Lagrange dualizálás, példák

Hajnal Péter

2021. tavasz

A kiinduló feladat

- Tekintsük az alábbi, explicit feltételekkel megadott optimalizálási feladatot:

$$\boxed{\begin{array}{lll} \text{Minimalizáljuk} & c(x)\text{-t} & \\ \text{Feltéve, hogy} & f_i(x) \leq 0, & i = 1, \ldots, k, \\ & g_j(x) = 0, & j = 1, \ldots, \ell, \end{array}} \qquad \text{(P)}$$

ahol $x \in \mathbb{R}^n$, $c : \mathrm{dom}\ (c)(\subset \mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}$, $x = (x_1, \ldots, x_n)^\mathsf{T}$, f_i és g_j pedig n változós valós értékű függvények.

- Legyen

$$f = \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_k \end{pmatrix} : \cap_{i=1}^{k} \mathrm{dom}\ f_i \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k, \text{ és } g = \begin{pmatrix} g_1 \\ \vdots \\ g_\ell \end{pmatrix} : \cap_{j=1}^{\ell} \mathrm{dom}\ g_j \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^\ell$$

Jelöléstechnika

- Ezen írásmóddal felírva a feladatunk az alábbi alakot ölti:

Minimalizáljuk	$c(x)$-t
Feltéve, hogy	$f(x) \preceq 0,$
	$g(x) = 0.$

- Jó mindig szem előtt tartani, hogy mit takar a tömör jelölés. A fentiekben például a 0 jelek $\mathbb{R}^k$ illetve $\mathbb{R}^\ell$-beli nulvektorokat jelentenek.

Duális változók

• A következőkben új változókat fogunk bevezetni a feltételekhez. Minden egyenlőtlenséghez tartozni fog egy λ_i és minden egyenlőséghez tartozni fog egy μ_i. Ezeket Lagrange-multiplikátoroknak vagy másképpen duális változónak nevezzük. Az előbbiekhez hasonlóan élni fogunk most is a vektoros jelölésmóddal:

$$\lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_k \end{pmatrix}, \quad \mu = \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \vdots \\ \mu_\ell \end{pmatrix}.$$

Lagrange-függvény

- Bevezetjük az optimalizálási feladathoz tartozó Lagrange-függvény fogalmát.

Definíció

$$L(x;\lambda,\mu)=c(x)+\sum_{i=1}^{k}\lambda_i f_i(x)+\sum_{j=1}^{\ell}\mu_j g_j(x)=c(x)+\lambda^{\mathsf{T}}f(x)+\mu^{\mathsf{T}}g(x).$$

- A Lagrange-függvény értelmezési tartománya megegyzik a kiinduló, (P) optimálizálási feladat értelmezési tartományával, amit $\mathcal{D}$-vel jelöltünk.

Lagrange-függvény: Észrevétel

Észrevétel

Ha x lehetséges megoldás (azaz $x \in \mathcal{L}$), továbbá $0 \preceq \lambda$, akkor teljesül a $c(x) \geq L(x; \lambda, \mu)$ egyenlőtlenség.

• Valóban: Mivel $x \in \mathcal{L}$, ezért minden j-re $g_j(x) = 0$ és így $\sum \mu_j g_j(x) = 0$.

Minden i-re $\lambda_i \geq 0$, továbbá $f_i(x) \leq 0$, ebből $\sum \lambda_i f_i(x) \leq 0$.

Ha ehhez hozzátesszük, hogy $c(x) = c(x)$ és összegezzük az eddigieket, akkor épp az alábbi adódik:

$$L(x, \lambda, \mu) \leq c(x).$$

• Tehát minden nem-negatív kordinátájú λ és tetszőleges μ-vel egy alsó becslést kapunk $c(x)$-re L kiértékelésével.

Duális célfüggvény

• Előnyös, ha alsó becslésünk nem függ x-től. A következő definíció alsó becslésünket csak a duális változóktól függővé teszi.

Definíció: Lagrange-célfüggvény/Duális célfüggvény

$$\widetilde{c}(\lambda, \mu) = \inf_{x \in \mathcal{D}} L(x, \lambda, \mu).$$

• Vegyük észre, hogy ez is egy optimalizálási feladatot jelent, de ennek nincsenek feltételei. Pontosabban „az eredeti feltételek be vannak építve a célfüggvénybe”.

Az előző észrevételből rögtön adódik, hogy $x \in \mathcal{L}$ és $\lambda \succeq 0$ esetén

$$c(x) \geq \widetilde{c}(\lambda, \mu).$$

Ez azért van így, mert $c(x) \geq L(\lambda, \mu, x) \geq \widetilde{c}(\lambda, \mu)$.

Duális probléma

- Definiáljuk a (P) probléma duálisát.

Definíció: Duális optimalizálási feladat

$$\boxed{\begin{array}{ll} \text{Maximalizáljuk} & \widetilde{c}(\lambda,\mu)\text{-t} \\ \text{feltéve, hogy} & \lambda \succeq 0. \end{array}} \qquad \text{(D)}$$

- A duális problémát (D)-vel jelöljük, optimális értékét pedig d^*-gal. (Az eredeti (P) probléma a primál feladat; ennek optimális értéke p^*).

Gyenge dualitás tétel

Gyenge dualitás tétel

$$p^* \geq d^*.$$

• A korábbiak alapján nyilvánvaló.

• A duális feladat célfüggvénye „garantáltan szép”, minimalizálási feladatként megfogalmazva

Minimalizáljuk	$-\widetilde{c}(\lambda, \mu)$-t
Feltéve, hogy	$\lambda \succeq 0.$

a célfüggvény konvex lesz:

Tétel

$\widetilde{c}(\lambda, \mu)$ konkáv, azaz $-\widetilde{c}(\lambda, \mu)$ konvex.

Dualitás: Szóhasználat

- Igen sokszor a gyenge dualitás tétel egyenlőséggel teljesül.
- Ekkor azt mondjuk, hogy erős dualitás igaz.
- Ez azonban nem szükségszerű.
- Amikor $p^* - d^* > 0$ akkor azt mondjuk, hogy (pozitív) dualitási hézag van.

