Független ponthalmazok, perfekt gráfok

Hajnal Péter

2021. tavasz

Független ponthalmazok

Független ponthalmazok

Emlékeztető

Egy $F \subseteq V(G)$ halmazt független ponthalmaznak nevezünk, ha G minden élének legfeljebb egyik végpontja F-beli, azaz ha F csúcsait nem köti össze él.

Független ponthalmazok

Emlékeztető

Egy $F \subseteq V(G)$ halmazt független ponthalmaznak nevezünk, ha G minden élének legfeljebb egyik végpontja F-beli, azaz ha F csúcsait nem köti össze él.

Ez a fogalom már jól ismert a korábbi tanulmányainkból.

Független ponthalmazok

Emlékeztető

Egy $F \subseteq V(G)$ halmazt független ponthalmaznak nevezünk, ha G minden élének legfeljebb egyik végpontja F-beli, azaz ha F csúcsait nem köti össze él.

Ez a fogalom már jól ismert a korábbi tanulmányainkból.

Segítségével definiáljuk a következő politópot.

Független ponthalmazok

Emlékeztető

Egy $F \subseteq V(G)$ halmazt független ponthalmaznak nevezünk, ha G minden élének legfeljebb egyik végpontja F-beli, azaz ha F csúcsait nem köti össze él.

Ez a fogalom már jól ismert a korábbi tanulmányainkból.

Segítségével definiáljuk a következő politópot.

Definíció, pont pakolási politóp

$$\mathcal{PP}(G) := \text{conv}\,\{\chi_F : F \subseteq V(G) \text{ független ponthalmaz}\} \subseteq \mathbb{R}^V,$$

ahol $\chi_F \in \{0,1\}^V$ az F ponthalmaz karakterisztikus vektora.

Egyszerű egyenlőtlenségek

Egyszerű egyenlőtlenségek

Észrevétel

Felírhatunk egy egyszerű tartalmazást erre a halmazra:

$$\mathcal{PP}(G) \subseteq \{x \in \mathbb{R}^V : x \succeq 0, \text{ továbbá minden } e = uv \text{ él esetén } x_u + x_v \leq 1\} =: \mathcal{PP}_0(G).$$

Egyszerű egyenlőtlenségek

Észrevétel

Felírhatunk egy egyszerű tartalmazást erre a halmazra:

$$\mathcal{PP}(G) \subseteq \{x \in \mathbb{R}^V : x \succeq 0, \text{ továbbá minden } e = uv \text{ él esetén } x_u + x_v \leq 1\} =: \mathcal{PP}_0(G).$$

A jobb oldalon szereplő halmaz tehát olyan nemnegatív vektorokból áll, melyekre teljesül, hogy két komponensének az összege 1-nél kisebb, amennyiben a komponenseknek megfelelő csúcsok között él húzódik G-ben.

Egyszerű egyenlőtlenségek

Észrevétel

Felírhatunk egy egyszerű tartalmazást erre a halmazra:

$$\mathcal{PP}(G) \subseteq \{x \in \mathbb{R}^V : x \succeq 0, \text{ továbbá minden } e = uv \text{ él esetén } x_u + x_v \leq 1\} =: \mathcal{PP}_0(G).$$

A jobb oldalon szereplő halmaz tehát olyan nemnegatív vektorokból áll, melyekre teljesül, hogy két komponensének az összege 1-nél kisebb, amennyiben a komponenseknek megfelelő csúcsok között él húzódik G-ben.

A tartalmazáshoz csak azt kell ellenőrizni, hogy hogy a független ponthalmazok karakterisztikus vektorai benne vannak a jobb oldalon leírt félterek metszetében (ami nyilván egy konvex ponthalmazt ír le).

Páros gráfok esete

Páros gráfok esete

A következő tétel az totálisan unimoduláris mátrixokról tanultak alapján egyszerűen belátható (a formális bizonyítást nem végezzük el).

Páros gráfok esete

A következő tétel az totálisan unimoduláris mátrixokról tanultak alapján egyszerűen belátható (a formális bizonyítást nem végezzük el).

Tétel

Legyen G páros, izolált pont nélküli gráf. Ekkor

$$\mathcal{PP}(G) = \mathcal{PP}_0(G).$$

Páros gráfok esete

A következő tétel az totálisan unimoduláris mátrixokról tanultak alapján egyszerűen belátható (a formális bizonyítást nem végezzük el).

Tétel

Legyen G páros, izolált pont nélküli gráf. Ekkor

$$\mathcal{PP}(G) = \mathcal{PP}_0(G).$$

Tehát a párosság elegendő ahhoz, hogy a nyilvánvaló egyenlőtlenségekkel leírt felső becslésünk egybe essen a kombinatorikusan definiált ponthalmazunkkal.

Páros gráfok esete

A következő tétel az totálisan unimoduláris mátrixokról tanultak alapján egyszerűen belátható (a formális bizonyítást nem végezzük el).

Tétel

Legyen G páros, izolált pont nélküli gráf. Ekkor

$$\mathcal{PP}(G) = \mathcal{PP}_0(G).$$

Tehát a párosság elegendő ahhoz, hogy a nyilvánvaló egyenlőtlenségekkel leírt felső becslésünk egybe essen a kombinatorikusan definiált ponthalmazunkkal.

$\mathcal{PP}_0(G)$ leírásában az előjel feltételeken túli egyenlőtlenségeket élfeltételeknek nevezzük.

Páros gráfok esete

A következő tétel az totálisan unimoduláris mátrixokról tanultak alapján egyszerűen belátható (a formális bizonyítást nem végezzük el).

Tétel

Legyen G páros, izolált pont nélküli gráf. Ekkor

$$\mathcal{PP}(G) = \mathcal{PP}_0(G).$$

Tehát a párosság elegendő ahhoz, hogy a nyilvánvaló egyenlőtlenségekkel leírt felső becslésünk egybe essen a kombinatorikusan definiált ponthalmazunkkal.

$\mathcal{PP}_0(G)$ leírásában az előjel feltételeken túli egyenlőtlenségeket élfeltételeknek nevezzük.

Az általános esetben további feltételek szükségesek.

Klikk feltételek

Klikk feltételek

A hiányzó feltételek közül talán a legegyszerűbbeket adjuk meg a következőkben.

Klikk feltételek

A hiányzó feltételek közül talán a legegyszerűbbeket adjuk meg a következőkben.

Definíció, klikk feltételek

$$\widehat{\mathcal{PP}}(G) := \{x \in \mathbb{R}^V : x \succeq 0, \text{ továbbá minden } K \text{ klikk esetén } \sum_{u \in K} x_u \leq 1\}.$$

Egyszerű tartalmazások

Egyszerű tartalmazások

- Egy éllel összekötött pontpár valójában egy kettő elemszámú klikk. Azaz az élfeltételek speciális klikkfeltételek.

Egyszerű tartalmazások

- Egy éllel összekötött pontpár valójában egy kettő elemszámú klikk. Azaz az élfeltételek speciális klikkfeltételek. Így

$$\widehat{\mathcal{P}\mathcal{P}}(G) \subset \mathcal{P}\mathcal{P}_0(G).$$

Egyszerű tartalmazások

• Egy éllel összekötött pontpár valójában egy kettő elemszámú klikk. Azaz az élfeltételek speciális klikkfeltételek. Így

$$\widehat{\mathcal{PP}}(G) \subset \mathcal{PP}_0(G).$$

• Egy klikknek és egy független ponthalmaznak legfeljebb egy közös pontja lehet (mivel, ha már kettő lenne, akkor azoknak, a két definíció alapján, egyszerre össze is kellene, hogy legyenek kötve, meg nem is).

Egyszerű tartalmazások

- Egy éllel összekötött pontpár valójában egy kettő elemszámú klikk. Azaz az élfeltételek speciális klikkfeltételek. Így

$$\widehat{\mathcal{PP}}(G) \subset \mathcal{PP}_0(G).$$

- Egy klikknek és egy független ponthalmaznak legfeljebb egy közös pontja lehet (mivel, ha már kettő lenne, akkor azoknak, a két definíció alapján, egyszerre össze is kellene, hogy legyenek kötve, meg nem is).

- A független ponthalmazok karakterisztikus vektoraira egy klikk elemeinek megfelelő komponenseket nézzük, akkor egy darab 1-es lehet.

Egyszerű tartalmazások

• Egy éllel összekötött pontpár valójában egy kettő elemszámú klikk. Azaz az élfeltételek speciális klikkfeltételek. Így

$$\widehat{\mathcal{PP}}(G) \subset \mathcal{PP}_0(G).$$

• Egy klikknek és egy független ponthalmaznak legfeljebb egy közös pontja lehet (mivel, ha már kettő lenne, akkor azoknak, a két definíció alapján, egyszerre össze is kellene, hogy legyenek kötve, meg nem is).

