mathsf{T} y_2)\ldots(x_\ell^\mathsf{T} y_\ell)$$

összefüggésen alapul.

- Az összefüggés ellenőrzése és a részletek kidolgozását az érdeklődő hallgatóra bízom.

- Ezek után egyből adódik, hogy

$$\alpha(G^{\boxtimes \ell}) \leq \mathrm{Lov}(G^{\boxtimes \ell}) \leq \mathrm{Lov}^\ell(G).$$

- Ebből az (ii) rész állítása könnyen kiolvasható.

Összegzés

Összerakva az eddigi ismereteinket C_5-ről:

$$\sqrt{5} \leq \mathrm{Sh}(C_5) \leq \mathrm{Lov}(C_5) \leq \sqrt{5}.$$

Lovász László tétele

$\mathrm{Sh}(C_5) = \mathrm{Lov}(C_5) = \sqrt{5}.$

Lovász László tétele

$$\alpha(G) \leq \mathrm{Sh}(G) \leq \mathrm{Lov}(G) \leq \overline{\chi}(G).$$

Megemlítjük, hogy C_7 esetén a Lovász-féle tetafüggvény értéke különösebb probléma nélkül meghatározható (az esernyő-konstrukció kiterjesztése megadja az optimális reprezentációt). C_7 Shannon-kapacitása mind a mai napig nem ismert.

α, χ, Sh nehéz. És Lov?

• Végül megemlítjük, hogy Lov(G) meghatározása egy SDP feladatként is megfogalmazható. Ez nem meglepő. Egy optimális vektorrendszert kell keresnünk.

• Ez pedig izomorfizmus erejéig meghatározott a Gram-mátrixával. Így igazából egy speciális Gram-mátrixot/pozitív szemidefinit mátrixot keresünk.

• Belátjuk, hogy a

Minimalizáljuk	$\lambda_{\max}(M)$-t
Feltéve, hogy	$M_{uu} = 1$ minden $u \in V$ esetén
	$M_{uv} = 1$ minden $uv \notin E$ esetén
	$M \in \mathcal{S}^n$.

feladat optimális értéke Lov(G).

Szünet

A cél-Tétel: Lov(G) mint SDP

- Azaz a múlt héten vizsgált Lovász-féle teta-függvény megegyezik a most bevezetett Lovász függvénnyel.

Tétel

$$\mathrm{Lov}(G) = \vartheta(G).$$

- A tételt a két optimális érték közötti két irányú egyenlőtlenséget jelent.

- A bizonyításunk azonban erősebb lesz. Mindkét optimalizálási feladat esetén az egyik lehetséges megoldásához a másik egy lehetséges megoldását konstruáljuk meg úgy, hogy a (megfelelő) célfüggvény értéke ne nőjön.

SDP megoldásából ONR-nyél

Minimalizáljuk	$\lambda_{\max}(M)$-t
Feltéve, hogy	$M_{uu} = 1$ minden $u \in V$ esetén
	$M_{uv} = 1$ minden $uv \notin E$ esetén
	$M \in \mathcal{S}^n$.

- Először legyen M egy mátrix, amely a fenti feladat egy lehetséges megoldása.
- Vegyük $\lambda_{\max}(M)I - M$-et.
- Ez egy pozitív szemidefinit mátrix (sőt azt is tudjuk, hogy minimális sajátértéke 0, speciálisan nem teljes rangú).
- Azaz egy $(\pi_v)_{v \in V}$ vektorrendszer Gram-mátrixa (a szükséges vektortér dimenziójával nem kell $|V|$ fölé mennünk, sőt a rang nem teljessége miatt $\mathbb{R}^{|V|-1}$-ben is dolgozhatunk).