Szünet

Dualizálás Példa I: LP szimplex forma

Példa

$$\boxed{\begin{array}{ll} \text{Minimalizáljuk} & c^{\mathsf{T}}x\text{-t} \\ \text{Feltéve, hogy} & Ax = b \\ & x \succeq 0 \end{array}}$$

- Ebben az esetben a Lagrange-függvény:

$$\begin{aligned} L(\lambda, \mu, x) &= c^{\mathsf{T}}x - \lambda^{\mathsf{T}}x + \mu^{\mathsf{T}}(Ax - b) = (c^{\mathsf{T}} - \lambda^{\mathsf{T}} + (A^{\mathsf{T}}\mu)^{\mathsf{T}})x - \mu^{\mathsf{T}}b \\ &= (c - \lambda + A^{\mathsf{T}}\mu)^{\mathsf{T}}x - b^{\mathsf{T}}\mu. \end{aligned}$$

- A duális célfüggvény (λ, μ) helyen vett értékének meghatározásához egy lineáris függvény globális minimumát kell venni.

Dualizálás Példa I: LP szimplex forma: Kitérő

• Feladatunk az $a^\mathsf{T}x + \alpha$ függvény minimalizálása.

• Egy változós lináris függvények (globális) minimalizálása jól vizualizálható. A grafikon egy egyenes. Ha ez a grafikon egy vízszintes egyenes (függvényünk egy α konstans), akkor α a minimum. Más esetben tetszőlegesen kis értéket felvehet függvényünk.

• Több változó esetén hasonló a helyzet. Ha az együtthatók vektora a 0-vektor, akkor lineáris függvényünk konstans. Ha a valamelyik koordinátája (valamelyik x_i együtthatója) nem 0, akkor a lineáris függvény bármilyen kicsi értéket felvehet.

Észrevétel

$$\inf_{x\in\mathbb{R}^n} a^\mathsf{T}x + \alpha = \begin{cases} \alpha, & a = 0 \\ -\infty, & a \neq 0 \end{cases}$$

Dualizálás Példa I: LP szimplex forma (folytatás)

- A kitérő után a dualizált felírása egyértelmű:

$$\widetilde{c}(\lambda, \mu) = \inf_{x \in \mathbb{R}^n} (c - \lambda + A^\mathsf{T}\mu)^\mathsf{T} x - b^\mathsf{T}\mu = \begin{cases} -b^\mathsf{T}\mu, & \text{ha } c - \lambda + A^\mathsf{T}\mu = 0, \\ -\infty, & \text{különben.} \end{cases}$$

- A duális feladat:

Maximalizáljuk	$\widetilde{c}(\lambda, \mu)$-t
Feltéve, hogy	$\lambda \succeq 0$

- Azaz ekvivalens módon:

Maximalizáljuk	$-b^\mathsf{T}\mu$-t
Feltéve, hogy	$c - \lambda + A^\mathsf{T}\mu = 0$
	$\lambda \succeq 0$

Dualizálás Példa I: LP szimplex forma (folytatás)

- Azaz ekvivalens módon:

Minimalizáljuk	$b^{\mathsf{T}}\mu$-t
Feltéve, hogy	$c + A^{\mathsf{T}}\mu \succeq 0$

Azaz az LP feladat szimplex formájának duálisa is egy LP feladat. Az LP feladat úgy nevezett poliedrikus formája.

Dualizálás Példa II: LP poliedrikus forma

Példa

Minimalizáljuk	$c^T x$-t
Feltéve, hogy	$Ax \preccurlyeq b.$

- Kapjuk, hogy

$$L(x,\lambda) = c^{\mathsf{T}} x + \lambda^{\mathsf{T}} (Ax - b) = \left(c + A^{\mathsf{T}}\lambda\right)^{\mathsf{T}} x - b^{\mathsf{T}}\lambda.$$

- Ekkor

$$\widetilde{c}(\lambda) = \begin{cases} -b^{\mathsf{T}}\lambda, & \text{ha } c + A^T\lambda = 0, \\ -\infty, & \text{különben.} \end{cases}.$$

Dualizálás Példa II: LP poliedrikus forma (folytatás)

- A duális feladat:

Maximalizáljuk	$-b^{\mathsf{T}}\lambda$-t
Feltéve, hogy	$c + A^{\mathsf{T}}\lambda = 0$
	$\lambda \succcurlyeq 0.$

Ekvivalens módon:

Minimalizáljuk	$b^{\mathsf{T}}\lambda$-t
Feltéve, hogy	$c + A^{\mathsf{T}}\lambda = 0$
	$\lambda \succcurlyeq 0.$

- Az előző két példában az LP feladat talán két legelterjedtebb normálalakját dualizáltuk. Mindkettő ugyanazt a problémakört formalizálja. A különböző alak miatt a dualizálás más úton haladt. Kiderült, hogy a két alak egymás duálisa.

Dualizálás Példa II: LP: Erős dualitás

- Operációkutatás tárgyból az is ismert lehet, hogy a mindig igaz gyenge dualitás mellett sokszor erős dualitás teljesül LP feladatok esetén. Az egyetlen lehetőség pozitív dualitási hézagra az, amikor $p^* = \infty$ és $d^* = -\infty$ egyszerre teljesül. Azaz ha bármelyik feladatnak véges optimuma van, akkor a másiknak is, és a két optimális érték egybeesik.

Tétel

Tekintsünk egy tetszőleges LP feladatot. Ekkor az alábbi két lehetőség közül pontosan egy teljesül:

(1)

$$p^* = \infty > -\infty = d^*,$$

(2)

$$p^* = d^*.$$

Dualizálás Példa III: Folyam-probléma

Példa

$\mathcal{H} = (\overrightarrow{G}, s, t, c)$ egy hálózat, ahol $\overrightarrow{G}$ egy irányított gráf, s és t ezen gráf két kitüntetett csúcsa (forrás és nyelő), c pedig kapacitás függvény. $c : E(\overrightarrow{G}) \to \mathbb{R} \equiv c \in \mathbb{R}^{E(\overrightarrow{G})}$.

A folyam minden élhez egy anyagmennyiséget rendel úgy, hogy ez 0 és a megfelelő él kapacitása között legyen (kapacitás feltételek). Továbbá úgy, hogy a forrás és nyelő csúcsoktól eltérő pontokban teljesüljön az anyagmegmaradás törvénye.

Keressük az f folyamot, melynek értéke maximális.

- Az $f : E(\overrightarrow{G}) \to \mathbb{R}$ folyam-függvény leírható $f \in \mathbb{R}^{E(\overrightarrow{G})}$, azaz $x = (f(e_1), \ldots, f(e_m))^{\mathsf{T}} \in \mathbb{R}^E$ vektorként.

- A kapacitások is kezelhetők vektorként. A kapacitásfeltételtek algebraizálása: $0 \preceq x \preceq c$.