• A független ponthalmazok karakterisztikus vektoraira egy klikk elemeinek megfelelő komponenseket nézzük, akkor egy darab 1-es lehet.

• Így

$$\mathcal{PP}(G) \subseteq \widehat{\mathcal{PP}}(G).$$

Egyszerű tartalmazások

• Egy éllel összekötött pontpár valójában egy kettő elemszámú klikk. Azaz az élfeltételek speciális klikkfeltételek. Így

$$\widehat{\mathcal{PP}}(G) \subset \mathcal{PP}_0(G).$$

• Egy klikknek és egy független ponthalmaznak legfeljebb egy közös pontja lehet (mivel, ha már kettő lenne, akkor azoknak, a két definíció alapján, egyszerre össze is kellene, hogy legyenek kötve, meg nem is).

• A független ponthalmazok karakterisztikus vektoraira egy klikk elemeinek megfelelő komponenseket nézzük, akkor egy darab 1-es lehet.

• Így

$$\mathcal{PP}(G) \subseteq \widehat{\mathcal{PP}}(G).$$

• Összefoglalva

$$\mathcal{PP}(G) \subseteq \widehat{\mathcal{PP}}(G) \subseteq \mathcal{PP}_0(G)$$

Példa

Példa

Példa

Most megmutatjuk, hogy például az öt hosszú kör esetében $\widehat{\mathcal{PP}}$ szigorúan bővebb mint $\mathcal{PP}$.

Példa

Példa

Most megmutatjuk, hogy például az öt hosszú kör esetében $\widehat{\mathcal{PP}}$ szigorúan bővebb mint $\mathcal{PP}$.

Mivel C_5-nek csak egy- és két elemű klikkjei vannak, ezért $\widehat{\mathcal{PP}}(C_5)$ elemeinek elég az élfeltételeket teljesíteni (éllel összekötött csúcsoknál az összeg egynél kisebb legyen).

Példa

Példa

Most megmutatjuk, hogy például az öt hosszú kör esetében $\widehat{\mathcal{PP}}$ szigorúan bővebb mint $\mathcal{PP}$.

Mivel C_5-nek csak egy- és két elemű klikkjei vannak, ezért $\widehat{\mathcal{PP}}(C_5)$ elemeinek elég az élfeltételeket teljesíteni (éllel összekötött csúcsoknál az összeg egynél kisebb legyen).

Így például $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}) \in \widehat{\mathcal{PP}}(C_5)$.

Példa

Példa

Most megmutatjuk, hogy például az öt hosszú kör esetében $\widehat{\mathcal{PP}}$ szigorúan bővebb mint $\mathcal{PP}$.

Mivel C_5-nek csak egy- és két elemű klikkjei vannak, ezért $\widehat{\mathcal{PP}}(C_5)$ elemeinek elég az élfeltételeket teljesíteni (éllel összekötött csúcsoknál az összeg egynél kisebb legyen).

Így például $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}) \in \widehat{\mathcal{PP}}(C_5)$.

Vegyük észre, hogy $\alpha(C_5) = 2$, tehát független ponthalmazai legfeljebb kételeműek.

Példa

Példa

Most megmutatjuk, hogy például az öt hosszú kör esetében $\widehat{\mathcal{PP}}$ szigorúan bővebb mint $\mathcal{PP}$.

Mivel C_5-nek csak egy- és két elemű klikkjei vannak, ezért $\widehat{\mathcal{PP}}(C_5)$ elemeinek elég az élfeltételeket teljesíteni (éllel összekötött csúcsoknál az összeg egynél kisebb legyen).

Így például $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}) \in \widehat{\mathcal{PP}}(C_5)$.

Vegyük észre, hogy $\alpha(C_5) = 2$, tehát független ponthalmazai legfeljebb kételeműek.

Ezért a karakterisztikus vektoraikban a komponensek összege sem haladja meg a 2-t. Ugyanez érvényes marad ezek konvex burkának bármely elemére is.

Példa

Példa

Most megmutatjuk, hogy például az öt hosszú kör esetében $\widehat{\mathcal{PP}}$ szigorúan bővebb mint $\mathcal{PP}$.

Mivel C_5-nek csak egy- és két elemű klikkjei vannak, ezért $\widehat{\mathcal{PP}}(C_5)$ elemeinek elég az élfeltételeket teljesíteni (éllel összekötött csúcsoknál az összeg egynél kisebb legyen).

Így például $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}) \in \widehat{\mathcal{PP}}(C_5)$.

Vegyük észre, hogy $\alpha(C_5) = 2$, tehát független ponthalmazai legfeljebb kételeműek.

Ezért a karakterisztikus vektoraikban a komponensek összege sem haladja meg a 2-t. Ugyanez érvényes marad ezek konvex burkának bármely elemére is.

Ebből viszont kilóg a $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ vektor.

További példa

További példa

Példa

További példa

Példa

C_3 esetében már nem csak az élfeltételek jelennek meg, hanem az $x_1 + x_2 + x_3 \leq 1$ egyenlőtlenség is.

További példa

Példa

C_3 esetében már nem csak az élfeltételek jelennek meg, hanem az $x_1 + x_2 + x_3 \leq 1$ egyenlőtlenség is.

- Könnyű ellenőrizni, hogy

$$\{x \in \mathbb{R}^3 : x \succeq 0, x_1 + x_2 + x_3 \leq 1\} = \mathrm{conv}(0, e_1, e_2, e_3),$$

ahol e_i-k az standard bázis, azaz egy elemű élhalmazok (amik K_3-ban pontosan a nemüres párosítások) karakterisztikus vektorai.

További példa

Példa

C_3 esetében már nem csak az élfeltételek jelennek meg, hanem az $x_1 + x_2 + x_3 \leq 1$ egyenlőtlenség is.

- Könnyű ellenőrizni, hogy

$$\{x \in \mathbb{R}^3 : x \succeq 0, x_1 + x_2 + x_3 \leq 1\} = \mathrm{conv}(0, e_1, e_2, e_3),$$

ahol e_i-k az standard bázis, azaz egy elemű élhalmazok (amik K_3-ban pontosan a nemüres párosítások) karakterisztikus vektorai.

- $\mathcal{PP}(C_3) = \widehat{\mathcal{PP}}(C_3)$ teljesüljön.

További példa

Példa

C_3 esetében már nem csak az élfeltételek jelennek meg, hanem az $x_1 + x_2 + x_3 \leq 1$ egyenlőtlenség is.

- Könnyű ellenőrizni, hogy

$$\{x \in \mathbb{R}^3 : x \succeq 0, x_1 + x_2 + x_3 \leq 1\} = \mathrm{conv}(0, e_1, e_2, e_3),$$

ahol e_i-k az standard bázis, azaz egy elemű élhalmazok (amik K_3-ban pontosan a nemüres párosítások) karakterisztikus vektorai.

- $\mathcal{PP}(C_3) = \widehat{\mathcal{PP}}(C_3)$ teljesüljön.
- Pontosan úgy, ahogy előbb

$$\widehat{\mathcal{PP}}(C_3) \subsetneq \mathcal{PP}_0(C_3) \ni (1/2, 1/2, 1/2)$$

További példa

Példa

C_3 esetében már nem csak az élfeltételek jelennek meg, hanem az $x_1 + x_2 + x_3 \leq 1$ egyenlőtlenség is.

- Könnyű ellenőrizni, hogy

$$\{x \in \mathbb{R}^3 : x \succeq 0, x_1 + x_2 + x_3 \leq 1\} = \mathrm{conv}(0, e_1, e_2, e_3),$$

ahol e_i-k az standard bázis, azaz egy elemű élhalmazok (amik K_3-ban pontosan a nemüres párosítások) karakterisztikus vektorai.

- $\mathcal{PP}(C_3) = \widehat{\mathcal{PP}}(C_3)$ teljesüljön.
- Pontosan úgy, ahogy előbb

$$\widehat{\mathcal{PP}}(C_3) \subsetneq \mathcal{PP}_0(C_3) \ni (1/2, 1/2, 1/2)$$

- Milyen G esetén lesz $\mathcal{PP}(G) = \widehat{\mathcal{PP}}(G)$? A továbbiakban ezt a kérdést járjuk körül, ám ehhez egy kis gráfelméleti kitérő kell.

Szünet

Színezések, klikkek

Színezések, klikkek

Emlékeztető

Legyen c egy jó színezése, K pedig egy klikkje G-nek. Tudjuk, hogy egy klikket csak úgy tudunk kiszínezni, hogy minden csúcsát különbözőre festjük, ezért c színigénye (az általa felhasznált színek száma) legalább $|K|$. A $\chi(G)$ gráfparamétert úgy kapjuk, hogy a minimális színigényű színezést, az $\omega(G)$ paremétert pedig úgy, hogy a maximális klikket választjuk. Viszont az egyenlőtlenség ezen optimumok között is teljesül, tehát $\chi(G) \geq \omega(G)$.

