A lineáris programozás geometriája

Hajnal Péter

2021. tavasz

A lineáris programozás alapfeladata

• Többféle normálforma létezik. Amit mi leggyakrabban használunk az a következő:

Minimalizáljuk	$c^{\mathsf{T}}x$-t
Feltéve, hogy	$Ax \preceq b$

ahol $c \in \mathbb{R}^n$, $x \in \mathbb{R}^n$, $A \in \mathbb{R}^{k\times n}$, $b \in \mathbb{R}^k$.

• Azaz ebben a normálformában a feltételek között csak lineáris egyenlőtlenségeket engedünk meg.

• Egy másik normálforma is szokásos:

Minimalizáljuk	$c^{\mathsf{T}}x$-t
Feltéve, hogy	$Ax = b$,
	$x \succeq 0$.

LP dualitás

Tétel

LP dualitás Tetszőleges LP feladatra a következő két felétel közül pontosan az egyik teljesül:

(i) $p^* = d^*$, azaz erős dualitás teljesül,

(ii) $d^* = -\infty < \infty = p^*$.

- Ha például $\mathcal{L} \neq \emptyset$, (ahol $\mathcal{L}$ a lehetséges megoldások halmaza), és c alulról korlátos (legtöbb gyakorlati alkalmazásban ez teljesül), akkor $p^* = d^* \in \mathbb{R}$.
- $p^* = -\infty$ esetén a gyenge dualitás garantálja az erős dualitást.
- Egy LP számára az egyetlen „kibújó” az erős dualitás alól, hogy $p^* = \infty$ és $d^* = -\infty$ teljesüljön. Azaz a primál és duál feladat is kielégíthetetlen legyen. Ez a lehetőség nem elméleti, elő is fordulhat.

Lineáris egyenlet megoldáshalmaza

LINEÁRIS ALGEBRA	GEOMETRIA
$v \in \mathbb{R}^n$ egy vektor.	V pont $\mathbb{R}^n$-ben, helyvektora v.
$\nu \in \mathbb{R}^n - \{0\}$. $\nu^{\mathsf{T}} x = 0$ nem triviális, homogén lineáris egyenlet megoldáshalmaza.	$\nu \in \mathbb{R}^n - \{0\}$ normálvektor. $\nu^{\mathsf{T}} x = 0$ a ν-re merőleges vektorokat leíró egyenlet. Egy az O origón átmenő hipersík egyenlete.
$\nu \in \mathbb{R}^n - \{0\}$, $b \in \mathbb{R}$. $\nu^{\mathsf{T}} x = b$ nem triviális lineáris egyenlet megoldáshalmaza.	$\nu \in \mathbb{R}^n - \{0\}$ normálvektor. $\nu^{\mathsf{T}} x = b = \nu^{\mathsf{T}} v_0$ a ν-re merőleges v_0-n átmenő hipersík egyenlete.

Lineáris egyenlőtlenség megoldáshalmaza

LINEÁRIS ALGEBRA	GEOMETRIA
$\nu \in \mathbb{R}^n - \{0\}$. $\nu^\mathsf{T} x \leq 0/\nu^\mathsf{T} x \geq 0$ nem triviális lineáris homogén egyenlőtlenség megoldáshalmaza.	$\nu \in \mathbb{R}^n - \{0\}$ normálvektor. $\nu^\mathsf{T} x \leq 0/\nu^\mathsf{T} x \geq 0$ a ν-re merőleges origón átmenő hipersík által határolt egy-egy ZÁRT féltér.
$\nu \in \mathbb{R}^n - \{0\}$, $b \in \mathbb{R}$. $\nu^\mathsf{T} x \leq b/\nu^\mathsf{T} x \geq b$ nem triviális lineáris egyenlőtlenség megoldáshalmaza.	$\nu \in \mathbb{R}^n - \{0\}$ normálvektor. $\nu^\mathsf{T} x \leq b = \nu^\mathsf{T} v_0/\nu^\mathsf{T} x \geq b$ a ν-re merőleges v_0-n átmenő hipersík által határolt egy-egy ZÁRT féltér.

• A féltér egy v helyvektora esetén $v + n$ is a féltérhez tartozik ($\nu^\mathsf{T}(v + \nu) = \nu^\mathsf{T}\nu + \nu^\mathsf{T}\nu > \nu^\mathsf{T} v \geq b$), azaz n vektor irányában mozogva a féltérben maradunk. Ez a tulajdonág egyértelműen leírja, hogy geometriailag melyik féltér felel meg a fenti egyenlőtlenség megoldásának.

Formális definíciók

Definíció

Legyen $\nu \in \mathbb{R}^n$ egy nem-nulla vektor, τ tetszőleges valós szám. Ekkor a $\{x \in \mathbb{R}^n : \nu^\mathsf{T} x = \tau\}$ alakú halmazt hipersíknak nevezzük $\mathbb{R}^n$-ben. A $\{x \in \mathbb{R}^n : \nu^\mathsf{T} x \leq \tau\}$ alakú halmazok a (zárt) félterek.

Észrevétel

Minden hipersík két zárt félteret határoz meg, amelyeknek ő a közös határa.