SDP megoldásából ONR-nyél (folytatás)

- Tudjuk, hogy

$$\pi_u^{\mathsf{T}}\pi_v = \begin{cases} \lambda_{\max} - 1, & \text{if } u = v \\ -1, & \text{if } uv \notin E(G) \end{cases}$$

- Legyen

$$\rho_v = \begin{pmatrix} 1 \\ \pi_v \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{|V|} \quad (v \in V), \qquad h = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{|V|},$$

ahol $1 \in \mathbb{R}$, $\pi_v, 0 \in \mathbb{R}^{|V|-1}$.

- Ekkor tudjuk, hogy

$$\rho_u^{\mathsf{T}}\rho_v = \begin{cases} \lambda_{\max}, & \text{if } u = v \\ 0, & \text{if } uv \notin E(G) \end{cases}$$

- Azaz ρ_v-k azonos (nem-nulla) hosszú vektorok, amelyek $uv \notin E$ esetén merőlegesek, h egységvektor.

SDP megoldásából ONR-nyél (befejezés)

- Legyen $\rho_v^0 = \frac{1}{|\rho_v|}\rho_v$, a ρ_v normáltja.
- ρ_v^0 vektorok ($v \in V$) első koordinátái — azaz a $h^\mathsf{T}\rho_v^0$ értékek — mindegyike $\frac{1}{|\rho_v|}$.
- Azaz a $\frac{1}{(h^\mathsf{T}\rho_v^0)^2}$ értékek mindegyike $\lambda_{\max}$.
- Tehát $(\rho_v^0)_{v\in V}$ egy ONR. Továbbá a h nyéllel a Lovász-paramétere $\lambda_{\max}(M)$.

ONR-nyél párból SDP megoldás

- A megfordításhoz induljunk ki egy $(\rho_v)_{v\in V}$ ONR-ből és egy h nyélből.
- A ρ-kat skálázzuk úgy, hogy a h végpontjában a h-ra merőleges síkra mutassanak.
- Vegyük a h végpontjából ide vezető vektorokat. Így a

$$\left(h - \frac{1}{h^\mathsf{T}\rho_u}\rho_u\right)_{u\in V}$$

vektorrendszerhez jutunk.

- Nézzük meg ennek a M Gram-mátrixát.
- Az uv pozícióban álló elem

$$M_{uv} = -1 + \frac{\rho_u^\mathsf{T}\rho_v}{(h^\mathsf{T}\rho_u)(h^\mathsf{T}\rho_v)}.$$

- Azaz a nem-élek pozícióban -1, a főátlón $-1 + 1/(h^\mathsf{T}\rho_v)^2$ áll.

ONR-nyél párból SDP megoldás (folytatás)

• Képezzük $\widetilde{M}$ mátrixot a következő módon: vegyük M-t és a főátlón lévő elemeit kerekítsük lefelé -1-re (a kerekítés értéke $-1/(h^{\mathsf{T}}\rho_v)^2$), majd képezzük a mátrixunk ellentettjét.

• $\widetilde{M}$ az optimalizálási problémánk egy lehetséges megoldása (mátrixunk szimmetrikussága is nyilvánvaló).

• Belátjuk, hogy a célfüggvény értéke ($\lambda_{\max}(\widetilde{M})$) nem lehet nagyobb a ONR-nyél pár Lovász-paraméterénél ($\mathrm{Lov}(\{\rho_v\}_{v\in V}, h)$).

• Ehhez nézzük a $\mathrm{Lov}(\{\rho_v\}_{v\in V}, h)I - \widetilde{M}$ mátrixot.

• Belátjuk, hogy ez pozitív szemidefinit, ami igazolja célunkat.

ONR-nyél párból SDP megoldás (befejezés)

- A fenti mátrix $-(-M) = M$ módosítása a főátlón. A módosítás a kiinduló diagonális mátrix $(\mathrm{Lov}(\{\rho_v\}_{v\in V}, h)I)$ hozzáadása és a lefelé kerekítés eredője, azaz a M-beli diagonálison álló értékhez $\mathrm{Lov}(\{\rho_v\}_{v\in V}, h) - 1/(h^\mathsf{T}\rho_v)^2$-t adunk. Ez egy nemnegatív szám hozzáadása.
- Azaz mátrixunk $M + \Delta$. Ahol Δ egy diagonális mátrix nemnegatív elemekkel, speciálisan pozitív szemidefinit. Továbbá M egy Gram-mátrix, speciálisan pozitív szemidefinit.
- Tehát mátrixunk két pozitív szemidefinit mátrix összege, maga is az.