Színezések, klikkek

Emlékeztető

Legyen c egy jó színezése, K pedig egy klikkje G-nek. Tudjuk, hogy egy klikket csak úgy tudunk kiszínezni, hogy minden csúcsát különbözőre festjük, ezért c színigénye (az általa felhasznált színek száma) legalább $|K|$. A $\chi(G)$ gráfparamétert úgy kapjuk, hogy a minimális színigényű színezést, az $\omega(G)$ paremétert pedig úgy, hogy a maximális klikket választjuk. Viszont az egyenlőtlenség ezen optimumok között is teljesül, tehát $\chi(G) \geq \omega(G)$.

Definíció

G gráf szép, ha $\chi(G) = \omega(G)$.

A főszereplő

A főszereplő

Definíció

G gráf perfekt, ha minden R feszített részgráfja szép.

A főszereplő

Definíció

G gráf perfekt, ha minden R feszített részgráfja szép.

Általában csak a főbb állításoknál említjük meg a bizonyító személyek nevét, viszont néhány esetben a fontos definíciók kitalálóiról is érdemes említést tenni. A perfekt gráfokat először Claude Berge francia matematikus definiálta 1962-ben.

Példák I.

Példa

Az n pontú teljes gráf, K_n és az n pontú üres gráf, $\overline{K_n} = E_n$ is perfekt.

Példák I.

Példa

Az n pontú teljes gráf, K_n és az n pontú üres gráf, $\overline{K_n} = E_n$ is perfekt.

Példák I.

Példa

Az n pontú teljes gráf, K_n és az n pontú üres gráf, $\overline{K_n} = E_n$ is perfekt.

- A teljes gárfokban $\chi(K_n) = \omega(K_n) = n$.

Példák I.

Példa

Az n pontú teljes gráf, K_n és az n pontú üres gráf, $\overline{K_n} = E_n$ is perfekt.

- A teljes gárfokban $\chi(K_n) = \omega(K_n) = n$.
- Az üres gráfokban pedig $\chi(E_n) = \omega(E_n) = 1$ teljesül minden n-re.

Példák I.

Példa

Az n pontú teljes gráf, K_n és az n pontú üres gráf, $\overline{K_n} = E_n$ is perfekt.

- A teljes gárfokban $\chi(K_n) = \omega(K_n) = n$.
- Az üres gráfokban pedig $\chi(E_n) = \omega(E_n) = 1$ teljesül minden n-re.
- Ez még csak a szépségre példa.

Példák I.

Példa

Az n pontú teljes gráf, K_n és az n pontú üres gráf, $\overline{K_n} = E_n$ is perfekt.

- A teljes gárfokban $\chi(K_n) = \omega(K_n) = n$.
- Az üres gráfokban pedig $\chi(E_n) = \omega(E_n) = 1$ teljesül minden n-re.
- Ez még csak a szépségre példa.
- De azt is vegyük észre, hogy teljes gráfok és üres gráfok bármely feszített részgráfja rendre teljes, illetve üres marad.

Példák I.

Példa

Az n pontú teljes gráf, K_n és az n pontú üres gráf, $\overline{K_n} = E_n$ is perfekt.

- A teljes gárfokban $\chi(K_n) = \omega(K_n) = n$.
- Az üres gráfokban pedig $\chi(E_n) = \omega(E_n) = 1$ teljesül minden n-re.
- Ez még csak a szépségre példa.
- De azt is vegyük észre, hogy teljes gráfok és üres gráfok bármely feszített részgráfja rendre teljes, illetve üres marad.
- Ezzel pedig beláttuk, hogy mindkettő perfekt.

Példák II.

Példa

Ha G páros, akkor perfekt is. Itt is egy egész osztályt hozunk fel példának. Ismert számunkra, hogy páros gráfok tetszőleges részgráfja is páros, ezért a perfektséghez elég csak a páros gráfok szépségét belátni. Tegyük fel, hogy G-nek van éle. Ekkor legkevesebb két színnel színezhető ki és a legnagyobb pontú klikkjei az élek, azaz $\chi(G) = \omega(G) = 2$.

Példa

Ha G páros, akkor $\overline{G}$ perfekt.
Páros gráfok komplementerében az alsó és felső ponthalmazok egy-egy klikket alkotnak, a többi él pedig ezek között fut. Ennek a perfektsége nem triviális, ekvivalens a Kőnig-tétellel. Ennek igazolását az érdeklődő hallgatóra hagyjuk.

Példák III.

Példák III.

Példa

Vegyünk egy tetszőleges $(P, <)$ részbenrendezett halmazt. A részbenrendezés azt jelenti, hogy $<$ rendezési reláció, viszont nem követeljük meg, hogy P bármely két eleme összehasonlítható legyen.

Példák III.

Példa

Vegyünk egy tetszőleges $(P, <)$ részbenrendezett halmazt. A részbenrendezés azt jelenti, hogy $<$ rendezési reláció, viszont nem követeljük meg, hogy P bármely két eleme összehasonlítható legyen.
Ebből a halmazból tudunk egy gráfot definiálni olyan módon, hogy vesszük a P csúcshalmazt és csak akkor kötünk össze két pontot, ha azok mint részbenrendezett halmaz elemei összehasonlíthatók. Ezt nevezzük $(P, <)$ összehasonlíthatósági gráfjának.

Példák III.

Példa

Vegyünk egy tetszőleges $(P, <)$ részbenrendezett halmazt. A részbenrendezés azt jelenti, hogy $<$ rendezési reláció, viszont nem követeljük meg, hogy P bármely két eleme összehasonlítható legyen.
Ebből a halmazból tudunk egy gráfot definiálni olyan módon, hogy vesszük a P csúcshalmazt és csak akkor kötünk össze két pontot, ha azok mint részbenrendezett halmaz elemei összehasonlíthatók.
Ezt nevezzük $(P, <)$ összehasonlíthatósági gráfjának.
Analóg módon definiálható a nem összehasonlíthatósági gráf is, és észrevehetjük, hogy e kettő fogalmat gráfelméletileg a komplementálás kapcsolja össze.

Példák III.

Példa

Vegyünk egy tetszőleges $(P,<)$ részbenrendezett halmazt. A részbenrendezés azt jelenti, hogy $<$ rendezési reláció, viszont nem követeljük meg, hogy P bármely két eleme összehasonlítható legyen.
Ebből a halmazból tudunk egy gráfot definiálni olyan módon, hogy vesszük a P csúcshalmazt és csak akkor kötünk össze két pontot, ha azok mint részbenrendezett halmaz elemei összehasonlíthatók. Ezt nevezzük $(P,<)$ összehasonlíthatósági gráfjának.
Analóg módon definiálható a nem összehasonlíthatósági gráf is, és észrevehetjük, hogy e kettő fogalmat gráfelméletileg a komplementálás kapcsolja össze.
Annak bizonyítását, hogy mindkettő perfekt gráf, szintén az érdeklődő hallgató ellenőrizheti.

Példák IV.

Példák IV.

Példa

C_{2k+1} ($k \geq 2$) páratlan hosszú kör nem perfekt és még csak nem is szép, mivel $\chi(C_{2k+1}) = 3 \neq 2 = \omega(C_{2k+1})$.

Példák IV.

Példa

C_{2k+1} ($k \geq 2$) páratlan hosszú kör nem perfekt és még csak nem is szép, mivel $\chi(C_{2k+1}) = 3 \neq 2 = \omega(C_{2k+1})$.
A háromszög gráfra és az egy pontú gráfra ez nem vonatkozik, ezért nem tudunk általánosságban páratlan hosszú körökről beszélni, csak ötnél több pontúakról.

Példák IV.

Példa

C_{2k+1} ($k \geq 2$) páratlan hosszú kör nem perfekt és még csak nem is szép, mivel $\chi(C_{2k+1}) = 3 \neq 2 = \omega(C_{2k+1})$.
A háromszög gráfra és az egy pontú gráfra ez nem vonatkozik, ezért nem tudunk általánosságban páratlan hosszú körökről beszélni, csak ötnél több pontúakról.
Azt, hogy $\overline{C_{2k+1}}$ ($k \geq 2$) sem perfekt azt ismét az érdeklődő hallgatóra bízzuk.

Egy észrevétel

Egy észrevétel

Jelölés

A feszített részgráfot szögletes tartalmazással jelöljük a továbbiakban. $G \sqsupseteq R$, ha R feszített része a G-nek.

Egy észrevétel

Jelölés

A feszített részgráfot szögletes tartalmazással jelöljük a továbbiakban. $G \sqsupseteq R$, ha R feszített része a G-nek.

Észrevétel

A perfektség definíciója és a példák után triviálisak az alábbiak:

(i) Ha G perfekt és $G \sqsupseteq R$, akkor R is perfekt.