Lemma

A félterek és hipersíkok is konvexek.

Egyenlőtlenségrendszerek megoldáshalmaza

LINEÁRIS ALGEBRA	GEOMETRIA
$A \in \mathbb{R}^{k\times n}$. Az $Ax = 0$ homogén lineáris egyenletrendszer megoldáshalmaza.	Véges sok origón átmenő hipersík metszete $\equiv$ *lineáris altér*.
$A \in \mathbb{R}^{k\times n}, b \in \mathbb{R}^k$. Az $Ax = b$ lineáris egyenletrendszer megoldáshalmaza.	Véges sok hipersík metszete $\equiv$ *affin altér*.
$A \in \mathbb{R}^{k\times n}$. Az $Ax \preceq 0$ homogén lineáris egyenlőtlenségrendszer megoldáshalmaza.	Véges sok origón átmenő zárt féltér metszete $\equiv$ *poliédrikus (zárt, konvex) kúp*.
$A \in \mathbb{R}^{k\times n}, b \in \mathbb{R}^k$. Az $Ax \preceq b$ lineáris egyenlőtlenségrendszer megoldáshalmaza.	Véges sok zárt féltér metszete $\equiv$ *(konvex, zárt) poliéder*.

Formális definíciók

Definíció: Vektorok lineáris kombinációja

Legyen $v_1, v_2, \ldots, v_N \in \mathbb{R}^n$ vektorok egy véges rendszere és $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_N \in \mathbb{R}_+$ valós számok egy rendszere. Ekkor

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \ldots + \lambda_N v_N$$

a v_i vektorok lineáris kombinációja.

Definíció: $\mathbb{R}^n$ lineáris altere

$\mathcal{L} \subset \mathbb{R}^n$ lineáris altér, ha $0 \in \mathcal{L}$ zárt a lineáris kombináció képzésre.

Példa: Végesen generált lineáris altér

$$\langle v_1, v_2, \ldots v_N \rangle_{\text{lin}} = \{\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \ldots + \lambda_N v_N : \lambda_i \in \mathbb{R}\}.$$

Formális definíciók (folytatás)

Definíció: Vektorok affin kombinációja

Legyen $v_1, v_2, \ldots, v_N \in \mathbb{R}^n$ vektorok egy véges rendszere és $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_N \in \mathbb{R}$ valós számok egy rendszere, amelyre $\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_N = 1$. Ekkor

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \ldots + \lambda_N v_N$$

a v_i vektorok affin kombinációja.

Definíció: $\mathbb{R}^n$ affin altere

$\mathcal{A} \subset \mathbb{R}^n$ affin altér, ha zárt az affin kombináció képzésre.

Példa: Végesen generált affin altér

$$\langle v_1, v_2, \ldots v_N \rangle_{\text{affin}} = \{\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \ldots + \lambda_N v_N : \lambda_i \in \mathbb{R}, \sum_i \lambda_i = 1\}.$$

Formális definíciók (folytatás)

Definíció: Vektorok kúp kombinációja

Legyen $v_1, v_2, \ldots, v_N \in \mathbb{R}^n$ vektorok egy véges rendszere és $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_N \in \mathbb{R}_+$ nemnegatív valós számok egy rendszere. Ekkor

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \ldots + \lambda_N v_N$$

a v_i vektorok kúp kombinációja.

Definíció: Kúp $\mathbb{R}^n$-ben

$0 \in \mathcal{C} \subset \mathbb{R}^n$ egy (konvex) kúp, ha zárt a kúp kombináció képzésre.

Példa: Végesen generált kúp

$$\langle v_1, v_2, \ldots v_N \rangle_{\text{kúp}} = \{\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \ldots + \lambda_N v_N : \lambda_i \in \mathbb{R}_+\}.$$

Formális definíciók (folytatás)

Definíció: Vektorok konvex kombinációja

Legyen $v_1, v_2, \ldots, v_N \in \mathbb{R}^n$ vektorok egy véges rendszere és $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_N \in \mathbb{R}_+$ nemnegatív valós számok egy rendszere, amelyre $\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_N = 1$. Ekkor

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \ldots + \lambda_N v_N$$

a v_i vektorok konvex kombinációja.

Definíció: Konvex halmaz $\mathbb{R}^n$-ben

$\mathcal{K} \subset \mathbb{R}^n$ egy konvex ponthalmaz, ha zárt a konvex kombináció képzésre.

Példa: Végesen generált konvex halmaz

$$\langle v_1, v_2, \ldots v_N \rangle_{\text{konvex}} = \{\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \ldots + \lambda_N v_N : \lambda_i \in \mathbb{R}_+, \sum_i \lambda_i = 1\}.$$

Tételek

Tétel

Legyen $0 \in \mathcal{L} \subset \mathbb{R}^n$. Ekkor a következők ekvivalensek:

(i) Zárt az egyenessel való összekötésre.

(ii) Zárt a lineáris kombináció képzésre.

(iii) Alkalmas $A \in \mathbb{R}^{k \times n}$ esetén $Ax = 0$ megoldáshalmaza.

(iv) Végesen generált lineáris altér.