Lov(G) bonyolultsága

Tétel

Adott G-re Lov(G) kiszámolható polinomiális időben.

- Láttuk, hogy Lov(G) kiszámolása megfogalmazható SDP alakban. Így egy kezelhető feladat.

Szünet

Maximális vágás

- Adott egy $w : E(G) \to \mathbb{R}_+$ élsúlyozott gráf. Keressünk olyan $V = (S, T)$ vágást, amelyre

$$w(\mathcal{V}) = w(E(\mathcal{V})) = \sum_{e \in E(\mathcal{V})} w(e)$$

a lehető legnagyobb értéket veszi fel.

- Ahol

$$E(\mathcal{V}) = \{e = xy \in E(G) : x \in S, y \in T \text{ vagy } x \in T, y \in S\}.$$

- Ismert, hogy a probléma $\mathcal{N}P$-nehéz, a hatékony megoldás reménytelennek tűnik.

- Két triviális közelítő algoritmust ismertetünk. Mindkettő Erdős Pál nevéhez köthető.

Mohó algoritmus

- $e = xy$ maximális súlyú él, x-et tegyük S-be y-t T-be.
- A maradék csúcsokat $v_3, v_4, \ldots, v_n$ sorban vizsgáljuk:

$v_i \to S?/T?$: v_i abba a halmazba kerül, ahol nagyobb növelést ér el.

Észrevétel

A mohó algoritmus által kialakított $\mathcal{V} = (S, T)$ vágásra

$$w(\mathcal{V}) \geq \frac{1}{2} \sum w(e) \geq \frac{1}{2} w(E(G)).$$

- Valóban. Minden csúcs valamelyik partra történő besorolása a $w(\mathcal{V})$ és $w(E(G) - E(\mathcal{V}))$ súlyösszegeket módosítja.
- A mohó algoritmus ügyel arra, hogy $w(\mathcal{V}) > w(E(G) - E(\mathcal{V}))$ a kezdetben fennálljon és továbbra is fennmaradjon.

Véletlen algoritmus

- Minden $x \in V$ csúcsra $\frac{1}{2}$ valószínűséggel $x \in S$, $\frac{1}{2}$ valószínűséggel $x \in T$ (különböző csúcsokra a döntésünk független). Legyen $\underline{\mathcal{V}}$ az így kialakult vágás (valószínűségi változó).
- Legyen

$$\xi_e = \begin{cases} 1, & \text{ha } e \text{ két végpontja különböző partra esik,} \\ 0, & \text{különben.} \end{cases}$$

- Ekkor

$$w(\underline{\mathcal{V}}) = \sum \xi_e w_e,$$

és

$$\mathbb{E}(w(\underline{\mathcal{V}})) = \sum_{e \in E} w_e \mathbb{E}\xi_e = \frac{1}{2} \sum_{e \in E} w_e.$$

Hastad tétele

A másik oldalról a következő „negatív” eredmény ismert:

Hastad

Ha létezik polinomiális algoritmus ami kiszámol egy vágást $((G, w) \mapsto \mathcal{V})$, amelyre $w(\mathcal{V}) \geq \frac{16}{17} w(\mathcal{V}_{\text{opt}})$, akkor $P = \mathcal{N}P$

Ezután a nyilvánvaló (Erdős-féle) algoritmusok minden javítása jelentős eredmény:

Goemans—Williamson tétele és az alapötlet

(Goemans—Williamson, 1994)

Megadható olyan véletlen algoritmus $((G, w) \to \mathcal{V})$, amelyre

$$\mathbb{E}(w(\mathcal{V})) \geq 0{,}8789 w(\mathcal{V}_{opt}).$$

Goemans—Williamson-algoritmus, 0. változat

(1) Válasszunk csúcsaink egy $\rho : V(G) \to \mathbb{S}^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$ vektorreprezentációját (ahol $n = |V(G)|$, $\mathbb{S}^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n : x^\mathsf{T} x = 1\}$).