(ii) Ha G nem perfekt és $S \sqsupseteq G$, akkor S sem perfekt.

(iii) Ha $G \sqsupseteq C_{2k+1}$ vagy $G \sqsupseteq \overline{C_{2k+1}}$ valamely $k \geq 2$ esetén, akkor G nem perfekt.

Egy észrevétel

Jelölés

A feszített részgráfot szögletes tartalmazással jelöljük a továbbiakban. $G \sqsupseteq R$, ha R feszített része a G-nek.

Észrevétel

A perfektség definíciója és a példák után triviálisak az alábbiak:

(i) Ha G perfekt és $G \sqsupseteq R$, akkor R is perfekt.

(ii) Ha G nem perfekt és $S \sqsupseteq G$, akkor S sem perfekt.

(iii) Ha $G \sqsupseteq C_{2k+1}$ vagy $G \sqsupseteq \overline{C_{2k+1}}$ valamely $k \geq 2$ esetén, akkor G nem perfekt.

Az összes ismert nem perfekt gráf esetén a nem perfektség a (iii) észrevétel alapján adódik. Ez alapján először Berge fogalmazta meg 1962-ben sejtésként, hogy a (iii) észrevétel megfordítható (erős perfekt gráf sejtés).

Erős perfekt gráf sejtés/tétel

Erős perfekt gráf sejtés/tétel

Ezt bizonyítani csak 2006-ban sikerült Chudnovsky—Seymour—Robertson—Thomas szerzőnégyesnek. A cikkük több mint 100 oldalas, maga a tétel bizonyítása egy féléves PhD kurzusba férne csak bele.

Erős perfekt gráf sejtés/tétel

Ezt bizonyítani csak 2006-ban sikerült Chudnovsky—Seymour—Robertson—Thomas szerzőnégyesnek. A cikkük több mint 100 oldalas, maga a tétel bizonyítása egy féléves PhD kurzusba férne csak bele.

Tétel (Erős perfekt gráf tétel, Chudnovsky—Seymour—Robertson—Thomas, 2006)

G akkor és csak akkor nem perfekt, ha feszített részgráfként nem tartalmaz C_{2k+1} és $\overline{C_{2k+1}}$ gráfokat ($k \geq 2$).

Erős perfekt gráf sejtés/tétel

Ezt bizonyítani csak 2006-ban sikerült Chudnovsky—Seymour—Robertson—Thomas szerzőnégyesnek. A cikkük több mint 100 oldalas, maga a tétel bizonyítása egy féléves PhD kurzusba férne csak bele.

Tétel (Erős perfekt gráf tétel, Chudnovsky—Seymour—Robertson —Thomas, 2006)

G akkor és csak akkor nem perfekt, ha feszített részgráfként nem tartalmaz C_{2k+1} és $\overline{C_{2k+1}}$ gráfokat ($k \geq 2$).

Legyen G perfekt. Tudjuk, hogy nem tartalmazhat legalább öt hosszú páratlan kört vagy komplementerét feszített részgráfként. Ez a tulajdonság természetesen öröklődik komplementerére. Így ha az erős perfekt gráf sejtés igaz, akkor $\overline{G}$ is perfekt. Ekkor persze G és $\overline{G}$ perfektsége együtt jár.

Gyenge perfekt gráf tétel

Gyenge perfekt gráf tétel

Ezt a gondolatmenetet már Berge is látta. Bizonyítani nem tudta (az erős sejtés bizonyítása hijján is elképzelhető lenne egy egyszerű bizonyítás). Gyenge perfekt gráf sejtésként hivatkozta ezen állítást. Ez „csupán” tíz évig volt megoldatlan.

Gyenge perfekt gráf tétel

Ezt a gondolatmenetet már Berge is látta. Bizonyítani nem tudta (az erős sejtés bizonyítása hijján is elképzelhető lenne egy egyszerű bizonyítás). Gyenge perfekt gráf sejtésként hivatkozta ezen állítást. Ez „csupán” tíz évig volt megoldatlan.

Tétel (Gyenge perfekt gráf tétel, Lovász, 1972)

G akkor és csak akkor perfekt, ha $\overline{G}$ perfekt

Gyenge perfekt gráf tétel

Ezt a gondolatmenetet már Berge is látta. Bizonyítani nem tudta (az erős sejtés bizonyítása hijján is elképzelhető lenne egy egyszerű bizonyítás). Gyenge perfekt gráf sejtésként hivatkozta ezen állítást. Ez „csupán” tíz évig volt megoldatlan.

Tétel (Gyenge perfekt gráf tétel, Lovász, 1972)

G akkor és csak akkor perfekt, ha $\overline{G}$ perfekt

Az erős változat nélkül ez a tétel sem egy triviális állítás, de egy MSc kurzus egy előadása keretében belátható. Az óra további részében ezen tétel bizonyítása lesz a célunk.

Szünet

Perfekt gráfok és politópok

Perfekt gráfok és politópok

Tétel (Fulkerson—Chvatal-tétel, 1973)

A következők ekvivalensek:

(i) $\mathcal{PP}(G) = \widehat{\mathcal{PP}}(G)$

(ii) $\widehat{\mathcal{PP}}(G)$ csúcsai egészek

(iii) G perfekt

Perfekt gráfok és politópok

Tétel (Fulkerson—Chvatal-tétel, 1973)

A következők ekvivalensek:

(i) $\mathcal{PP}(G) = \widehat{\mathcal{PP}}(G)$

(ii) $\widehat{\mathcal{PP}}(G)$ csúcsai egészek

(iii) G perfekt

Az $(i) \iff (ii)$ ekvivalencia egy egyszerűbb állítás, formálisan nem írjuk le. A korábbi ötletek, gondolatmenetek után az érdeklődő hallgató is könnyen beláthatja.

A Fulkerson—Chvatal-tétel két fele

A Fulkerson—Chvatal-tétel két fele

Az $(ii) \Longleftrightarrow (iii)$ bizonyítása a következő állításokon alapul:

$$\text{G perfekt} \Rightarrow_{\text{(A)}} \widehat{\mathcal{P}\mathcal{P}}(G) \text{ csúcsai egészek} \Rightarrow_{\text{(B)}} \overline{G} \text{ perfekt.}$$

A Fulkerson—Chvatal-tétel két fele

Az $(ii) \iff (iii)$ bizonyítása a következő állításokon alapul:

$$\text{G perfekt} \Rightarrow_{(\mathrm{A})} \widehat{\mathcal{PP}}(G) \text{ csúcsai egészek} \Rightarrow_{(\mathrm{B})} \overline{G} \text{ perfekt.}$$

A fenti két következtetést $\overline{G}$-re elismételve kapjuk a Fulkerson—Chvatal-tétel teljes bizonyítását és vele együtt a gyenge perfekt gráf tételt.

A Fulkerson—Chvatal-tétel két fele

Az $(ii) \iff (iii)$ bizonyítása a következő állításokon alapul:

$$\text{G perfekt} \Rightarrow_{\text{(A)}} \widehat{\mathcal{PP}}(G) \text{ csúcsai egészek} \Rightarrow_{\text{(B)}} \overline{G} \text{ perfekt.}$$

A fenti két következtetést $\overline{G}$-re elismételve kapjuk a Fulkerson—Chvatal-tétel teljes bizonyítását és vele együtt a gyenge perfekt gráf tételt.

Az is adódik, hogy nem perfekt gráfok esetén a klikkfeltételeken túl további egyenlőtlenségek szükségesek $\mathcal{PP}$ leírásához. Ez a kutatási irány mind a mai napig aktív és fontos.

Gráfelméleti előkészületek, 1. Lemma

Gráfelméleti előkészületek, 1. Lemma

(A) bizonyításához előbb két lemmát fogunk belátni.

Gráfelméleti előkészületek, 1. Lemma

(A) bizonyításához előbb két lemmát fogunk belátni.

Lemma

G akkor és csak akkor perfekt, ha minden feszített részgráfra teljesül

$(\star)$: létezik független csúcshalmaz, amely minden optimális (maximális elemszámú) klikket metsz.

1. Lemma bizonyítása ($\Longleftarrow$)

1. Lemma bizonyítása ($\Longleftarrow$)

Mivel a $(\star)$ tulajdonság öröklődik a feszített részgráfokra, ezért elég csak G szépségét belátnunk.

1. Lemma bizonyítása ($\Longleftarrow$)

Mivel a ($\star$) tulajdonság öröklődik a feszített részgráfokra, ezért elég csak G szépségét belátnunk.

Legyen F_1 egy olyan független ponthalmaz G-ben, amely ($\star$) feltételnek eleget tesz.

1. Lemma bizonyítása ($\Longleftarrow$)

Mivel a ($\star$) tulajdonság öröklődik a feszített részgráfokra, ezért elég csak G szépségét belátnunk.