Tétel

Legyen $\mathcal{A} \subset \mathbb{R}^n$. Ekkor a következők ekvivalensek:

(i) Zárt az egyenessel való összekötésre.

(ii) Zárt az affin kombináció képzésre.

(iii) Alkalmas $A \in \mathbb{R}^{k \times n}$, $b \in \mathbb{R}^k$ esetén $Ax = b$ megoldáshalmaza.

(iv) Végesen generált affin altér.

Tételek (folytatás)

Minkowski-Weyl-Tétel

Legyen $\mathcal{C} \subset \mathbb{R}^n$. Ekkor a következők ekvivalensek:

(i) Alkalmas $A \in \mathbb{R}^{k \times n}$ esetén $Ax \preceq 0$ megoldáshalmaza.

(ii) Végesen generált kúp.

Politópok alaptétele

Legyen $\mathcal{T} \subset \mathbb{R}^n$. Ekkor a következők ekvivalensek:

(i) Korlátos poliéder ($\equiv$ politóp).

(ii) Végesen generált konvex halmaz.

Minkowski-Weyl-Tétel

Legyen $\mathcal{P} \subset \mathbb{R}^n$. Ekkor a következők ekvivalensek:

(i) Poliéder, azaz alkalmas $A \in \mathbb{R}^{k \times n}$, $b \in \mathbb{R}^k$ esetén $Ax \preceq b$ megoldáshalmaza.

(ii) $\mathcal{T} + \mathcal{C}$, ahol $\mathcal{T}$ egy politóp/végesen generált konvex halmaz és $\mathcal{C}$ egy poliedrikus/végesen generált kúp.

Rendes poliéderek

Definíció

Legyen $\mathcal{P}$ poliéder. $\mathcal{P}$-t rendesnek nevezzük, ha nem tartalmaz egyenest.

Lemma

$\mathcal{P}$ poliéder $\mathbb{R}^n$-ben: $\mathcal{P} = \{x\colon Ax \preceq b\}$. Ekkor a következők ekvivalensek:

(i) Nem rendes. Azaz van olyan $v \neq 0$ vektor, hogy alkalmas $p \in \mathcal{P}$ esetén a v irányú egyenes p-n keresztül részhalmaza $\mathcal{P}$-nek.

(ii) Van olyan $v \neq 0$ vektor, hogy minden $p \in \mathcal{P}$ esetén a v irányú egyenes p-n keresztül részhalmaza $\mathcal{P}$-nek,

(iii) A sorrangja kisebb, mint n (A oszlopainak száma/dimenzió/változószám),

(iv) $\operatorname{ext}\mathcal{P} \neq \emptyset$.

További felbontási tételek

- Ha egy nem rendes poliédert felbontunk a fenti alaptétel szerint akkor a kúp összetevőben lesz egyenes.

Definíció: Csúcsok kúpok

A kúpok között az egyenest nem tartalmazó kúpok a *csúcsosak*.

- Ezek pontosan azok, amikhez található olyan origón átmenő hipersík, amelynek szigorúan egyik oldalára esnek a kúp nem-nulla vektorai. (Ez igazolásra szorul!)
- Minden kúp egy lineáris altér és egy csúcsos kúp összege.
- Folytathatnánk a struktúrális leírást: Minden poliéder egy lineáris altér, egy csúcsos kúp és egy politóp összege.

Szünet

Poliéderek határpontjai

LINEÁRIS ALGEBRA	GEOMETRIA
	Ha a $\mathcal{P}: Ax \preceq b$ poliédert tartalmazza az $\mathcal{F}: \nu^{\mathsf{T}}x \leq \beta$ féltér és $\mathcal{P} \cap \mathcal{H} \neq \emptyset$, ahol $\mathcal{H}: \nu^{\mathsf{T}}x = \beta$ (azaz az $\mathcal{F}$ zárt féltér határa), akkor $\mathcal{F}$ féltér és a $\mathcal{H}$ hipersík a $\mathcal{P}$ poliéder támaszféltere, illetve támaszhipersíkja.
Egy $Ax \preceq b$ lineáris egyenlőlenségrendszer (feltesszük, hogy A-nak nincs 0 sora) megoldáshalmazának m pontosan akkor egy belső pontja (m egy környezete is csak megoldásokat tartalmaz), ha minden feltételt szigorú egyenlőtlenséggel teljesít.	Egy $\mathcal{P}$ poliéder határpontjai azok a pontok, amelyek minden környezetében van $\mathcal{P}$-beli és $\mathcal{P}$-n kívüli pont is. $\mathcal{P}$ határpontjainak halmazát, azaz határát $\partial\mathcal{P}$-szel jelöljük. $\mathcal{P}$ poliéder zárt, így $\partial\mathcal{P} \subseteq \mathcal{P}$.

Határpontok másképp

Tétel

Egy poliéder egy zárt, konvex halmaz.

• Ha A-nak van 0 sora, akkor az ebből adódó egyenlőtlenségnek vagy minden $x \in \mathbb{R}^n$ megoldása vagy egyetlen egy sem. Speciális esetben ($A = 0 \in \mathbb{R}^{k\times n}$, $b = 0 \in \mathbb{R}^k$) a teljes tér egy poliéder. Az üreshalmaz is poliéder.