(2) Válasszunk egy véletlen $\nu \in S^{n-1}$ vektort.

(3) Output: $S = \{v : \nu^\mathsf{T} \rho(v) < 0\}$, $T = \{v : \nu^\mathsf{T} \rho(v) > 0\}$.

// 1 valószínűséggel $V(G) = S \dot{\cup} T$.

Kérdések

• A (2) lépés megvalósítása egy sztochasztika probléma. Megoldása jól ismert: ν n darab komponensét függetlenül, 0 várható értékű, 1 szórású normális eloszlású valószínűségi változóként generáljuk, majd normáljuk egységvektorrá.

• Az (1) lépésben hogy válasszuk ρ-t? Három lehetőséget kiemelünk.

- Ha ismernénk az optimális (S,T) vágást, akkor $\rho|_S : x \mapsto e$, $\rho|_T : x \mapsto -e$ „kiszámíthatatlan" vektorreprezentáció optimális szétvágáshoz vezetne.
- Ha ρ véletlen, akkor visszakapjuk Erdős véletlen algoritmusát.
- „Kiszámítható" algoritmussal határozzunk meg egy „ügyes" vektorreprezentációt.

Nyilvánvaló a harmadik út a járható út. Ennek megvalósítása a Goemans—Williamson-algoritmus „lelke".

Mit várunk eljárásunk outputjától?

Legyen $e = xy \in E$

$$\xi_e = \begin{cases} 1, & x \text{ és } y \text{ nem ugyanabba az osztályba esik,} \\ 0, & \text{különben,} \end{cases}$$

továbbá legyen α a ρ_x és ρ_y vektorok szöge.

Ekkor

$$\mathbb{E}\xi_e = \mathbb{P}(\xi_e = 1) = \frac{2\alpha}{2\pi} = \frac{\alpha}{\pi} = \frac{\arccos \rho_x^{\mathsf{T}} \rho_y}{\pi}.$$

Következmény

$$\mathbb{E}w(\mathcal{V}) = \sum_{e=xy\in E} w_e \frac{\arccos \rho_x^{\mathsf{T}} \rho_y}{\pi}.$$

Ha célunk egy olyan ρ meghatározása lenne, ahol ez a várható érték a lehető legnagyobb, akkor túl nehéz problémához jutnánk.

Elemi analízis

Lemma

$$\frac{1}{\pi}\arccos x \geq 0{,}87856 \cdot \frac{1}{2}(1-x).$$

A lemma egy egyszerű kalkulusbeli gyakorlat. Ellenőrzését, kiszámítását az érdeklődő hallgatóra bízzuk.

Következmény

$$\mathbb{E}(w(\mathcal{V})) \geq 0{,}87856 \sum_{e=xy\in E} w(e)\frac{1}{2}(1-\rho_x^{\mathsf{T}}\rho_y).$$

Most már kijelölhetjük célunkat: Vegyünk olyan ρ-t, ahol a fenti alsó becslésben szereplő szumma a lehető legnagyobb.

Célunk mint SDP probléma

- A keresett ρ vektorok M belső szorzat mátrixa/Gram-mátrixa alapján felírható.
- Ez egy pozitív szemidefinit mátrix. A kívánt optimalizálási feladat egy szemidefinit optimalizálási feladat, kezelhető:

Maximalizáljuk	$\frac{1}{2}\langle W, (1-M)\rangle$-t
Feltéve, hogy	$M_{vv}=1$, minden $v \in V$ esetén
	$M \succeq 0$,

ahol W a súlyokat leíró (szimmetrikus) mátrix, azaz a szomszéd sági mátrixban az 1-eseket kicseréljük a megfelelő él súlyára.