Dualizálás Példa III: Folyam-probléma (folytatás)

- A megmaradási törvény is algebrai alakba írhatók:

$$\sum_{e:vKe} x_e - \sum_{e:vBe} x_e = 0 \quad \text{minden } v \in V \setminus \{s, t\}\text{-re.}$$

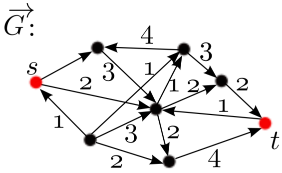
- A célfüggvény/f folyam értéke ($x = x(\text{folyam})$)

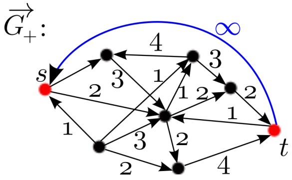
$$c(x) = \text{é}(f) = \sum_{e:sKe} x_e - \sum_{e:sBe} x_e.$$

- Előttünk van a folyamfeladat egy LP alakja. A nyilvánvaló formalizálásba egy kis „csavart” viszünk be.

Dualizálás Példa III: Folyam-probléma (folytatás)

• Tekintsük a hálózat alábbi módosítását: $\overrightarrow{G}$-be behúzunk egy végtelen kapacitású extra élet (kapacitás feltétel nélküli élet), amely a t-ből s-be vezet.





• Ebben a $\overrightarrow{G}_+$ gráfban egy adott folyam a régi éleken maradjon meg, az e_+ élen pedig értéknyi anyagmennyisége legyen. Így minden csúcsban teljesül a megmaradási törvény (hálózatunk egy úgy nevezett cirkuláció). Legyen $x_+ = \binom{x}{v}$ az új élnek megfelelő változóval kibővített változóvektor, azaz az új koordináta $v = \text{é}(f)$, a folyam értéke.

Dualizálás Példa III: Folyam-probléma (folytatás)

- Jelölje A a $\overrightarrow{G}$, illetve A_+ a $\overrightarrow{G}_+$ gráf illeszkedési mátrixát.
- A folyam probléma a következő:

Maximalizáljuk	v,-t
Feltéve, hogy	$0 \preceq x \preceq c$,
	$A_+ x_+ = 0$.

- A mátrixos alakban írt lineáris egyenletrendszernek $|V|$ sok egyenletet takar, a most más az összes csúcsra felírt megmaradási törvényt. A dualizáláshoz a szokásos alakra térünk át:

Minimalizáljuk	$-v$,-t
Feltéve, hogy	$-x \preceq 0$,
	$x - c \preceq 0$,
	$A_+ x_+ = 0$.

Dualizálás Példa III: Folyam-probléma (folytatás)

- A Lagrange-függvény:

$$L(x_+;\lambda_1,\lambda_2,\mu) = -v + \lambda_1^\mathsf{T}(-x) + \lambda_2^\mathsf{T}(x-c) + \underbrace{\underbrace{\mu^\mathsf{T} A_+ x_+}_{(A_+^\mathsf{T}\mu)^\mathsf{T} x_+}}_{(A^\mathsf{T}\mu)^\mathsf{T} x + (\mu_s - \mu_t)v} =$$

$$=(-1+\mu_s-\mu_t)v + (\lambda_2-\lambda_1+A^\mathsf{T}\mu)^\mathsf{T} x - \lambda_2^\mathsf{T} c$$

- Innen a duális célfüggvény pedig

$$\widetilde{c} = \begin{cases} -\lambda_2^\mathsf{T} c, & \text{ha } (-1+\mu_s-\mu_t) = 0 \text{ és } \lambda_2 - \lambda_1 + A^\mathsf{T}\mu = 0 \\ -\infty, & \text{különben} \end{cases}$$

Dualizálás Példa III: Folyam-probléma (folytatás)

- A (D) duális feladat:

Maximalizáljuk	$-\lambda_2^{\mathsf{T}} c$-t
Feltéve, hogy	$\mu_s - \mu_t = 1$
	$\lambda_2 = \lambda_1 - A^{\mathsf{T}} \mu$
	$\lambda_1, \lambda_2 \succeq 0$

- Az alábbiakban elemi módszerekkel „átgondoljuk” a duális problémát.

Dualizálás Példa III: Folyam-probléma: 1. +2. Észrevétel

1. Észrevétel

A cél, hogy minél kisebb λ_2 komponenseink legyenek, azaz a (nem-negatív) változóvektor koordinátái minél közelebb legyenek 0-hoz. Ehhez elegendő a μ és λ_1 komponenseket jól megválasztani.

• Ha μ adott, akkor λ_1 választása a józan ész által előírt: Ha $(A^\mathsf{T}\mu)_e \geq 0$, akkor $(\lambda_1)_e = (A^\mathsf{T}\mu)_e$ az optimális választás (ekkor $(\lambda_2)_e = 0$). Ha pedig $(A^\mathsf{T}\mu)_e < 0$, akkor $(\lambda_1)_e = 0$ juttat a „legjobb" $(\lambda_2)_e$-hez.

2. Észrevétel*

Létezik egész komponensű optimális hely.

• Ez nem egyszerű. Később a félév során bebizonyítjuk.

Dualizálás Példa III: Folyam-probléma: 3. Észrevétel

3. Észrevétel

A dualizált feladat feltételrendszerének feltételeiben a μ vektor csak két μ koordináta különbségeként szerepel: $e = \overrightarrow{uv}$ élre $(A^{\mathsf{T}}\mu)_e = \mu_v - \mu_u$. Továbbá az az előnyös ha ez a különbség — amennyiben negatív — minél közelebb legyen 0-hoz.

- Ha $\mu \in \mathbb{R}^V$ egy lehetséges megoldás, akkor tetszőleges c konstansra $\mu + \begin{pmatrix} c \\ c \\ \vdots \\ c \end{pmatrix} = \mu + c \cdot 1^{\mathsf{T}}$ is az, sőt egyenértékű a kiinduló μ-vel.

- Ilyen eltolások miatt feltehető, hogy a μ vektorra $\mu_s = 1$ és $\mu_t = 0$ (normálás).

Dualizálás Példa III: Folyam-probléma: Észrevételeink eredője

- Továbbá legyen

$$k : \mathbb{Z} \to \{0, 1\} \subset \mathbb{Z}, \quad k(z) = \begin{cases} 1 & z \geq 1 \\ 0 & z \leq 0 \end{cases}$$

egy „kontrakció" függvény.