• Már két dimenzióban is könnyű olyan zárt alakzatot adni és határának egy h pontját, hogy ne lehessen rajta támaszhipersíkot fektetni. Konvex esetben ez nincs így.

Tétel

Legyen $K \subseteq \mathbb{R}^n$ zárt konvex halmaz. A következők ekvivalensek:

(i) $p \in \partial K$,

(ii) $p \in K$ és fektethető rajta támaszhipersík.

Poliéder lapjai

Definíció

Legyen K egy zárt konvex alakzat. K egy lapja olyan részhalmaza határának, amit alkalmas támaszhipersíkkal ki tudunk metszeni K-ból.

- Természetesen a lapok is zárt, konvex alakzatok, ∂K részhalmazai.

Definíció

Legyen K egy konvex alakzat és F egy lapja. Legyen $\mathrm{aff}(F)$ az F halmaz affin burka, azaz a legszűkebb affin altér, ami tartalmazza F-et. Az F lap dimenziója $\dim(\mathrm{aff}(F))$.

Speciális lapok

- A 0-dimenziós lapok az extremális pontok, poliéder esetén csúcsok.

- A fogalom nagyon fontos érdemes külön is megfogalmazni a a fogalom definícióját.

Definíció

p-t a K *csúcsának/extremális pontjának* nevezzük, ha van olyan $H = \{x : \nu^\mathsf{T} x = \alpha\}$ támaszhipersíkja, amelyre $H \cap K = \{p\}$.

Jelölés

$\mathrm{ext}(K) = \{H \text{ extremális pontjai}\}(\subseteq \partial K \subseteq K)$.

- Az 1-dimenziós lapok K élei.

- Az $n-1$-dimenziós lapok K hiperlapjai.

Példák

Példa

(i) Legyen K zárt tömör gömb. A gömbfelület minden pontja extremális.

(ii) Legyen K zárt henger. Az alap és a fedő körlapok körvonalainak pontjai az extremálisok. Ezek mindegyik pontjához odafektetehető egy támaszsík, hogy csak ebben érintse K-t. Kontinuum számosságú extremális pont van, de a henger felszínén 0 mértékű halmazt alkotnak.

(iii) Legyen K egy tömör kocka. A 8 csúcsa, 8 extremális pontja.

(iv) Legyen K „háztető/ék”: két zárt féltér metszete. Itt az extremális pontok halmaza az üres halmaz.

Csúcsok

LINEÁRIS ALGEBRA	GEOMETRIA
Az $Ax \preceq b$ lineáris egyenlőtlenségrendszer ($a_i^{\mathsf{T}} x \leq b_i$, ahol $i = 1, 2, \ldots, k$) egy e megoldásához vehetjük azon indexek I halmazát, amit e pontosan teljesít (nem lazán). Azaz $I = \{i : a_i^{\mathsf{T}} e = b_i\}$. e csúcs-megoldás (bázis-megoldás), ha $\{a_i : i \in I\}$ kifeszíti $\mathbb{R}^n$-et.	$e \in \mathbb{R}^n$ a $\mathcal{P} : Ax \preceq b$ poliéder csúcsa, ha alkalmas támaszhipersík csak e-t metszi ki $\mathcal{P}$-ből. Ekvivalens módon e csúcs, ha nincs olyan $\mathcal{P}$-beli szakasz, amely belső pontjaként tartalmazza e-t.

Csúcsok (folytatás)

- A fenti két oszlopos tárgyalás egy szótárat ír le. A bal oldalon algebrai nyelvezettel írunk le egy fogalmat, ami a jobb oldalon geometrialiag van tárgyalva. Néha a két oldal ekvivalenciája egyértelmű. Máskor viszont egy tétel adja, hogy a két nyelvezet ugyanarról beszél. A csúcs esetén inkább egy tételről van szó.

Tétel

Legyen $\mathcal{P} : \{x : Ax \preceq b\} \subset \mathbb{R}^n$ poliéder, $e \in \mathcal{P}$. Ekkor a következők ekvivalensek:

(i) Van olyan támaszhipersík, ami $\mathcal{P}$-ből csak e-t metszi ki.

(ii) Nincs olyan $\mathcal{P}$-beli szakasz, amelynek e belső pontja.

(iii) Legyen $I = \{i : a_i^\mathsf{T} e = b_i\}$. Ekkor I olyan, hogy $\{a_i : i \in I\}$ kifeszíti $\mathbb{R}^n$-et.

Lapok

- A lapok illeszkedése, struktúrája különösen fontos a poliéderek megértéséhez. Az alábbiakban csak néhány alapösszefüggést említünk.

Definíció

$\mathcal{P}$ poliéder, $p \in \partial\mathcal{P}$

$$C_p := \{\nu \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\} : \exists\, \alpha \in \mathbb{R} \text{ hogy } \{x : \nu^\mathsf{T} x \leq \alpha\} \supseteq \mathcal{P} \text{ és } \nu p = \alpha\} \cup \{\underline{0}\}.$$

Lemma

C_p konvex kúp.

Lapok (folytatás)

- A határpontokhoz rendelt kúp új, alternatív leírását adja a csúcsoknak.