- Ez az optimalizálási feladat megoldása egy M Gram-mátrixot ad.
- Ebből kiszámolható egy ehhez tartozó $\{\rho_v\}_{v\in V}$ egységvektorok rendszere, azaz egy vektorreprezentáció gráfunk csúcsainak.
- Ez adja a Goemans—Williamson-algoritmus (1) lépésében szereplő ρ függvényt.

A GW-algoritmus analízise

Ezzel az algoritmus leírása teljes. A fentiek alapján analízise is egyszerűen összerakható korábbi észrevételeinkből:

Tétel

$\mathcal{V}_{GW}$ az algoritmus által kiszámolt vágás. Ekkor

$$\mathbb{E}(w(\mathcal{V}_{GW})) \geq 0{,}87856 \cdot w(\mathcal{V}_{opt}).$$

Bizonyítás:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(w(\mathcal{V}_{GW})) =& \sum_{e\in E} w_e \frac{\arccos \rho_x^{\mathsf{T}} \rho_y}{\pi} \geq 0{,}87856 \sum w(e) \frac{1}{2}(1-\rho_x^{\mathsf{T}}\rho_y) \\ =& 0{,}87856 \cdot p^* \geq 0{,}87856 w(\mathcal{V}_{opt}),\end{aligned}$$

ahol $\mathcal{V}_{GW}$ a Goemans—Williamson-választás, $\mathcal{V}_{opt}$ pedig az (ismeretlen) optimális vágás, de egy lehetséges megoldása az általunk vizsgált optimalizálási problémának.

Szünet

Színezési problémák

• Adott egy G gráf. Két-színezhető-e? Ha igen, akkor színezzük ki két színnel (jól).

• Ez a probléma BSc Kombinatorika kurzus alapján könnyen megoldható.

• Adott G gráf 3-színezhető-e?

• Ez a probléma $\mathcal{NP}$-teljes. A tudomány jelenlegi állása szerint reménytelenül nehéz kérdés.

Az alapkérdés

Az alapkérdés

Vegyünk egy relaxált problémát: Adott G gráf, tudjuk hogy $\chi(G) = 3$, azaz garantáltan 3-színezhető. Színezzük ki minél kevesebb színnel.

A relaxált probléma is nehéznek bizonyul. Mind a mai napig a kutatás középpontjában áll.

A kiindulási algoritmus

Nézzük az alapalgoritmust, ahonnan minden elindul.

Wigderson-algoritmus

1. eset: Ha minden x csúcsra $d(x) \leq \tau = \sqrt{n}$, akkor mohó algoritmussal kiszínezzük.

// Minden fok $\sqrt{n}$, így a színigény legfeljebb $\sqrt{n}+1$.

2. eset: Ha van olyan x csúcs, hogy $d(x) > \tau = \sqrt{n}$, akkor

// x szomszédjainak halmazát jelölje N.

// $G|_N$ páros, hiszen G 3-színezhető.

- $G|_N$-et 2 színnel jól kiszínezhetjük.
- $G \leftarrow G - N$

// N-et „leharapjuk”.

- Vissza az algoritmus elejére.

Wigderson algoritmusának analízise

Az algoritmus analízise egyszerű:

Lemma

A Wigderson-algoritmus színigénye legfeljebb $3\sqrt{n} + 1$.

- Valóban minden harapás legalább $\sqrt{n}$-nel csökkenti a csúcsok számát.
- Azaz legfeljebb $\sqrt{n}$ harapás lehet, amelyek mindegyike két-két új színt használ.
- A harapások után minden kiszíneződik legfeljebb $\sqrt{n} + 1$ színnel.