- Ha μ lehetséges megoldás, akkor a kontrakcióval kapott $\widetilde{\mu} = k \circ \mu$ 0-1 vektor is az és „legalább olyan jó" mint a kiinduló μ.

- **Észrevételeink eredője:** (D) optimális megoldásának keresésénél a $\mu \in \{0, 1\}^V$, és $\mu_s = 1$, $\mu_t = 0$ feltételeknek elegettevő megoldások között elég keresnünk.

Dualizálás Példa III: Folyam-probléma (folytatás)

• Ebből kiszámítható, hogy a célfüggvényben mely c_e élkapacitásoknak lesz nem-nulla együtthatója. Éppen a $S = \{v \in V : \mu(v) = 1\}$ halmazból a $T = \{v \in V : \mu(v) = 0\}$ halmazba vezető élek lesznek ilyenek (egy ilyen e élen lesz $(A^\mathsf{T}\mu)_e = -1$, amikor az optimális választás $(\lambda_1)_e = 0$ és $(\lambda_2)_e = 1$ értékeket oszt ki).

• Azaz a μ által definiált s-t vágás kapacitása lesz a célfüggvény értéke.

• A duális feladat a meggondolások után épp a minimális kapacitású vágás problémája:

Minimalizáljuk	$C(\mathcal{V})$-t
Feltéve, hogy	$\mathcal{V}$ egy s-t vágás.

• A gyenge dualitás tétel éppen azt mondja, hogy minden vágás kapacitása felülről becsüli minden folyam értékét. Azt is tudjuk, hogy a két optimalizálási feladat optimális értéke közös.

Szünet

Dualizálás Példa IV: Legkisebb négyzetek problémája

Példa

Minimalizáljuk	$x^{\mathsf{T}}x$-t
Feltéve, hogy	$Ax = b$,

ahol $x \in \mathbb{R}^n$, $A \in \mathbb{R}^{\ell \times n}$, $b \in \mathbb{R}^{\ell}$.

- Ekkor
$$L(x; \mu) = x^{\mathsf{T}}x + \mu^{\mathsf{T}}(Ax - b).$$

- $\widetilde{c}$-t felírva:

$$\widetilde{c}(\mu) = \inf_{x \in \mathbb{R}^n} L(\mu, x) = \inf_{x \in \mathbb{R}^n} (x^{\mathsf{T}}x + \underbrace{\mu^{\mathsf{T}}(Ax))}_{(A^{\mathsf{T}}\mu)^{\mathsf{T}}x} - \underbrace{\mu^{\mathsf{T}}b}_{x-\text{független}}$$

Dualizálás Példa IV: Legkisebb négyzetek problémája (folytatás)

- Az x-re vonatkozó infumumvétel olyan függvényre történik, amely x-től függő része

$$\widetilde{L} = x^{\mathsf{T}}x + (A^{\mathsf{T}}\mu)^{\mathsf{T}}x.$$

- $\widetilde{L} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ másodfokú polinomfüggvény, differenciálható, így a differenciálszámítás eszközei alkalmazhatók a szélsőérték keresésére.

- L gradiense:

$$\nabla L = \text{grad } L = 2x + A^{\mathsf{T}}\mu.$$

- Tudjuk, hogy szélsőértéknél a gradiens értéke 0. $\nabla_x L = 0$ akkor és csak akkor, ha $x = -\frac{1}{2}A^{\mathsf{T}}\mu$.

Dualizálás Példa IV: Legkisebb négyzetek problémája (folytatás)

- A gradiens 0 volta általában még nem feltétlenül jelentene minimumot, de esetünkben egy konvex függvényről van szó, így itt biztosan minimumhely lesz. Tehát x helyére $-\frac{1}{2}A^{\mathsf{T}}\mu$-t beírva adódik, hogy

$$\widetilde{c}(\mu) = \left(-\frac{1}{2}A^{\mathsf{T}}\mu\right)^{\mathsf{T}} \cdot \left(-\frac{1}{2}A^{\mathsf{T}}\mu\right) + (A^{\mathsf{T}}\mu)^{\mathsf{T}} \cdot \left(-\frac{1}{2}A^{\mathsf{T}}\mu\right) - b^{\mathsf{T}}\mu =$$
$$= -\frac{1}{4}\mu^{\mathsf{T}}AA^{\mathsf{T}}\mu - b^{\mathsf{T}}\mu.$$

- A duális probléma

Maximalizáljuk	$-\frac{1}{4}\mu^{\mathsf{T}}AA^{\mathsf{T}}\mu - \mu^{\mathsf{T}}b$-t

- Tehát a duális (D) probléma egy feltétel nélküli optimalizálási kérdés.

Dualizálás Példa V: Maximális vágás

Példa

Adott egy G egyszerű gráf. A feladat olyan $\mathcal{V}$ vágás keresése (csúcsok két osztályba sorolása, melyben az $|E(\mathcal{V})|$ maximális (minél több él haladjon „keresztbe").

- Először formalizáljuk/aritmetizáljuk a problémát.

- Egy vágást úgy írhatunk le, hogy minden csúcsra plusz vagy mínusz 1 komponenssel kódoljuk, hogy a vágás melyik oldalára esik:

$$\mathcal{V} \equiv x \in \{-1, 1\}^V \subset \mathbb{R}^V.$$

Dualizálás Példa V: Maximális vágás (folytatás)

- Legyen $A = A_G$ a G szomszédsági mátrixa.

- Az $x^\mathsf{T} A x$ kvadratikus alakhoz minden $e = uv$ él $2x_u x_v$ hozzájárulást ad. Az $x_u x_v$ érték $+1$, ha az e él a vágás valamelyik partjára esik, és -1, ha az e él a vágás élhalmazához tartozik (keresztél).

- Könnyű kiszámolni, hogy

$$x^\mathsf{T} A x = 2\,|E(G)| - 4\,|E(\mathcal{V})|\,.$$

- Így az eredeti feladat egy formalizálása

Minimalizáljuk	$x^\mathsf{T} A x,$	$x \in \mathbb{R}^V$-t
Feltéve, hogy	$x_v^2 = 1,$	minden $v \in V$ esetén.

- Ez a feladat egy $\mathcal{NP}$-nehéz probléma formalizáltja. Ettől természetesen képezhetjük duálisát.