Tétel

$\mathcal{P}$ poliéder, $\mathcal{P} = \{x\colon Ax \preceq b\}$, $p \in \partial\mathcal{P}$. A következők ekvivalensek:

(i) $p \in \mathrm{ext}(\mathcal{P})$,

(ii) C_p-nek van belső pontja ($\mathbb{R}^n$-ben),

(iii) léteznek $a_{i_1}^\mathsf{T}, a_{i_2}^\mathsf{T}, \ldots, a_{i_n}^\mathsf{T}$ sorvektorok A-ban úgy, hogy

  (1) lineárisan függetlenek,

  (2) $a_{i_j}^\mathsf{T} p = b_{i_j}$ minden $j = 1, 2, \ldots, n$ esetén.

- Azaz C_p kúp pontosan akkor teljes dimenziós, ha p csúcs. Általában C_p dimenziója határozza meg milyen dimenziós lap belső pontja a határ p pontja.

Minkowski-Weyl-tétel finomítása

- Legyen $\mathcal{P}$ egy poliéder, azaz alkalmas $A \in \mathbb{R}^{k\times n}$, $b \in \mathbb{R}^k$ esetén $\mathcal{P} = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \preceq b\}$.

- Ha $\mathcal{P}$ nem rendes, akkor ezt könnyű lineáris algebrai ismeretek alapján felismerni. Sőt, fel is bonthatjuk egy affin altér és egy rendes poliéder összegeként. Feltehető, hogy poliéderünk rendes.

Tétel

Legyen $\mathcal{P} = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \preceq b\}$ egy tetszőleges rendes poliéder.
Legyen $\mathcal{C} = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \preceq 0\}$ poliedrikus/végesen generált kúp.
Legyen $\mathcal{T} = \langle ext(\mathcal{P})\rangle_{\text{conv}}$ végesen generált konvex halmaz/politóp.
Ekkor

$$\mathcal{P} = \mathcal{T} + \mathcal{C}.$$

Szünet

LP geometriailag

- Az LP alapfeladata egy lineáris, $c^{\mathsf{T}}x$ függvény minimalizálása egy poliéder felett.
- A $c^{\mathsf{T}}x$ függvény szintvonalai hipersíkok.
- Egy λ alsó becslés a célfüggvényre egy nem-üres $\mathcal{P}$ politóp felett azt jelenti, hogy a $c^{\mathsf{T}}x \geq \lambda$ féltér tartalmazza a $\mathcal{P}$ poliédert.
- A fenti féltér $c^{\mathsf{T}}x = \lambda$ hipersík határának egyik oldalára esik $\mathcal{P}$.
- A minimális célfüggvényérték akkor vevődik fel, amikor λ-t növeljük (a hipersíkot $\mathcal{P}$ felé toljuk), addig amíg a mozgó hipersík el nem éri $\mathcal{P}$-t.
- Ekkor $\mathcal{P}$ megtámasztja a hipersíkot. A támasztó pontok az optimális helyek.

Optimális helyek és csúcsok

Tétel

Legyen $\mathcal{P} = \{x : Ax \preceq b\}$ egy nemüres rendes poliéder. Tekintsük a

Minimalizáljuk	$c^\mathsf{T} x$-t
Feltéve, hogy	$Ax \preceq b$,

LP feladatokat (c változik).

Ekkor

(i) Minden $c \in \mathbb{R}^n$ esetén vagy $p^* = -\infty$ vagy van $x \in \mathrm{ext}(\mathcal{P})$ optimális helye a feladatnak.

(ii) Minden $x \in \mathrm{ext}(\mathcal{P})$-re van olyan c, hogy x az egyetlen optimális hely legyen.

Bizonyítás

(i) Tudjuk, hogy $P = \mathcal{T} + \mathcal{C}$, ahol $\mathcal{T}$ egy politóp és $\mathcal{C}$ egy kúp.

• Feltehető $p^* \neq -\infty$.

• Legyen o egy optimális hely: $o \in \mathcal{P} = \mathcal{T} + \mathcal{C}$, azaz $o = t + k$, ahol $t \in \mathcal{T}$ és $k \in \mathcal{C}$.

• Először is $c^{\mathsf{T}} k \geq 0$.

• Valóban. $\alpha \geq 0$ esetén $\alpha k \in \mathcal{C}$, azaz $t + \alpha k \in \mathcal{P}$. Ha $c^{\mathsf{T}} k < 0$ lenne, akkor a célüggvény tetszőlegesen kicsiny értéket is felvehetne.

• $c^{\mathsf{T}} k \geq 0$ esetén feltehető, hogy $k = 0$, azaz o a poliéderünk „politóp részébe” esik.

Bizonyítás (folytatás)

- Ekkor o $ext(\mathcal{T})$-beli pontok konvex kombinációja.
- Így $c^\mathsf{T} o$ a $c^\mathsf{T} e$ számok ($e \in ext(\mathcal{C})$) konvex kombinációja.

Speciálisan

$$c^\mathsf{T} o \geq \min\{c^\mathsf{T} e : e \in \mathrm{ext}(\mathcal{T})\}.$$

Ez bizonyítja az állítást.