A javítás iránya

• Könnyű látni, hogy a két lényegesen különböző eset közötti megkülönböztető τ paramétert lehet ügyesebben választani, de a színigény $\sqrt{n}$ nagyságrendje nem javul.

• A későbbi algoritmusunk hasonló struktúrát használ. A mohó színezésnél okosabb módszert használ.

• Így jobb τ megkülönböztető paraméterrel dolgozunk, jobb lesz algoritmusunk (várható) színigénye.

A javítás struktúrája

• A mohó algoritmust pótoló színezési algoritmus paramétereit az alábbi tétel foglalja össze.

• Igazából ez egy lépést ír le a teljes színezés kialakítása felé.

• Egy „fészínezést" számol ki, azaz egy olyan parciális színezést, ahol legalább a pontok fele kap szín (jól színezett módon), de van lehetőség egy csúcs színezetlen hagyására is (nem több mint a csúcsok felénél).

• Egy jó színezéshez ezt iterálni kell a színezetlen maradt csúcsokon. $\log n$ iteráció után egy jól színezett gráfhoz jutunk, amely színezésénél a színigény a (későbbi) tételbeli színigény $\log n$-szerese.

Karger—Motwani—Sudan-tétel

Létezik egy véletlen algoritmus, amely a következőket „tudja”: Ha adott egy 3-színezhető G gráf, amelynek nincs τ-nál nagyobb foka, akkor az algoritmus kiszámol egy „jó fél-színezést”, amely színigénye $\mathcal{O}(\tau^{0{,}632})$. Az algoritmus futási idejének várható értéke polinomiális.

A bizonyítás egy algoritmus. Ismét csúcsokhoz színek rendelése helyett vektorokat rendelünk hozzájuk.

Karger—Motwani—Sudan-algoritmus

Karger—Motwani—Sudan-félszínezési algoritmus

(1) Választunk V egy „okos” vektorreprezentációját:

$$\rho\colon V \to \mathbb{S}^{n-1}.$$

(2) Válasszunk függetlenül $\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_e \in \mathbb{S}^{n-1}$ véletlen független egységvektorokat/irányokat.

(2a) Legyen $v \mapsto (\mathrm{sign}(\nu_i^{\mathsf{T}} \rho(v))_{i=1}^{\ell}$, ahol

$$\mathrm{sign}(x) = \begin{cases} 1, & \text{ha } x > 0, \\ 0, & \text{ha } x = 0, \\ -1, & \text{ha } x < 0. \end{cases}$$

// A 0 komponens valószínűsége 0, 2^ℓ darab lehetséges kimenetel/„szín”,

Karger—Motwani—Sudan-algoritmus (folytatás)

Karger—Motwani—Sudan-félszínezési algoritmus

(2b) Kiválasztjuk a rosszul színezett éleket és egyik végpontjáról eltávolítjuk a színt. És így egy jó parciális színezést kapunk.

(2c) Ha legalább a csúcsok fele színezett, akkor STOP. Ha a csúcsok kevesebb, mint fele marad színezett, akkor vissza (2)-höz.

A választás alapgondolata

- A lényegi kérdés ismét (1), a jó/okos vektorreprezentáció megválasztása.

- Legyen

$$\xi_e = \begin{cases} 1, & \text{ha } e = xy \text{ él rosszul színezett,} \\ 0, & \text{különben.} \end{cases}$$

- Mennyi a várható értéke?

$$\mathbb{E}\xi_e = \mathbb{P}(xy \text{ rosszul színezett}) = \left(1 - \frac{\text{arccos}\, \rho_x^\mathsf{T} \rho_y}{\pi}\right)^\ell.$$

A választás célja

- **A cél:** olyan ρ választása, ahol minden xy élre

$$\mathbb{E}\xi_e = \mathbb{P}(xy \text{ rosszul színezett}) = \left(1 - \frac{\text{arccos}\, \rho_x^{\mathsf{T}} \rho_y}{\pi}\right)^{\ell}.$$

„kicsi”.