Legyen F_1 egy olyan független ponthalmaz G-ben, amely ($\star$) feltételnek eleget tesz.

Legyen $k := \omega(G)$.

1. Lemma bizonyítása ($\Longleftarrow$)

Mivel a $(\star)$ tulajdonság öröklődik a feszített részgráfokra, ezért elég csak G szépségét belátnunk.

Legyen F_1 egy olyan független ponthalmaz G-ben, amely $(\star)$ feltételnek eleget tesz.

Legyen $k := \omega(G)$. Ekkor $\omega(G - F_1) = k - 1$, mivel az F_1 mindegyik maximális méretű klikkből kimetsz legalább egy csúcsot, egynél többet pedig nem metszhet, mivel F_1 független ponthalmaz, aminek egy kikkel legfeljebb egy közös pontja lehet.

1. Lemma bizonyítása ($\Longleftarrow$)

Mivel a $(\star)$ tulajdonság öröklődik a feszített részgráfokra, ezért elég csak G szépségét belátnunk.

Legyen F_1 egy olyan független ponthalmaz G-ben, amely $(\star)$ feltételnek eleget tesz.

Legyen $k := \omega(G)$. Ekkor $\omega(G - F_1) = k - 1$, mivel az F_1 mindegyik maximális méretű klikkből kimetsz legalább egy csúcsot, egynél többet pedig nem metszhet, mivel F_1 független ponthalmaz, aminek egy kikkel legfeljebb egy közös pontja lehet.

A $G - F_1$ gráfra újra felhasználhatjuk a $(\star)$ tulajdonságot, ami ad nekünk egy F_2 független ponthalmazt, melyre az előző magyarázat alapján $\omega(G - F_1 - F_2) = k - 2$ teljesül.

1. Lemma bizonyítása ($\Longleftarrow$)

Mivel a $(\star)$ tulajdonság öröklődik a feszített részgráfokra, ezért elég csak G szépségét belátnunk.

Legyen F_1 egy olyan független ponthalmaz G-ben, amely $(\star)$ feltételnek eleget tesz.

Legyen $k := \omega(G)$. Ekkor $\omega(G - F_1) = k - 1$, mivel az F_1 mindegyik maximális méretű klikkből kimetsz legalább egy csúcsot, egynél többet pedig nem metszhet, mivel F_1 független ponthalmaz, aminek egy kikkel legfeljebb egy közös pontja lehet.

A $G - F_1$ gráfra újra felhasználhatjuk a $(\star)$ tulajdonságot, ami ad nekünk egy F_2 független ponthalmazt, melyre az előző magyarázat alapján $\omega(G - F_1 - F_2) = k - 2$ teljesül.

Ezt $(k-1)$-szer ismételve eljutunk a $H := G - F_1 - F_2 - \ldots - F_{k-1}$ gráfhoz, melyről tudjuk, hogy $\omega(H) = 1$. Ez gráfelméletileg annyit jelent, hogy H maga is egy független ponthalmaz.

1. Lemma bizonyítása ($\Longleftarrow$)

Mivel a $(\star)$ tulajdonság öröklődik a feszített részgráfokra, ezért elég csak G szépségét belátnunk.

Legyen F_1 egy olyan független ponthalmaz G-ben, amely $(\star)$ feltételnek eleget tesz.

Legyen $k := \omega(G)$. Ekkor $\omega(G - F_1) = k - 1$, mivel az F_1 mindegyik maximális méretű klikkből kimetsz legalább egy csúcsot, egynél többet pedig nem metszhet, mivel F_1 független ponthalmaz, aminek egy kikkel legfeljebb egy közös pontja lehet.

A $G - F_1$ gráfra újra felhasználhatjuk a $(\star)$ tulajdonságot, ami ad nekünk egy F_2 független ponthalmazt, melyre az előző magyarázat alapján $\omega(G - F_1 - F_2) = k - 2$ teljesül.

Ezt $(k-1)$-szer ismételve eljutunk a $H := G - F_1 - F_2 - \ldots - F_{k-1}$ gráfhoz, melyről tudjuk, hogy $\omega(H) = 1$. Ez gráfelméletileg annyit jelent, hogy H maga is egy független ponthalmaz.

Így kaptunk k darab független ponthalmazt, egy k-színezést.

1. Lemma bizonyítása ($\Longrightarrow$)

1. Lemma bizonyítása ($\Longrightarrow$)

G szépségéből bizonyítjuk, hogy rendelkezik a $(\star)$ tulajdonsággal.

1. Lemma bizonyítása ($\Longrightarrow$)

G szépségéből bizonyítjuk, hogy rendelkezik a ($\star$) tulajdonsággal.

Valóban, legyen $\chi(G) = \omega(G) = k$ és tekintsük egyik optimális színezésének k darab színosztályát.

1. Lemma bizonyítása ($\Longrightarrow$)

G szépségéből bizonyítjuk, hogy rendelkezik a $(\star)$ tulajdonsággal.

Valóban, legyen $\chi(G) = \omega(G) = k$ és tekintsük egyik optimális színezésének k darab színosztályát.

Ezek az osztályok független ponthalmazok, ezért ha veszünk egy optimális méretű klikket, akkor az a klikkség miatt mindegyik színosztályba legfeljebb egyszer metszhet bele, de a G szépsége miatt szükséges, hogy mindegyikből tartalmazzon is egy pontot.

1. Lemma bizonyítása ($\Longrightarrow$)

G szépségéből bizonyítjuk, hogy rendelkezik a $(\star)$ tulajdonsággal.

Valóban, legyen $\chi(G) = \omega(G) = k$ és tekintsük egyik optimális színezésének k darab színosztályát.

Ezek az osztályok független ponthalmazok, ezért ha veszünk egy optimális méretű klikket, akkor az a klikkség miatt mindegyik színosztályba legfeljebb egyszer metszhet bele, de a G szépsége miatt szükséges, hogy mindegyikből tartalmazzon is egy pontot.

Így bármelyik színosztályt választva felmutatunk egy $(\star)$-ot teljesítő ponthalmazt.

Egy észrevétel

Egy észrevétel

Az előző bizonyítás végén láttuk, hogy nagy szabadságunk van a $(\star)$-ot teljesítő ponthalmaz kiválasztásakor, mivel egy optimális színezés tetszőleges színosztálya megfelel. Ez alapján a $(\star)$-ot egy szigorúbb feltétellel helyettesíthetjük, melynek teljesülése minden feszített részgráf esetén továbbra is ekvivalens lesz G perfektségével.

Egy észrevétel

Az előző bizonyítás végén láttuk, hogy nagy szabadságunk van a $(\star)$-ot teljesítő ponthalmaz kiválasztásakor, mivel egy optimális színezés tetszőleges színosztálya megfelel. Ez alapján a $(\star)$-ot egy szigorúbb feltétellel helyettesíthetjük, melynek teljesülése minden feszített részgráf esetén továbbra is ekvivalens lesz G perfektségével.

Lemma$^+$

G akkor és csak akkor perfekt, ha minden feszített részgráfra teljesül

$(\star)^+$: bármely $x \in V(G)$ esetén létezik x-et tartalmazó független csúcshalmaz, amely minden optimális klikket metsz.

Gráfelméleti előkészületek, Felfújás

Gráfelméleti előkészületek, Felfújás

A végső lemmához egy gráfelméleti operációra lesz szükségünk.

Gráfelméleti előkészületek, Felfújás

A végső lemmához egy gráfelméleti operációra lesz szükségünk.

Definíció

Legyen G egy gráf, amihez tartozik egy $n = (n_v)_{v \in V} \in \mathbb{N}^V$ vektor. Ennek komponensei minden csúcshoz hozzárendelnek egy természetes számot.

Gráfelméleti előkészületek, Felfújás

A végső lemmához egy gráfelméleti operációra lesz szükségünk.

Definíció

Legyen G egy gráf, amihez tartozik egy $n = (n_v)_{v \in V} \in \mathbb{N}^V$ vektor. Ennek komponensei minden csúcshoz hozzárendelnek egy természetes számot.

G felfújtja (az n vektorral) $n \times G$ az a gráf, amelyben minden csúcsot helyettesítünk egy n_v elemszámú klikkel, az így kapott különböző klikkek csúcsait (mindegyiket mindegyikkel) pedig pontosan akkor kötjük össze, ha az eredeti gráfban a klikkeknek megfelelő csúcsok összekötöttek voltak.

Gráfelméleti előkészületek, 2. Lemma

2. Lemma

Legyen G perfekt gráf és $n \in \mathbb{N}^V$, $n = (n_v)_{v \in V}$ tetszőleges vektor. Azt állítjuk, hogy ekkor G gráf n vektorral vett felfújtja is perfekt.