(ii) Vegyünk egy támaszfélteret ($\{x : \nu^\mathsf{T} x \geq b\}$), amelyre $\{x : \nu^\mathsf{T} x = b\} \cap \mathcal{P} = \{x\}$.

- Nyilván $c = \nu$ egy jó választás.

Egészekkel leírt poliéder és racionális optimális helyek

Tétel

Az

Minimalizáljuk	$c^{\mathsf{T}}x$-t
Feltéve, hogy	$Ax \preceq b$

LP alapfeladatra tegyük fel, hogy $A \in \mathbb{Q}^{k\times n}$, $b \in \mathbb{Q}^k$. Továbbá $\{x : Ax \preceq b\}$ egy rendes poliéder.

Ekkor ha $p^* \in \mathbb{R}$, akkor van $x \in \mathbb{Q}^n$ optimális hely.

Bizonyítás

- Ha $p^* \in \mathbb{R}$, akkor választható $e \in \mathrm{ext}(\mathcal{P})$ optimális hely.

- Ekkor azon $a_i^\mathsf{T} x \leq b_i$ feltételek, amelyeket e egyenlőséggel elégít ki olyanok, hogy a megfelelő a_i vektorok kifeszítik $\mathbb{R}^n$-et.

- Speciálisan felírható egy n egyenletből álló egyenletrendszer, amely mátrixa A részmátrixa, konstansai b egyes komponensei és egyértelmű megoldása e.

- Cramer-szabály alapján e komponensei két racionális számokat tartalmazó mátrix determinánsának hányadosa, speciálisan racionális.

Szünet

Farkas-Lemma: I. alternatíva forma

Farkas-lemma, I. alternatíva forma

Legyen $Ax \preceq b$ egy egyenletrendszer, ahol $A \in \mathbb{R}^{k\times n}$, $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ és $b \in \mathbb{R}^k$. Ekkor a következő két állítás közül pontosan egy teljesül:

(i) Az egyenletrendszer megoldható, azaz alkalmas $x_0 \in \mathbb{R}^n$ szám n-esre $Ax_0 \preceq b$.

(ii) Alkalmas $0 \preceq \lambda \in \mathbb{R}^k$ nemnegatív szám k-asra $\lambda^\mathsf{T} A = 0^\mathsf{T}$ és $\lambda^\mathsf{T} b = -1$.

II. alternatíva forma

Farkas-lemma, II. alternatíva forma

Legyen $\begin{cases} Ax = b \\ x \succeq 0 \end{cases}$ egy egyenletrendszer, ahol $A \in \mathbb{R}^{\ell \times n}$,

$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ és $b \in \mathbb{R}^{\ell}$. Ekkor a következő két állítás közül pontosan egy teljesül:

(i) Az egyenletrendszer megoldható, azaz alkalmas $0 \preceq x_0 \in \mathbb{R}^n$ szám n-esre $Ax_0 = b$.

(ii) Alkalmas $\lambda \in \mathbb{R}^{\ell}$ szám ℓ-esre $\lambda^{\mathsf{T}} A \succeq 0^{\mathsf{T}}$ és $\lambda^{\mathsf{T}} b = -1$.

Farkas-lemma: Geometriai alak

Legyen $\mathcal{C} \subset \mathbb{R}^n$ egy végesen generált kúp. Azaz alkalmas $G \in \mathbb{R}^{n\times k}$ mátrixra

$$\mathcal{C} = \{G\lambda : 0 \preceq \lambda \in \mathbb{R}^k\}.$$

G oszlopvektorai a kúp generátorai.

• Másképpen $b \in \mathcal{C}_G$ akkor és csak akkor ha $\begin{cases} Gx = b, \\ 0 \preceq x \end{cases}$ megoldható.

• Egy ilyen egyenlőtlenségrendszer negoldhatósága éppen a Farkas-lemma egyik alternatívája. Mi a másik alternatíva?

Farkas-lemma: Geometriai alak (folytatás)

- A Farkas-lemma alapján $\begin{cases} Gx = b, \\ 0 \preceq x \end{cases}$ nem megoldhatósága

ekvivalens olyan $\lambda \in \mathbb{R}^n$ vektor létezésével, hogy

$$\lambda^\mathsf{T} G \succeq 0, \text{ míg } \lambda^\mathsf{T} b = -1.$$

- Másképpen fogalmazva a $\mathcal{H} : \lambda^\mathsf{T} x = 0$ origón átmenő hipersík $\mathcal{F}^{\geq} : \lambda^\mathsf{T} x \geq 0$ oldala tartalmazza a $\mathcal{C}$ kúpot, míg a másik $\mathcal{F}^{\leq} : \lambda^\mathsf{T} x \leq 0$ féltere belsejében tartalmazza b-t.

Farkas-lemma: Geometriai forma.

Legyen $\mathcal{C} \subset \mathbb{R}^n$ egy végesen generált kúp, $b \notin \mathcal{C}$. Ekkor van olyan $\mathcal{H} : \lambda^\mathsf{T} x = 0$ hipersík, amely szeparálja/elválasztja a kúpot és b-t.