Dualizálás Példa V: Maximális vágás (folytatás)

- A duális feladat Lagrange-függvénye

$$\begin{aligned} L(\mu, x) &= x^T A x + \sum_{v \in V} \mu_v \left(x_v^2 - 1\right) \\ &= x^T A x + \sum_v \mu_v x_v^2 - \sum_v \mu_v \\ &= x^T \left(A + \text{diag } \mu\right) x - \underline{1}^T \mu, \end{aligned}$$

ahol egy $a \in \mathbb{R}^n$ vektor esetén $\text{diag }(a) = \begin{pmatrix} a_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & a_n \end{pmatrix}$

egy $n \times n$-es diagonális mátrix.

- Ebből a duális célfüggvény

$$\widetilde{c}(\mu) = -\underline{1}^T \mu + \inf_{x \in \mathbb{R}^n} x^T \left(A + \text{diag } \mu\right) x.$$

Dualizálás Példa V: Maximális vágás (folytatás)

- Az infimumot minden $\mathbb{R}^n$-beli vektorra kell meghatározni, mert minden ilyen x-re értelmezve van a kifejezés, nincs semmilyen megszorítás.
- Most már csak az a kérdés, hogy egy homogén kvadratikus függvénynek $\mathbb{R}^n$-ben mi a (feltétel nélküli) minimuma?
- Ehhez tegyünk egy kis kitérőt.

Jelölés

Legyen $M \in \mathcal{S}^n \subset \mathbb{R}^{n\times n}$ egy szimmetrikus mátrix.

Ha M pozitív szemidefinit, akkor azt írjuk, hogy

$$M \succeq 0, \text{ vagy } M \in \mathcal{S}^n_+.$$

Ha M pozitív definit, akkor azt írjuk, hogy

$$M \succ 0, \text{ vagy } M \in \mathcal{S}^n_{++}.$$

Dualizálás Példa V: Maximális vágás: Kitérő

• Mi az wx^2 valós függvény minimuma? A válasz általános iskolai tanulmányaink alapján egyszerű:

$$\inf_{x \in \mathbb{R}} wx^2 = \begin{cases} 0, & \text{ha } w \geq 0, \\ -\infty, & \text{ha } w < 0. \end{cases}$$

• Legyen $W \in \mathcal{S}^n \subset \mathbb{R}^{n \times n}$, azaz $n \times n$-es szimmetrikus mátrix. Ekkor

$$\inf_{x \in \mathbb{R}^n} x^T W x = \begin{cases} 0, & \text{ha } W \succeq 0, \\ -\infty, & \text{ha } W \not\succeq 0. \end{cases}$$

• A $W \succeq 0$ eset a pozitív szemidefinitség definíciója, illetve a $0^\mathsf{T} W 0 = 0$ miatt igaz.

• A második esetben mivel W nem pozitív szemidefinit, ezért alkalmas vektort írva x helyére írva negatív számot kapunk a minimalizálandó kifejezésben. Viszont így skálázással a kvadratikus forma tetszőlegesen kis értéket is felvehet.

Dualizálás Példa V: Maximális vágás (folytatás)

- A kitérő után már meg tudjuk határozni a duális célfüggvényt:

$$\widetilde{c}(\mu) = \begin{cases} -1^T\mu, & \text{ha } A + \text{diag } \mu \succeq 0, \\ -\infty, & \text{különben.} \end{cases}$$

- Így a duális feladat a következő:

Maximalizáljuk	$-1^T\mu$-t
Feltéve, hogy	$A + \text{diag } \mu \succeq 0.$

- A duális probléma egy szemidefinit programozási probléma, kezelhető. Így nem várható erős dualitás. Azonban minden duális lehetséges megoldás ad egy alsó becslést p^* értékére. Remélhetjük, hogy „ügyes” duális megoldás jó közelítést adhat p^*-ra.

Dualizálás Példa V: Maximális vágás (folytatás)

Következmény

Legyen G egy tetszőleges egyszerű gráf, λ_{min} pedig a G gráf (A szomszédsági mátrixának) legkisebb sajátértéke. Ekkor

$$\frac{1}{2}|E(G)| \stackrel{(1)}{\leq} \max_{\mathcal{V} \text{ vágás}} |E(\mathcal{V})| \stackrel{(2)}{\leq} \frac{1}{2}|E(G)| - \frac{\lambda_{min}}{4}|V(G)|.$$

Dualizálás Példa V: Maximális vágás (folytatás)

- Az (1) állítás következik abból, hogy

$$\max_{\mathcal{V} \text{ vágás}} |E(\mathcal{V})| \geq \mathbb{E}(|E(\underline{\mathcal{V}})|),$$

ahol $\underline{\mathcal{V}}$ egy véletlen vágás a G gráfban (egyenletes eloszlással választott $\{-1,1\}^n$-beli vektor). Meg kell nézni, hogy az egyes élek hányszor járulnak hozzá a várhatóértékhez. Jelölje ξ a következő valószínűségi változót:

$$\xi_e = \begin{cases} 1, & \text{ha } e \in E(\underline{\mathcal{V}}), \\ 0, & \text{ha } e \notin E(\underline{\mathcal{V}}), \end{cases}$$

amire könnyen kiszámolható, hogy $P(\xi_e = 1) = P(\xi_e = 0) = \frac{1}{2}$ minden e él esetén. Ekkor

$$\mathbb{E}(E(\underline{\mathcal{V}})) = \mathbb{E}\left(\sum_{e \in E(G)} \xi_e\right) = \sum_{e \in E(G)} \mathbb{E}(\xi_e) = \sum_{e \in E(G)} \frac{1}{2} = \frac{1}{2}\left|E(G)\right|.$$

Dualizálás Példa V: Maximális vágás (folytatás)

- A (2)-es egyenlőtlenség igazolásához jelöljük a duális feladat optimális megoldását d^*-gal, és legyen μ egy tetszőleges lehetséges duális megoldás. Ekkor nyilvánvaló, hogy $d^* \geq \widetilde{c}(\mu)$.
- Az $A + \text{diag}\ \mu \succeq 0$ feltétel ekvivalens azzal, hogy az $A + \text{diag}\ \mu$ mátrix minden sajátértéke nem-negatív.
- Most már csak választani kellene egy jó μ vektort. Legyen

$$\mu = -\lambda_{min} 1 = \begin{pmatrix} -\lambda_{min} \\ -\lambda_{min} \\ \vdots \\ -\lambda_{min} \end{pmatrix}.$$

Dualizálás Példa V: Maximális vágás (folytatás)

• Az első állítás az, hogy az így kapott μ lehetséges megoldás: Ez azt jelenti, hogy az $A + \mathrm{diag}\ \mu \succeq 0$ feltételnek teljesülnie kell. Ha $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \ldots \geq \lambda_n = \lambda_{min}$ az A mátrix sajátértékei, akkor az $A + \mathrm{diag}\ \mu$ mátrix sajátértékei $\lambda_1 - \lambda_{min} \geq \ldots \geq \lambda_n - \lambda_{min} \geq 0$. Ez könnyen igazolható végiggondolva, hogy A sajátvektorai az $A + \mathrm{diag}\ \mu$ mátrixnak is sajátvektorai. Azaz $A + \mathrm{diag}\ \mu$ minden sajátértéke nem negatív.