- Azaz olyan ρ választása, ahol minden xy élre

$$\frac{\text{arccos}\, \rho_y^{\mathsf{T}} \rho_y}{\pi}$$

„nagy”.

- Azaz olyan ρ választása, ahol minden xy élre

$$\rho_x^{\mathsf{T}} \rho_y$$

„kicsi”.

A választás pontosan

• Az algoritmus (1) pontjának pontosítása: ρ választása legyen a következő SDP feladat egy optimiális $G \in \mathbb{R}^{V\times V}$ megoldásmátrixából eredő vektorrendszer lesz:

Minimalizáljuk	μ-t
Feltéve, hogy	$G \succeq 0$,
	$G_{uu} = 1$ minden u csúcsra,
	$G_{uv} \leq \mu$ minden $uv \in E$ élre.

• Ennek megoldása ad egy p^* optimális értéket és G optimális helyet (optimális Gram-mátrixot). Ebből kiolvasható egységvektorok ($G_{uu} = 1$) egy rendszere, gráfunk csúcsainak egy vektorreprezentációja.

• Ez a Karger—Motwani—Sudan félszínezési algoritmusának (1) lépésének pontos leírása.

Az algoritmus elemzése

- Ezekután az algoritmus analízise egyszerű:
- Először becsüljük meg p^* értékét.
- Ehhez vegyünk egy lehetségés megoldását optimalizálási feladatunknak: G gráfunk egy jó $c : V(G) \to \{1, 2, 3\}$-színezésére legyen $\rho_v = e_{c(v)}$, ahol e_1, e_2, e_3 egy 2-dimenziós síkban lévő, origó súlypontú szabályos háromszög csúcsaiba mutató három egységvektor.
- Ekkor a célfüggvény értéke $2\pi/3$, tehát $p^* \leq -1/2$, azaz $\arccos p^* \geq \arccos(-1/2) = 2\pi/3$.
- Ebből a rosszul színezés mértékének várható értékére vonatkozó becslésünket pontosíthatjuk:

$$\mathbb{P}(\xi_e) = \left(1 - \frac{1}{\pi}\arccos(\rho_u^{\mathsf{T}}\rho_v)\right)^{\ell} \leq \left(\frac{1}{3}\right)^{\ell} = \frac{1}{9\tau},$$

amennyiben ℓ-et úgy választjuk, hogy $(1/3)^{\ell} = 1/9\tau$ legyen.

Elemzés (folytatás)

- Legyen $\mathcal{E}_{\text{rossz}}$ az első véletlen színezés által rosszul színezett élek száma.
- Ekkor
$$\mathbb{E}(\mathcal{E}_{\text{rossz}}) \le \frac{1}{9\tau}|E| \le \frac{1}{9\tau}\frac{|V|\tau}{2} = \frac{|V|}{18}.$$
- Azaz a Markov egyenlőtlenség alapján kicsi a valószínűsége, hogy egy színezéssel nem találjuk meg az outputot.
- Általában színezések ismétlésének számának várható értéke könnyen becsülhető.
- ℓ választásával a 2^ℓ színigény $\mathcal{O}(\tau^{0,632})$, a tétel adódik.

A részletek összerakása

- A továbbiakat csak vázlatosan ismertetjük:

- A félszínezési algoritmus iterációja ad egy jó színezési algoritmust, aminek τ-tól való függése jobb mint a mohó algoritmusé.

- Így a Wigderson-sémában ezzel dolgozva a mohó algoritmus helyett egy jobb eljárást kapunk.

- Csak a végső eredményt mondjuk ki.

Karger—Motwani—Sudan színezési algoritmusa

A fent vázolt Las Vegas algoritmus egy adott n pontú 3-színezhető gráfot $\mathcal{O}(n^{0.39} \cdot \log n)$ színnel jól színez.

- További élesítések is vannak, időnkből ennyire futotta.

Köszönöm a figyelmet!