Weyl-tétel bizonyítása: Ha egy kúp végesen generált, akkor poliedrikus

Legyen $\mathcal{G} = \{G\lambda : 0 \preceq \lambda\}$ egy végesen generált kúp.

Legyen
$$\widehat{\mathcal{G}} = \left\{ \begin{pmatrix} \lambda \\ y \end{pmatrix} : y = G\lambda, 0 \preceq \lambda \right\}.$$

Nyilván $\widehat{\mathcal{G}}$ egy poliéder.

Nyilván $\mathcal{G}$ a $\widehat{\mathcal{G}}$ projekcióiból megkapható.

Tétel

Egy poliéder projekciója is poliéder.

Tudjuk, hogy $\mathcal{G}$ egy poliéder és egy kúp.

Lemma

Tudjuk, hogy $\mathcal{C}$ egy poliéder és egy kúp. Ekkor $\mathcal{C}$ egy poliedrikus kúp.

Minkowski-lemma

Lemma

Tegyük fel, hogy

$$\{x : Ax \preceq 0\} = \{G\lambda : 0 \preceq \lambda\}.$$

Ekkor

$$\{x : G^{\mathsf{T}}x \preceq 0\} = \{A^{\mathsf{T}}\lambda : 0 \preceq \lambda\}.$$

- A Lemma feltételét két tartalmazásként is felfoghatjuk:

$$\{x : Ax \preceq 0\} \supset \{G\lambda : 0 \preceq \lambda\}.$$

$$\{x : Ax \preceq 0\} \subset \{G\lambda : 0 \preceq \lambda\}.$$

Minkowski-lemma: Az első feltétel

$$\{x : Ax \preceq 0\} \supset \{G\lambda : 0 \preceq \lambda\}.$$

- A baloldal elemei G oszlopainak kúp kombinációi. A tartalmazás szerint ezen vektorok mindegyike benne van a bal oldali halmazban.
- Ez azonban ekvivalens azzal, hogy G oszlopai benne vannak a bal oldali halmazban.
- Ez azonban ekvivalens azzal, hogy

$$AG \text{ elemei mind nempozitívak.}$$

Minkowski-lemma: A második feltétel

$$\{x : Ax \preceq 0\} \subset \{G\lambda : 0 \preceq \lambda\}.$$

- A bal oldal egy b eleme a jobb oldalban is benne van. Azaz $Ab \preceq 0$ esetén a $\begin{cases} G\lambda = b \\ 0 \preceq \lambda \end{cases}$ rendszer megoldható.
- A Farkas-lemma alapján ez ekvivalens módon átfogalmazható: $\begin{cases} Ab \preceq 0 \\ \mu^\mathsf{T} G \preceq 0 \\ \mu^\mathsf{T} b = 1 \end{cases}$ rendszernek nincs megoldása.

Minkowski-lemma: A feltételek

- A fentiek alapján a feltételek

AG elemei mind nempozitívak és $\begin{cases} Ab \preceq 0 \\ \mu^{\mathsf{T}} G \preceq 0 \\ \mu^{\mathsf{T}} b = 1 \end{cases}$ nem megoldható.

- Másképpen

$G^{\mathsf{T}} A^{\mathsf{T}}$ elemei mind nempozitívak és $\begin{cases} G^{\mathsf{T}} \mu \preceq 0 \\ b^{\mathsf{T}} A^{\mathsf{T}} \preceq 0 \\ b^{\mathsf{T}} \mu = 1 \end{cases}$ nem megoldható.

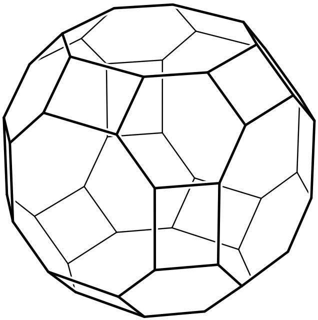
- A fentiek alapján ez a bizonyítandóval ekvivalens.

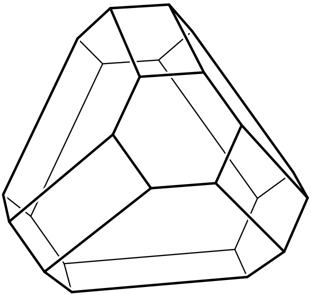
Politópok

Definíció

$\mathcal{P} \subset \mathbb{R}^n$ poliédert politópnak nevezzük, ha korlátos.

- A korlátos poliéderek/politópok fontos szerepet játszanak a poliéderek megértésében.





Konvex politópok alaptétele

Tétel

Legyen $\mathcal{P} \subset \mathbb{R}^d$. Ekkor a következők ekvivalensek

(i) $\mathcal{P}$ egy korlátos poliéder.

(ii) $\mathcal{P}$ véges sok $\mathbb{R}^d$-beli pont konvex burka.