• Tehát az így megválasztott μ kielégíti a pozitív szemidefinitségi feltételt. Már láttuk, hogy a primál feladat optimális megoldása $p^* = 2\,|E(G)| - 4\max|E(\mathcal{V})|$. Ekkor

$$2\,|E(G)| - 4\max|E(\mathcal{V})| = p^* \geq d^* \geq c(\mu) = |V|\,\lambda_{min}.$$

Ezt rendezve kapjuk a (2) egyenlőséget.

Szünet

Dualizálás Példa VI: Norma minimalizálás lineáris feltételek mellett

Példa

Minimalizáljuk	$\|x\|$,	$x \in \mathbb{R}^n$,-t
Feltéve, hogy	$Ax = b$,	

ahol $\|.\| : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ egy tetszőleges norma.

- Az L_2 normára már láttuk, hogy könnyű a dualizálás.
- Tetszőleges norma esetén a Lagrange-függvény

$$L(\mu, x) = \|x\| + \mu^T(Ax - b) = \|x\| + \left(A^T\mu\right)^T x - b^T\mu.$$

- Most ennek keressük egy infimumát, és itt is szükségünk van egy kis kitérőre, mint az előző feladat esetében.

Kitérő

- A feladatunk gyakorlatilag egy $\|x\| + v^T x$ alakú kifejezés infimumának meghatározása.

Definíció

Legyen $\|.\|$ egy tetszőleges norma. A

$$\|v\|_* = \sup\left\{ v^T x : \ \|x\| = 1 \right\}$$

normát duális normának nevezzük.

- A duális norma definíciójából és a normaaxiómákból következik, hogy $|v^T x| \leq \|v\|_*$, ha $\|x\| = 1$. (Miért?)
- Skálázással kapjuk a következő Lemmát.

Kitérő (folytatás)

Lemma

$$\left|v^T x\right| \le \|v\|_* \|x\| .$$

- A duális norma segítségével már megadható a keresett infimum:

$$\inf_{x\in\mathbb{R}^n} \|x\| + v^T x = \begin{cases} 0, & \text{ha } \|v\|_* \le 1, \\ -\infty, & \text{ha } \|v\|_* > 1. \end{cases}$$

- Az első eset ekvivalens azzal, hogy $\|v\|_* \le 1$ esetén $\|x\| + v^T x \ge 0$ minden x vektorra. Ez könnyen kiolvasható a fenti megállapításból.

- Második esetben, ha elérünk egy negatív értéket, akkor egy skálázással tetszőlegesen nagy negatív értéket elérhetünk, és ebből következik a $-\infty$ infimum.

Dualizálás Példa VI: Norma minimalizálás lineáris feltételek mellett (folytatás)

A duális célfüggvény a következő:

$$\widetilde{c}(\mu) = \begin{cases} -b^T\mu, & \text{ha } \left\|A^T\mu\right\|_* \leq 1, \\ -\infty, & \text{ha } \left\|A^T\mu\right\|_* > 1. \end{cases}$$

Így a duális feladat a következő:

Maximalizáljuk	$-b^T\mu$-t
Feltéve, hogy	$\left\|A^T\mu\right\|_* \leq 1.$

Dualizálás Példa VII: Optimalizálás lineáris feltételekkel

Példa

A dualizálandó feladat a következő:

Minimalizáljuk	$c(x)$-t
Feltéve, hogy	$Ax \preceq b,$
	$Cx = d.$

- A probléma jóval általánosabb az LP-feladatnál, ahol szintén lineáris feltételekkel dolgozunk. Itt a célfüggvény tetszőleges függvény.
- A feladat Lagrange-függvénye

$$\begin{aligned} L(\lambda, \mu, x) &= c(x) + \lambda^T(Ax - b) + \mu^T(Cx - d) \\ &= c(x) + \left(A^T\lambda + C^\mathsf{T}\mu\right)^T x - (b^T\lambda + d^T\mu). \end{aligned}$$

Kitérő

- Most egy $f(x) + v^T x$ alakú kifejezés infimumát keressük a dom (f) értelmezési tartományon.

Definíció

Az f függvény konvex-, vagy más néven Fenschel-konjugáltja

$$f^*(u) = \sup_{x \in \mathrm{dom}\ (f)} u^T x - f(x).$$

- A minimalizálandó kifejezésben, a célfüggvényben u szerepét $-v$ fogja betölteni:

$$\inf_x f(x) + v^{\mathsf{T}} x = -\sup_x -f(x) - v^{\mathsf{T}} x = -\sup_x -v^{\mathsf{T}} x - f(x) = -f^*(-v).$$

Dualizálás Példa VII: Optimalizálás lineáris feltételekkel (folytatás)

- Ezek után a duális probléma

Maximalizáljuk	$-c^*(-A^\mathsf{T}\lambda - C^\mathsf{T}\mu) - (b^\mathsf{T}\lambda + d^\mathsf{T}\mu)$-t
Feltéve, hogy	$\lambda \succeq 0$.

Dualizálás Példa VIII: Entrópia maximalizálás

Példa

Minimalizáljuk	$\sum_{i=1}^{n} x_i log x_i$-t
Feltéve, hogy	$Ax \preceq b$,
	$1^{\mathsf{T}} x = 1$.

- A célfüggvény a negatív entrópia, ez oldja fel a látszólagos ellentmondást a maximális jelző és a minimalizálási optimalizációs feladat között.

- A logaritmus függvény megjelenése miatt a lehetséges megoldások komponensei pozitívok. $1^{\mathsf{T}} x = 1$ azt mondja, hogy x egy valószínűségi eloszlást kódol. Az $Ax \preceq b$ lineáris egyenlőtlenségek statisztikai tapasztalatok lehetnek az eloszláról. Például várható értéke, szórása, momentumai, becslés az eloszlás farkára stb.