Megjegyzések

Megjegyzések

1. Megjegyzés

Jelölje H a G-ből felfújással kapott gráfot. Az előző lemma alapján elegendő belátni, hogy $(\star)$ teljesül H összes feszített részgráfjára. Viszont H részgráfjaira teljesül, hogy azok G gráf egy másik vektorral vett felfújásai, ezért ha egy tetszőleges n vektorra belátjuk, hogy maga H teljesíti $(\star)$-ot, akkor a feszített részgráfjaival már nem kell foglalkoznunk.

Megjegyzések

1. Megjegyzés

Jelölje H a G-ből felfújással kapott gráfot. Az előző lemma alapján elegendő belátni, hogy $(\star)$ teljesül H összes feszített részgráfjára. Viszont H részgráfjaira teljesül, hogy azok G gráf egy másik vektorral vett felfújásai, ezért ha egy tetszőleges n vektorra belátjuk, hogy maga H teljesíti $(\star)$-ot, akkor a feszített részgráfjaival már nem kell foglalkoznunk.

2. Megjegyzés

A felfújást el tudjuk végezni kisebb lépésekből, amelyeknél egyessével fújjuk csak fel a csúcsokat. Azaz feltehető, hogy $n = (1, \ldots, 1, n_v, 1, \ldots, 1)$, mivel a vektorban szereplő egyesek egy pontból álló klikkeket jelentenek. Az egyetlen felfújt csúcsot jelöli v.

2. Lemma bizonyítása

2. Lemma bizonyítása

H a G perfekt gráfból a v csúcs felfújásával kapott gráf.

2. Lemma bizonyítása

H a G perfekt gráfból a v csúcs felfújásával kapott gráf.

Az előző lemma alapján G-ről tudjuk $(\star)^+$-t, tehát létezik F független ponthalmaz, melyre $v \in F$ és minden optimális klikket metsz.

2. Lemma bizonyítása

H a G perfekt gráfból a v csúcs felfújásával kapott gráf.

Az előző lemma alapján G-ről tudjuk $(\star)^+$-t, tehát létezik F független ponthalmaz, melyre $v \in F$ és minden optimális klikket metsz.

F ismeretében megkaphatunk egy H-beli független ponthalmazt is, $F' := \{v \text{ felfújtjának egyik csúcsa}\} \cup (F \backslash v)$-t. Erről be kell látni, hogy igazolja $(\star)$-ot H-ra tehát, hogy minden optimális klikket metsz.

2. Lemma bizonyítása

H a G perfekt gráfból a v csúcs felfújásával kapott gráf.

Az előző lemma alapján G-ről tudjuk $(\star)^+$-t, tehát létezik F független ponthalmaz, melyre $v \in F$ és minden optimális klikket metsz.

F ismeretében megkaphatunk egy H-beli független ponthalmazt is, $F' := \{v \text{ felfújtjának egyik csúcsa}\} \cup (F \setminus v)$-t. Erről be kell látni, hogy igazolja $(\star)$-ot H-ra tehát, hogy minden optimális klikket metsz.

Vegyük észre, hogy H optimális klikkjei kétfélek lehetnek:

a) v felfújtját egészben tartalmazza,

b) $G \setminus v$ optimális klikkje, amely G optimális klikkje is egyben.

2. Lemma bizonyítása

H a G perfekt gráfból a v csúcs felfújásával kapott gráf.

Az előző lemma alapján G-ről tudjuk $(\star)^+$-t, tehát létezik F független ponthalmaz, melyre $v \in F$ és minden optimális klikket metsz.

F ismeretében megkaphatunk egy H-beli független ponthalmazt is, $F' := \{v \text{ felfújtjának egyik csúcsa}\} \cup (F \backslash v)$-t. Erről be kell látni, hogy igazolja $(\star)$-ot H-ra tehát, hogy minden optimális klikket metsz.

Vegyük észre, hogy H optimális klikkjei kétfélek lehetnek:

a) v felfújtját egészben tartalmazza,

b) $G \backslash v$ optimális klikkje, amely G optimális klikkje is egyben.

Az a) típusú klikkekbe F'-be v felfújtjának egyik csúcsa miatt metsz bele. A b) típusú klikkekbe pedig $F \backslash \{v\}$-t miatt. A lemmát ezzel bebizonyítottuk.

G perfekt $\Rightarrow_{(A)}$ $\widehat{\mathcal{PP}}(G)$ csúcsai egészek

G perfekt $\Rightarrow_{(\mathrm{A})}$ $\widehat{\mathcal{P}\mathcal{P}}(G)$ csúcsai egészek

Legyen G perfekt, $e \in \widehat{\mathcal{P}\mathcal{P}(G)}$ a politóp egyik csúcsa.

G perfekt $\Rightarrow_{(A)}$ $\widehat{\mathcal{PP}}(G)$ csúcsai egészek

Legyen G perfekt, $e \in \widehat{\mathcal{PP}(G)}$ a politóp egyik csúcsa.

Célunk belátni, hogy $e \in \mathbb{Z}^V$.

G perfekt $\Rightarrow_{(\mathrm{A})}$ $\widehat{\mathcal{PP}}(G)$ csúcsai egészek

Legyen G perfekt, $e \in \widehat{\mathcal{PP}(G)}$ a politóp egyik csúcsa.

Célunk belátni, hogy $e \in \mathbb{Z}^V$.

Azt tudjuk, hogy $e \in \mathbb{Q}^V$. Legyen $e = (\frac{n_v}{N})_{v \in V}$ a koordináták közös nevezőre hozott alakja.

G perfekt $\Rightarrow_{(A)}$ $\widehat{\mathcal{PP}}(G)$ csúcsai egészek

Legyen G perfekt, $e \in \widehat{\mathcal{PP}(G)}$ a politóp egyik csúcsa.

Célunk belátni, hogy $e \in \mathbb{Z}^V$.

Azt tudjuk, hogy $e \in \mathbb{Q}^V$. Legyen $e = (\frac{n_v}{N})_{v \in V}$ a koordináták közös nevezőre hozott alakja.

Használjuk fel az előző lemmát a G gráfra és $n = (n_v)_{v \in V}$ vektorra, tehát képezzük H felfújt gárfot.

G perfekt $\Rightarrow_{(A)}$ $\widehat{\mathcal{PP}}(G)$ csúcsai egészek

Legyen G perfekt, $e \in \widehat{\mathcal{PP}(G)}$ a politóp egyik csúcsa.

Célunk belátni, hogy $e \in \mathbb{Z}^V$.

Azt tudjuk, hogy $e \in \mathbb{Q}^V$. Legyen $e = (\frac{n_v}{N})_{v \in V}$ a koordináták közös nevezőre hozott alakja.

Használjuk fel az előző lemmát a G gráfra és $n = (n_v)_{v \in V}$ vektorra, tehát képezzük H felfújt gárfot.

A lemma szerint H perfekt.

G perfekt $\Rightarrow_{(A)}$ $\widehat{\mathcal{PP}}(G)$ csúcsai egészek

Legyen G perfekt, $e \in \widehat{\mathcal{PP}(G)}$ a politóp egyik csúcsa.

Célunk belátni, hogy $e \in \mathbb{Z}^V$.

Azt tudjuk, hogy $e \in \mathbb{Q}^V$. Legyen $e = (\frac{n_v}{N})_{v \in V}$ a koordináták közös nevezőre hozott alakja.

Használjuk fel az előző lemmát a G gráfra és $n = (n_v)_{v \in V}$ vektorra, tehát képezzük H felfújt gárfot.

A lemma szerint H perfekt.

Keressük H legnagyobb klikkjét, vagy más szavakkal, G-nek azt a K klikkjét, amelyen a $\sum\limits_{v \in K} n_v$ összeg maximális.

(A) bizonyítása (folytatás)

(A) bizonyítása (folytatás)

Mivel $(\frac{n_v}{N}) \in \widehat{\mathcal{PP}(G)}$, így

$$\sum_{v \in K} \frac{n_v}{N} \leq 1 \qquad \text{és}$$

$$\sum_{v \in K} n_v \leq N,$$

azaz H-ban nincs N-nél nagyobb klikk.

(A) bizonyítása (folytatás)

Mivel $(\frac{n_v}{N}) \in \widehat{\mathcal{PP}(G)}$, így

$$\sum_{v \in K} \frac{n_v}{N} \leq 1 \qquad \text{és}$$

$$\sum_{v \in K} n_v \leq N,$$

azaz H-ban nincs N-nél nagyobb klikk.

Ebből H perfektsége miatt következik, hogy N darab színnel kiszínezhető.

(A) bizonyítása (folytatás)

Mivel $(\frac{n_v}{N}) \in \widehat{\mathcal{PP}(G)}$, így

$$\sum_{v \in K} \frac{n_v}{N} \leq 1 \qquad \text{és}$$
$$\sum_{v \in K} n_v \leq N,$$

azaz H-ban nincs N-nél nagyobb klikk.