Poliéderek „kúposítása", homogenizálás

Legyen $\mathcal{P}$ egy poliéder, azaz

$$\mathcal{P} = \{x : Ax \preceq b\} \subset \mathbb{R}^d.$$

Legyen

$$\widehat{\mathcal{P}} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ \lambda \end{pmatrix} : x \in \mathbb{R}^d, \lambda \in \mathbb{R}, Ax \preceq \lambda b, 0 \leq \lambda \right\} \subset \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_+ \subset \mathbb{R}^{d+1}.$$

Példa

$$\mathcal{P} = \{(x, y)^\mathsf{T} : x \leq 0, y \leq 0\} \subset \mathbb{R}^2.$$

$$\widehat{\mathcal{P}} = \{(x, y, \lambda)^\mathsf{T} : x \leq 0, y \leq 0, \lambda \geq 0\} \subset \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}_+ \subset \mathbb{R}^3.$$

Poliéderek „kúposítása”: Az állítás

Észrevétel

(i) $x \in \mathcal{P}$ akkor és csak akkor, ha $\begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix} \in \widehat{\mathcal{P}}$.

(ii) $\widehat{\mathcal{P}}$ egy poliedrikus kúp.

Konvex politópok alaptétele: A bizonyítás (i)⇒(ii)

- $\mathcal{P}$ korlátos, így az észrevételben szereplő $\widehat{\mathcal{P}}$ poliedrikus kúp csak 0-t tartalmazza a $\lambda = 0$ hipersíkról.
- Weyl tétele alapján

$$\widehat{\mathcal{P}} = \langle \widehat{g}_1, \widehat{g}_2, \ldots, \widehat{g}_k \rangle_{\text{kúp}} = \left\langle \begin{pmatrix} g_1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} g_2 \\ 1 \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} g_k \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle_{\text{kúp}}$$

- Így

$$\begin{pmatrix} g \\ 1 \end{pmatrix} \in \widehat{\mathcal{P}}$$

akkor és csak akkor ha

$$g \in \langle g_1, g_2, \ldots, g_k \rangle_{\text{konvex}}$$

Konvex politópok alaptétele: A bizonyítás (ii)$\Rightarrow$(i)

Feltesszük, hogy $\mathcal{P} = \langle g_1, g_2, \ldots, g_k \rangle_{\text{konv}}$. Nyilván $\mathcal{P}$ korlátos. Legyen

$$\widehat{\mathcal{P}} = \left\langle \begin{pmatrix} g_1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} g_2 \\ 1 \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} g_k \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle_{\text{kúp}},$$

végesen generált kúp.

Weyl tétele alapján alkalmas $(A| - b)$ mátrixra

$$\widehat{\mathcal{P}} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ \lambda \end{pmatrix} : (A| - b) \begin{pmatrix} x \\ \lambda \end{pmatrix} \preceq 0 \right\}.$$

Ekkor

$$\mathcal{P} = \{x : Ax \preceq b\},$$

azaz $\mathcal{P}$ egy poliéder.

Geometriai halmazok összeadása

Definíció

Legyen $A, B \subset \mathbb{R}^d$. Ekkor

$$A + B = \{a + b : a \in A, b \in B\}$$

az A, B ponthalmazok direkt vagy Minkowski-összege.

Minkowski—Weyl-tétel

Minkowski—Weyl-tétel

(i) Legyen $\mathcal{P}$ egy tetszőleges poliéder. Ekkor alkalmas $\mathcal{T}$ végesen generált konvex halmazra/politópra és $\mathcal{C}$ végesen generált kúpra

$$\mathcal{P} = \mathcal{T} + \mathcal{C}.$$

(ii) Legyen $\mathcal{T}$ egy végesen generált konvex halmaz/politóp és $\mathcal{C}$ egy végesen generált kúp. Ekkor $\mathcal{T} + \mathcal{C}$ egy poliéder

Minkowski—Weyl-tétel: A bizonyítás: (i)

- $\mathcal{P}$-hez definiáltunk egy $\widehat{\mathcal{P}}$ poliedrikus kúpot.
- Weyl tétele alapján

$$\widehat{\mathcal{P}} = \left\langle \begin{pmatrix} g_1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} g_2 \\ 1 \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} g_k \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} h_1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} h_2 \\ 0 \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} h_\ell \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle_{\text{kúp}},$$

- Ekkor

$$\mathcal{P} = \langle g_1, g_2, \ldots, g_k \rangle_{\text{konvex}} + \langle h_1, h_2, \ldots, h_\ell \rangle_{\text{kúp}},$$

Minkowski—Weyl-tétel: A bizonyítás: (ii)

Feltesszük, hogy $\mathcal{P} = \langle g_1, g_2, \ldots, g_k \rangle_{\text{konv}} + \langle h_1, h_2, \ldots, h_\ell \rangle_{\text{kúp}}$. Legyen

$$\widehat{\mathcal{P}} = \left\langle \begin{pmatrix} g_1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} g_2 \\ 1 \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} g_k \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} h_1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} h_2 \\ 0 \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} h_\ell \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle_{\text{kúp}},$$

végesen generált kúp.

Weyl tétele alapján alkalmas $(A| - b)$ mátrixra

$$\widehat{\mathcal{P}} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ \lambda \end{pmatrix} : (A| - b) \begin{pmatrix} x \\ \lambda \end{pmatrix} \preceq 0 \right\}.$$

Ekkor

$$\mathcal{P} = \{x : Ax \preceq b\},$$

azaz $\mathcal{P}$ egy poliéder.

Vége van!

Köszönöm a figyelmet!