Dualizálás Példa VIII: Entrópia maximalizálás (folytatás)

- Ez a példa az előző példa speciális esete. Írjuk fel a

$$c(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i \log x_i.$$

célfüggvény konjugáltját: Könnyen kiszámolható, hogy

$$(x \log x)^* = e^{y-1}.$$

- Könnyen belátható, hogy ebből következik, hogy

$$c^*(x) = \sum_{i=1}^{n} e^{y_i - 1}.$$

- Felírjuk most $\widetilde{c}\,(\lambda, \mu)$ függvényt:

$$\widetilde{c}\,(\lambda, \mu) = -b^T\lambda - \mu - \sum_{i=1}^{n} e^{-a_i^T\lambda - \mu - 1} = -b^T\lambda - \mu - e^{-\mu-1} \sum_{i=1}^{n} e^{-a_i^T\lambda},$$

ahol a_i^{T} az A^{T} mátrix i-edik sora, azaz A i-edik oszlopa.

Dualizálás Példa VIII: Entrópia maximalizálás (folytatás)

- A duális probléma:

Maximalizáljuk	$\widetilde{c}\,(\lambda, \mu)$-t
Feltéve, hogy	$\lambda \succcurlyeq 0.$

- Ez könnyen egyszerűsíthető: Ha λ fix, akkor $\widetilde{c}$ egy változós valós függvény, és így λ-hoz meghatározható a jó μ érték:

$$\mu = \log \sum_{i=1}^{n} e^{-a_i^{\mathsf{T}}\lambda} - 1.$$

- Helyettesítve a duális ekvivalens a következővel:

Maximalizáljuk	$-b^{\mathsf{T}}\lambda - \log\left(\sum_{i=1}^{n} e^{-a_i^{\mathsf{T}}\lambda}\right)$-t
Feltéve, hogy	$\lambda \succcurlyeq 0.$

Szünet

Dualizálás Példa IX

Példa

Minimalizáljuk	$x_1 x_2$-t
Feltéve, hogy	$x_1 \geq 0$
	$x_2 \geq 0$
	$x_1^2 + x_2^2 \leq 1$

- Az optimalizálási feladat triviális: Nem-negatív számok szorzata nem-negatív, esetünkben $(0, 0)$ lehetséges megoldás.
- Így $p^* = 0$.
- Mégis gyakoroljuk a megtanult dualizálási formalizmust.

Dualizálás Példa IX (folytatás)

- A duális változók λ_1, λ_2 és λ_3.
- A Lagrange-függvény:

$$x_1x_2 - \lambda_1 x_1 - \lambda_2 x_2 + \lambda_3(x_1^2 + x_2^2 - 1).$$

- A duális célfüggvény:

$$\begin{aligned}\widetilde{c}(\lambda) &= \inf_{x\in\mathbb{R}^2}\left(x_1x_2 - \lambda_1 x_1 - \lambda_2 x_2 + \lambda_3(x_1^2 + x_2^2 - 1)\right) = \\ &= \inf_{x\in\mathbb{R}^2}\left((x_1, x_2)\begin{pmatrix}\lambda_3 & 1/2\\ 1/2 & \lambda_3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix} - (\lambda_1, \lambda_2)\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix} - \lambda_3\right).\end{aligned}$$

Dualizálás Példa IX (folytatás)

- A kvadratikus rész mátrixa pozitív definit, ha $\lambda_3 > 1/2$, pozitív szemidefinit, ha $\lambda_3 = 1/2$, és indefinit, ha $\lambda_3 < 1/2$.
- Könnyen látható, hogy az indefinit (van pozitív és negatív sajátérték is) esetben $\widetilde{c}$ tetszőlegesen kicsi (tetszőleges nagy abszolút értékű negatív) értéket is felvehet.
- Könnyen látható, hogy a pozitív szemidefinit ($\lambda_3 = 1/2$) esetben amennyiben $\lambda_1 - \lambda_2 \neq 0$ a $\widetilde{c}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ célfüggvény tetszőlegesen kicsi lehet.
- A pozitív szemidefinit mátrix és $\lambda_1 = \lambda_2$ esetben a $\widetilde{c}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ értéke $-\lambda_3$.
- A pozitív definit mátrix esetén könnyen látható, hogy véges minimum létezik. Analízisbeli tudásunkkal a minimum érték könnyen meghatározható:

$$-\frac{1}{4}(\lambda_1, \lambda_2)\begin{pmatrix}\lambda_3 & 1/2 \\ 1/2 & \lambda_3\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}\lambda_1 \\ \lambda_2\end{pmatrix} - \lambda_3.$$

Dualizálás Példa IX (folytatás)

- A duális feladat:

Maximalizáljuk	$\widetilde{c}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$-t
Feltéve, hogy	$\lambda_1 \geq 0$
	$\lambda_2 \geq 0$
	$\lambda_3 \geq \frac{1}{2}$

- Elemi meggondolással adódik, hogy az optimális helyek: $(\lambda, \lambda, 1/2)$ és $d^* = -1/2$.

- A gyenge dualitás egyenlőtlensége természetesen teljesül, de szigorú egyenlőtlenségként.

Dualizálás Példa $\widetilde{\text{IX}}$

Példa

Minimalizáljuk	x_1x_2-t
Feltéve, hogy	$x_1 \geq 0$
	$x_2 \geq 0$
	$x_1^2 + x_2^2 \leq 1$
	$x_1x_2 \geq 0$

- Az előző példát ismételtük meg egy plusz, nyilvánvalóan (matematikailag) felesleges feltétellel.
- Természetesen $p^* = 0$ marad.

Dualizálás Példa $\widetilde{\text{IX}}$ (folytatás)

- A dualizálás azonban változni fog.
- Megjelenik egy λ_4 duális változó.
- A Lagrange-függvény

$$x_1x_2 - \lambda_1 x_1 - \lambda_2 x_2 + \lambda_3(x_1^2 + x_2^2 - 1) - \lambda_4 x_1 x_2.$$

- A duális cél függvény:

$$\widetilde{c}(\lambda) = \inf_{x\in\mathbb{R}^2} \left(x_1x_2 - \lambda_1 x_1 - \lambda_2 x_2 + \lambda_3(x_1^2 + x_2^2 - 1) - \lambda_4 x_1 x_2\right) =$$

$$= \inf_{x\in\mathbb{R}^2} \left((x_1, x_2) \begin{pmatrix} \lambda_3 & \frac{1-\lambda_4}{2} \\ \frac{1-\lambda_4}{2} & \lambda_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} - (\lambda_1, \lambda_2) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} - \lambda_3 \right).$$

Dualizálás Példa $\widetilde{IX}$ (folytatás)

• A duális feladat elemzése/megoldása a korábbi gondolatmenetet követve könnyen elvégezhető.