Ebből H perfektsége miatt következik, hogy N darab színnel kiszínezhető.

Azaz tudjuk, hogy van $F_1, \ldots, F_N$ független ponthalmaz, melyek diszjunkt uniója kiadja $V(H)$-t.

(A) bizonyítása (folytatás)

(A) bizonyítása (folytatás)

Az F_i halmazok visszavetíthetők G-be: az $F_i \subset V(H)$ halmaznak feleljen meg $\Phi_i \subset V(G)$.

(A) bizonyítása (folytatás)

Az F_i halmazok visszavetíthetők G-be: az $F_i \subset V(H)$ halmaznak feleljen meg $\Phi_i \subset V(G)$.

A Φ_i halmazok uniója minden v csúcsot n_v-szer fed le. Azaz

$$\sum_{i=1}^{N} \chi_{\Phi_i} = (n_1, n_2, \ldots).$$

(A) bizonyítása (folytatás)

Az F_i halmazok visszavetíthetők G-be: az $F_i \subset V(H)$ halmaznak feleljen meg $\Phi_i \subset V(G)$.

A Φ_i halmazok uniója minden v csúcsot n_v-szer fed le. Azaz

$$\sum_{i=1}^{N} \chi_{\Phi_i} = (n_1, n_2, \ldots).$$

N-nel történő osztással kapjuk:

$$\sum_{i=1}^{N} \frac{\chi_{\Phi_i}}{N} = e.$$

(A) bizonyításának vége

(A) bizonyításának vége

- A bal oldalon szereplő „átlag” független ponthalmazok karakterisztikus vektorainak (speciálisan $\widehat{\mathcal{PP}}$ elemeinek) konvex kombinációja.

(A) bizonyításának vége

- A bal oldalon szereplő „átlag” független ponthalmazok karakterisztikus vektorainak (speciálisan $\widehat{\mathcal{PP}}$ elemeinek) konvex kombinációja. Jobb oldalon pedig $\widehat{\mathcal{PP}(G)}$-nek egy csúcsát látjuk.

(A) bizonyításának vége

- A bal oldalon szereplő „átlag” független ponthalmazok karakterisztikus vektorainak (speciálisan $\widehat{\mathcal{PP}}$ elemeinek) konvex kombinációja. Jobb oldalon pedig $\widehat{\mathcal{PP}(G)}$-nek egy csúcsát látjuk.
- Ebből az következik, hogy e az egyik χ_{Φ_i} (sőt az is, hogy az összes $\chi_{\Phi_i} = e$). Tehát e egész.

(A) bizonyításának vége

- A bal oldalon szereplő „átlag" független ponthalmazok karakterisztikus vektorainak (speciálisan $\widehat{\mathcal{PP}}$ elemeinek) konvex kombinációja. Jobb oldalon pedig $\widehat{\mathcal{PP}(G)}$-nek egy csúcsát látjuk.
- Ebből az következik, hogy e az egyik χ_{Φ_i} (sőt az is, hogy az összes $\chi_{\Phi_i} = e$). Tehát e egész.
- Valóban:

(A) bizonyításának vége

- A bal oldalon szereplő „átlag” független ponthalmazok karakterisztikus vektorainak (speciálisan $\widehat{\mathcal{PP}}$ elemeinek) konvex kombinációja. Jobb oldalon pedig $\widehat{\mathcal{PP}(G)}$-nek egy csúcsát látjuk.
- Ebből az következik, hogy e az egyik χ_{Φ_i} (sőt az is, hogy az összes $\chi_{\Phi_i} = e$). Tehát e egész.
- Valóban: Ha e csúcsa $\widehat{\mathcal{PP}}$-nek, akkor alkalmas $\{x \in \mathbb{R}^V : \nu^T x \leq b\}$ féltér tartalmazza $\widehat{\mathcal{PP}}$ politópot úgy, hogy ebből a politópból egyedül e teljesítse az egyenlőtlenséget egyenlőségként.

(A) bizonyításának vége

- A bal oldalon szereplő „átlag” független ponthalmazok karakterisztikus vektorainak (speciálisan $\widehat{\mathcal{P}\mathcal{P}}$ elemeinek) konvex kombinációja. Jobb oldalon pedig $\widehat{\mathcal{P}\mathcal{P}(G)}$-nek egy csúcsát látjuk.
- Ebből az következik, hogy e az egyik χ_{Φ_i} (sőt az is, hogy az összes $\chi_{\Phi_i} = e$). Tehát e egész.
- Valóban: Ha e csúcsa $\widehat{\mathcal{P}\mathcal{P}}$-nek, akkor alkalmas $\{x \in \mathbb{R}^V : \nu^T x \leq b\}$ féltér tartalmazza $\widehat{\mathcal{P}\mathcal{P}}$ politópot úgy, hogy ebből a politópból egyedül e teljesítse az egyenlőtlenséget egyenlőségként.
- Tegyük fel, hogy a fenti átlagban szerepel olyan vektor is, amely nem e.

(A) bizonyításának vége

- A bal oldalon szereplő „átlag” független ponthalmazok karakterisztikus vektorainak (speciálisan $\widehat{\mathcal{PP}}$ elemeinek) konvex kombinációja. Jobb oldalon pedig $\widehat{\mathcal{PP}(G)}$-nek egy csúcsát látjuk.
- Ebből az következik, hogy e az egyik χ_{Φ_i} (sőt az is, hogy az összes $\chi_{\Phi_i} = e$). Tehát e egész.
- Valóban: Ha e csúcsa $\widehat{\mathcal{PP}}$-nek, akkor alkalmas $\{x \in \mathbb{R}^V : \nu^T x \leq b\}$ féltér tartalmazza $\widehat{\mathcal{PP}}$ politópot úgy, hogy ebből a politópból egyedül e teljesítse az egyenlőtlenséget egyenlőségként.
- Tegyük fel, hogy a fenti átlagban szerepel olyan vektor is, amely nem e. (Indirekt bizonyítás)

(A) bizonyításának vége

- A bal oldalon szereplő „átlag” független ponthalmazok karakterisztikus vektorainak (speciálisan $\widehat{\mathcal{PP}}$ elemeinek) konvex kombinációja. Jobb oldalon pedig $\widehat{\mathcal{PP}(G)}$-nek egy csúcsát látjuk.
- Ebből az következik, hogy e az egyik χ_{Φ_i} (sőt az is, hogy az összes $\chi_{\Phi_i} = e$). Tehát e egész.
- Valóban: Ha e csúcsa $\widehat{\mathcal{PP}}$-nek, akkor alkalmas $\{x \in \mathbb{R}^V : \nu^T x \leq b\}$ féltér tartalmazza $\widehat{\mathcal{PP}}$ politópot úgy, hogy ebből a politópból egyedül e teljesítse az egyenlőtlenséget egyenlőségként.
- Tegyük fel, hogy a fenti átlagban szerepel olyan vektor is, amely nem e. (Indirekt bizonyítás)
- Ez a vektor az előző féltér definiáló egyenlőtlenségét szigorúan teljesíti. A többi tag is teljesíti az egyenlőtlenséget.

(A) bizonyításának vége

- A bal oldalon szereplő „átlag” független ponthalmazok karakterisztikus vektorainak (speciálisan $\widehat{\mathcal{PP}}$ elemeinek) konvex kombinációja. Jobb oldalon pedig $\widehat{\mathcal{PP}(G)}$-nek egy csúcsát látjuk.
- Ebből az következik, hogy e az egyik χ_{Φ_i} (sőt az is, hogy az összes $\chi_{\Phi_i} = e$). Tehát e egész.
- Valóban: Ha e csúcsa $\widehat{\mathcal{PP}}$-nek, akkor alkalmas $\{x \in \mathbb{R}^V : \nu^T x \leq b\}$ féltér tartalmazza $\widehat{\mathcal{PP}}$ politópot úgy, hogy ebből a politópból egyedül e teljesítse az egyenlőtlenséget egyenlőségként.
- Tegyük fel, hogy a fenti átlagban szerepel olyan vektor is, amely nem e. (Indirekt bizonyítás)
- Ez a vektor az előző féltér definiáló egyenlőtlenségét szigorúan teljesíti. A többi tag is teljesíti az egyenlőtlenséget. De ezek az egyenlőtlenségek is átlagolhatók.