• A számolás végeredménye: az optimális hely $(0, 0, 0, 1)$ és $d^* = 0$, erős dualitás van.

• Az optimális helyet és a duális optimális értéket a negyedik (a felesleges feltételnek megfelelő) duális vátozó kontrolálta. A feleslegesnek tűnő feltétel hozzáadása utólag jogosnak mondható.

Dualizálás Példa X

Példa

Minimalizáljuk	$c(u)$-t
Feltéve, hogy	$u \leq 0$

ahol $c(u) = -\left(\frac{u+1}{2}\right)^2$, $dom\,(c) = [-1, 1]$, azaz c grafikonja egy parabolaív.

• A célfüggvény értelmezési tartománya természetellenes. Ezzel a furcsa, természetellenes értelmezési tartománnyal a célfüggvénybe feltételeket építettünk be. Ez nem fair. Ez csalás.

• Célunk nem egy alkalmazás bemutatása, hanem a dualitási hézag geometriai láttatása.

Dualizálás Példa X (folytatás)

- Először dualizáljuk az eredeti problémát. A $v = c(u)$ jelölést használjuk.
- A Lagrange-függvény:

$$L(u, \lambda) = -\left(\frac{u+1}{2}\right)^2 + \lambda u = \lambda u + v.$$

- A duális célfüggvény:

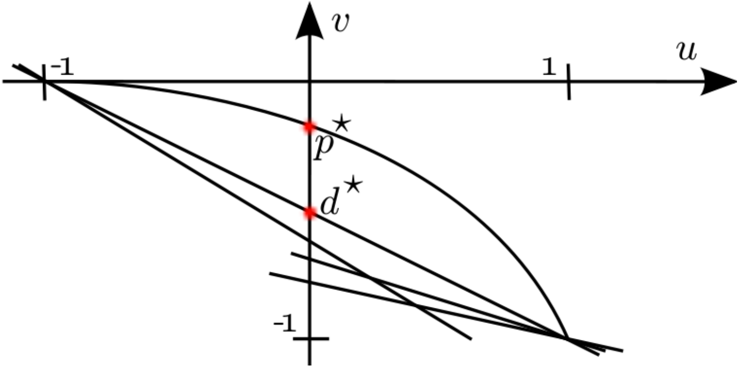
$$\widetilde{c}(\lambda) = \inf_{u \in [-1,1], v = \frac{1}{4}(u+1)^2} \lambda u + v.$$

- A duális:

Maximalizáljuk	$\widetilde{c}(\lambda) = \inf_{u \in [-1,1], v = \frac{1}{4}(u+1)^2} \lambda u + v$-t
Feltéve, hogy	$\lambda \geq 0$

Dualizálás Példa X: Az ábra

• Az alábbi ábra segítségével a primál és duál feladat megoldását is szemléltetni tudjuk:



A $v = -\frac{1}{4}(u+1)^2$ függvényt ábrázoltuk az u-v koordináta síkon. Továbbá $v + \lambda u = \alpha$-típusú függvények is láthatók, amelyek a célfüggvényt alúlról becslik.

Dualizálás Példa X: Az ábra (folytatás)

- A primál megoldás látványos: A lehetséges értékeken ($[-1,0]$) a függvény monoton csökkenő, így minimimát 0-ban veszi fel. Azaz $x^* = 0$ és $p^* = -1/4$.

- A Lagrange-függvény $v + \lambda u$ alakú. Ha egy λ_0 paraméternél α_0 értéket vesz fel, akkor $u \in [-1,1]$-n alúlról becsli a $v = \frac{1}{4}(u+1)^2$ célfüggvényt. $v + \lambda_0 u \geq \alpha$ féltérbe esik a parabola ívünk.

- Azaz a szóbajövő $\lambda u + v = \alpha$ egyenesek a grafikon „alatt" menő egyenesek. Egy konkrét egyeneshez (λ_0-hoz) tartozó α a v-tengellyel való tengelymetszet.

- A duális optimum a legmagasabb v-tengellyel való tengelymetszet.

- Az ábrán jól látható az optimális érték, d^*, továbbá a $d^* < p^*$ szigorú egyenlőtlenség. Nincs erős dualitás.

Dualizálás Példa XI

Példa

Legyen $n = 2$, $c(x, y) : \mathbb{R} \times \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto e^{-x}$.
Optimalizálási feladatunk legyen a következő:

Minimalizáljuk	$c(x, y)$-t
Feltéve, hogy	$\frac{x^2}{y} \leq 0$

• Ekkor az optimalizációs feladat értelmezésitartománya a következő: $\mathcal{D} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}_{>0}$.

• A feltétel teljesüléséhez az x^2 függvény nem-negativitása miatt, és mert $y > 0$, x szükségszerűen 0 lesz.

• A feladat lehetséges megoldásának halmaza

$$\{(x, y) : x = 0, y > 0\}.$$

Dualizálás Példa XI (folytatás)

- Ha a célfüggvényt megszorítjuk $\mathcal{L}$-re, akkor $c|_{\mathcal{L}} = e^{-0} = 1$ konstansfüggvényt kapjuk.
- Ebből következik, hogy a primál feladat optimális értéke 1, tehát $p^* = 1$.
- Írjuk fel a feladatra vonatkozó Lagrange-függvényt:

$$L(x, y; \lambda) = c(x, y) + \lambda \frac{x^2}{y} = e^{-x} + \lambda \frac{x^2}{y}.$$

- Ekkor a duális célfüggvény a következő lesz:

$$\widetilde{c}(\lambda) = \inf_{(x,y)\in\mathcal{D}} L(x, y; \lambda) = \inf_{(x,y)\in\mathcal{D}} \left(e^{-x} + \lambda \frac{x^2}{y} \right) = \begin{cases} 0 & \text{ha } \lambda \geq 0 \\ -\infty & \text{különben} \end{cases}$$

Dualizálás Példa XI (folytatás)

- Így felírhatjuk a duális optimalizálási problémát:

Maximalizáljuk	$\widetilde{c}(\lambda)$-t
Feltéve, hogy	$\lambda \geq 0$.

- Ennek optimális értéke $d^* = 0$.

- Vegyük észre, hogy akkor teljesül a gyenge dualitás tétel, hiszen $p^* \geq d^*$.

- Esetünkben az egyenlőtlenség valódi, egy úgynevezett „dualitási hézag” is keletkezett, mert $p^* - d^* = 1 > 0$.

Köszönöm a figyelmet!