(A) bizonyításának vége

- A bal oldalon szereplő „átlag” független ponthalmazok karakterisztikus vektorainak (speciálisan $\widehat{\mathcal{PP}}$ elemeinek) konvex kombinációja. Jobb oldalon pedig $\widehat{\mathcal{PP}(G)}$-nek egy csúcsát látjuk.
- Ebből az következik, hogy e az egyik χ_{Φ_i} (sőt az is, hogy az összes $\chi_{\Phi_i} = e$). Tehát e egész.
- Valóban: Ha e csúcsa $\widehat{\mathcal{PP}}$-nek, akkor alkalmas $\{x \in \mathbb{R}^V : \nu^T x \leq b\}$ féltér tartalmazza $\widehat{\mathcal{PP}}$ politópot úgy, hogy ebből a politópból egyedül e teljesítse az egyenlőtlenséget egyenlőségként.
- Tegyük fel, hogy a fenti átlagban szerepel olyan vektor is, amely nem e. (Indirekt bizonyítás)
- Ez a vektor az előző féltér definiáló egyenlőtlenségét szigorúan teljesíti. A többi tag is teljesíti az egyenlőtlenséget. De ezek az egyenlőtlenségek is átlagolhatók. Az eredmény egy szigorú egyenlőtlenség lesz, azaz az átlag-vektor nem lehetne e.

(A) bizonyításának vége

- A bal oldalon szereplő „átlag” független ponthalmazok karakterisztikus vektorainak (speciálisan $\widehat{\mathcal{PP}}$ elemeinek) konvex kombinációja. Jobb oldalon pedig $\widehat{\mathcal{PP}(G)}$-nek egy csúcsát látjuk.
- Ebből az következik, hogy e az egyik χ_{Φ_i} (sőt az is, hogy az összes $\chi_{\Phi_i} = e$). Tehát e egész.
- Valóban: Ha e csúcsa $\widehat{\mathcal{PP}}$-nek, akkor alkalmas $\{x \in \mathbb{R}^V : \nu^T x \leq b\}$ féltér tartalmazza $\widehat{\mathcal{PP}}$ politópot úgy, hogy ebből a politópból egyedül e teljesítse az egyenlőtlenséget egyenlőségként.
- Tegyük fel, hogy a fenti átlagban szerepel olyan vektor is, amely nem e. (Indirekt bizonyítás)
- Ez a vektor az előző féltér definiáló egyenlőtlenségét szigorúan teljesíti. A többi tag is teljesíti az egyenlőtlenséget. De ezek az egyenlőtlenségek is átlagolhatók. Az eredmény egy szigorú egyenlőtlenség lesz, azaz az átlag-vektor nem lehetne e.
- Az ellentmondás adja az állított összefüggést.

$\widehat{\mathcal{PP}}(G)$ csúcsai egészek $\Rightarrow_{(\mathrm{B})}$ $\overline{G}$ perfekt bizonyítása

$\widehat{\mathcal{P}P}(G)$ csúcsai egészek $\Rightarrow_{(B)}$ $\overline{G}$ perfekt bizonyítása

$\widehat{\mathcal{P}P}(G)$ csúcsai egészek, azaz a csúcsok független csúcshalmazok karakterisztikus vektorai.

$\widehat{\mathcal{PP}}(G)$ csúcsai egészek $\Rightarrow_{(\mathrm{B})}$ $\overline{G}$ perfekt bizonyítása

$\widehat{\mathcal{P}P}(G)$ csúcsai egészek, azaz a csúcsok független csúcshalmazok karakterisztikus vektorai.

Az $\{x \in \mathbb{R}^V : 1^\mathsf{T} x \leq \alpha(G)\}$ féltér tartalmazza a $\widehat{\mathcal{P}P}(G)$ politópot.

$\widehat{\mathcal{PP}}(G)$ csúcsai egészek $\Rightarrow_{(\mathrm{B})}$ $\overline{G}$ perfekt bizonyítása

$\widehat{\mathcal{P}P}(G)$ csúcsai egészek, azaz a csúcsok független csúcshalmazok karakterisztikus vektorai.

Az $\{x \in \mathbb{R}^V : 1^\mathsf{T} x \leq \alpha(G)\}$ féltér tartalmazza a $\widehat{\mathcal{P}P}(G)$ politópot.

Ezen féltér határára esnek a maximális független halmazok karakterisztikus vektorai.

$\widehat{\mathcal{PP}}(G)$ csúcsai egészek $\Rightarrow_{(\mathrm{B})}$ $\overline{G}$ perfekt bizonyítása

$\widehat{\mathcal{P}P}(G)$ csúcsai egészek, azaz a csúcsok független csúcshalmazok karakterisztikus vektorai.

Az $\{x \in \mathbb{R}^V : 1^\mathsf{T} x \le \alpha(G)\}$ féltér tartalmazza a $\widehat{\mathcal{P}P}(G)$ politópot.

Ezen féltér határára esnek a maximális független halmazok karakterisztikus vektorai.

Pontosabban

$$\widehat{\mathcal{P}P}(G) \cap \{x \in \mathbb{R}^V : 1^\mathsf{T} x \le \alpha(G)\} = \\ \mathrm{conv}\,\{\chi_F : \ F \text{ egy } \alpha(G) \text{ elemű független}\}.$$

$\widehat{\mathcal{P}P}(G)$ csúcsai egészek $\Rightarrow_{(\mathrm{B})}$ $\overline{G}$ perfekt bizonyítása

$\widehat{\mathcal{P}P}(G)$ csúcsai egészek, azaz a csúcsok független csúcshalmazok karakterisztikus vektorai.

Az $\{x \in \mathbb{R}^V : 1^\mathsf{T} x \leq \alpha(G)\}$ féltér tartalmazza a $\widehat{\mathcal{P}P}(G)$ politópot.

Ezen féltér határára esnek a maximális független halmazok karakterisztikus vektorai.

Pontosabban

$$\widehat{\mathcal{P}P}(G) \cap \{x \in \mathbb{R}^V : 1^\mathsf{T} x \leq \alpha(G)\} = \operatorname{conv}\{\chi_F : \ F \text{ egy } \alpha(G) \text{ elemű független}\}.$$

Ez politópunk egy lapja.

(B) bizonyítása (folytatás)

(B) bizonyítása (folytatás)

A politópunkat leíró egyenlőtlenségekből eredő támaszhipersíkok valamelyikének tartalmazni kell.

(B) bizonyítása (folytatás)

A politópunkat leíró egyenlőtlenségekből eredő támaszhipersíkok valamelyikének tartalmazni kell.

Sőt a klikkfeltételek között is lennie kell ilyennek.

(B) bizonyítása (folytatás)

A politópunkat leíró egyenlőtlenségekből eredő támaszhipersíkok valamelyikének tartalmazni kell.

Sőt a klikkfeltételek között is lennie kell ilyennek.

Ha egy K klikkhez tartozó $\sum_{v:v\in K} x_v = 1$ támaszhipersíkra ráesik az összes maximális elemszámú független ponthalmaz karakterisztikus vektora, akkor $\alpha(G-K) < \alpha(G)$

(B) bizonyításának vége

(B) bizonyításának vége

A (B) állítás bizonyításának vége az, hogy észrevesszük, ha $\widehat{\mathcal{P}P}(G)$ csúcsai egészek, akkor minden $R \sqsubseteq G$ feszített részgráfra $\widehat{\mathcal{P}P}(R)$ csúcsai egészek.

(B) bizonyításának vége

A (B) állítás bizonyításának vége az, hogy észrevesszük, ha $\widehat{\mathcal{P}P}(G)$ csúcsai egészek, akkor minden $R \sqsubseteq G$ feszített részgráfra $\widehat{\mathcal{P}P}(R)$ csúcsai egészek.

Ezt látva ahogy G-ben megtaláltuk a fenti K klikket, úgy $G - K$-ban is találhatunk K' klikket.

(B) bizonyításának vége

A (B) állítás bizonyításának vége az, hogy észrevesszük, ha $\widehat{\mathcal{P}P}(G)$ csúcsai egészek, akkor minden $R \sqsubseteq G$ feszített részgráfra $\widehat{\mathcal{P}P}(R)$ csúcsai egészek.

Ezt látva ahogy G-ben megtaláltuk a fenti K klikket, úgy $G - K$-ban is találhatunk K' klikket.

Folytatva eljárásunkat $V(G)$-t lefedhetjük $\alpha(G)$ darab klikkel. Ez pontosan azt jelenti, hogy $\overline{G}$ szép.

(B) bizonyításának vége

A (B) állítás bizonyításának vége az, hogy észrevesszük, ha $\widehat{\mathcal{P}P}(G)$ csúcsai egészek, akkor minden $R \sqsubseteq G$ feszített részgráfra $\widehat{\mathcal{P}P}(R)$ csúcsai egészek.

Ezt látva ahogy G-ben megtaláltuk a fenti K klikket, úgy $G - K$-ban is találhatunk K' klikket.

Folytatva eljárásunkat $V(G)$-t lefedhetjük $\alpha(G)$ darab klikkel. Ez pontosan azt jelenti, hogy $\overline{G}$ szép.

Ugyanez a gondolatmenet adja, hogy $\overline{G}$ minden feszített részgráfjára is igaz ez. Azaz $\overline{G}$ perfekt.

Vége van!

Köszönöm a figyelmet!