Optimalizálás: Példák

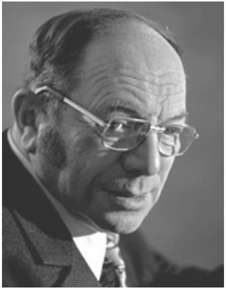
Peter Hajnal

Bolyai Intézet, Szegedi Tudományegyetem, Szeged

2021 tavasz

A tudományág

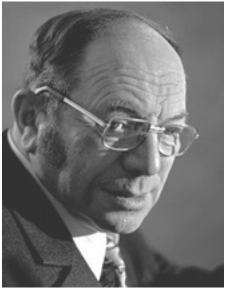
A tudományág



L.V. Kantorovics
(1912-1986)

- Az optimalizálás a matematika legkülönfélébb területeinek találkozási pontja, ezért például a folytonosság fogalmára épülő analitikus meggondolások és diszkrét matematikai módszerek egyaránt részei az optimalizálási apparátusnak.

A tudományág

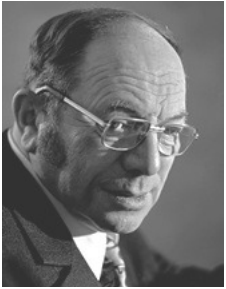


L.V. Kantorovics
(1912-1986)

• Az optimalizálás a matematika legkülönfélébb területeinek találkozási pontja, ezért például a folytonosság fogalmára épülő analitikus meggondolások és diszkrét matematikai módszerek egyaránt részei az optimalizálási apparátusnak.

• Heterogén jellegét jelzi, hogy a megannyi természettudományos, közgazdasági és informatikai alkalmazás, melyek alapját optimalizálási eredmények képezik.

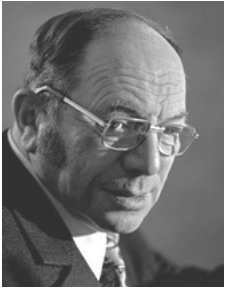
A tudományág



L.V. Kantorovics
(1912-1986)

- Az optimalizálás a matematika legkülönfélébb területeinek találkozási pontja, ezért például a folytonosság fogalmára épülő analitikus meggondolások és diszkrét matematikai módszerek egyaránt részei az optimalizálási apparátusnak.
- Heterogén jellegét jelzi, hogy a megannyi természettudományos, közgazdasági és informatikai alkalmazás, melyek alapját optimalizálási eredmények képezik.
- Az optimalizálás terültén elért áttörések – a széleskörű alkalmazásnak köszönhetően – komoly tudományos elismeréssel járnak.

A tudományág



L.V. Kantorovics
(1912-1986)

• Az optimalizálás a matematika legkülönfélébb területeinek találkozási pontja, ezért például a folytonosság fogalmára épülő analitikus meggondolások és diszkrét matematikai módszerek egyaránt részei az optimalizálási apparátusnak.

• Heterogén jellegét jelzi, hogy a megannyi természettudományos, közgazdasági és informatikai alkalmazás, melyek alapját optimalizálási eredmények képezik.

• Az optimalizálás terültén elért áttörések – a széleskörű alkalmazásnak köszönhetően – komoly tudományos elismeréssel járnak.

• Kantorovics (szovjet matematikus) az optimális erőforrás-allokációval kapcsolatos eredményeiért közgazdasági Nobel-díjat kapott 1975-ben.

Az alapkérdés

Az alapkérdés

- Legyen $c\colon \mathrm{dom}\,(c) \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ egy adott n-változós valós függvény ($n \in \mathbb{N}$), melyet **célfüggvénynek** nevezünk.

Az alapkérdés

- Legyen $c\colon \mathrm{dom}\,(c) \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ egy adott n-változós valós függvény ($n \in \mathbb{N}$), melyet **célfüggvénynek** nevezünk.
- A $\mathrm{dom}\,(c)$ értelmezési tartomány egy általános elemére az $x = (x_1, \ldots, x_n)^\mathsf{T}$ jelölést használjuk.

Az alapkérdés

- Legyen $c\colon \mathrm{dom}\,(c) \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ egy adott n-változós valós függvény ($n \in \mathbb{N}$), melyet **célfüggvénynek** nevezünk.
- A $\mathrm{dom}\,(c)$ értelmezési tartomány egy általános elemére az $x = (x_1, \ldots, x_n)^\mathsf{T}$ jelölést használjuk. FIGYELEM! Az előadás során mindvégig oszlopvektorokkal dolgozunk.

Az alapkérdés

- Legyen $c\colon \mathrm{dom}\,(c) \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ egy adott n-változós valós függvény ($n \in \mathbb{N}$), melyet **célfüggvénynek** nevezünk.
- A $\mathrm{dom}\,(c)$ értelmezési tartomány egy általános elemére az $x = (x_1, \ldots, x_n)^{\mathsf{T}}$ jelölést használjuk. FIGYELEM! Az előadás során mindvégig oszlopvektorokkal dolgozunk.
- Az optimalizálás alapfeladata a c célfüggvény minimalizálása, előre kiszabott feltételek mellett.

Az alapkérdés

- Legyen $c\colon \operatorname{dom}(c) \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ egy adott n-változós valós függvény ($n \in \mathbb{N}$), melyet **célfüggvénynek** nevezünk.
- A $\operatorname{dom}(c)$ értelmezési tartomány egy általános elemére az $x = (x_1, \ldots, x_n)^\mathsf{T}$ jelölést használjuk. FIGYELEM! Az előadás során mindvégig oszlopvektorokkal dolgozunk.
- Az optimalizálás alapfeladata a c célfüggvény minimalizálása, előre kiszabott feltételek mellett. Erre a továbbiakban az alábbi rövidített írásmódot használjuk:

Minimalizáljuk	$c(x)$-et
feltéve, hogy	$x \in \mathcal{F}$,

Az alapkérdés

- Legyen $c\colon \mathrm{dom}\,(c) \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ egy adott n-változós valós függvény ($n \in \mathbb{N}$), melyet **célfüggvénynek** nevezünk.
- A $\mathrm{dom}\,(c)$ értelmezési tartomány egy általános elemére az $x = (x_1, \ldots, x_n)^\mathsf{T}$ jelölést használjuk. FIGYELEM! Az előadás során mindvégig oszlopvektorokkal dolgozunk.
- Az optimalizálás alapfeladata a c célfüggvény minimalizálása, előre kiszabott feltételek mellett. Erre a továbbiakban az alábbi rövidített írásmódot használjuk:

$$\boxed{\begin{array}{ll} \text{Minimalizáljuk} & c(x)\text{-et} \\ \text{feltéve, hogy} & x \in \mathcal{F}, \end{array}}$$

ahol $x \in \mathrm{dom}\,(c)$ és $\mathcal{F} \subseteq \mathbb{R}^n$ a feltételek által meghatározott tartomány.

Feltételek

Feltételek

- A kikötések eltérő eredetűek lehetnek: formalizálhatnak matematikai feltételeket vagy származhatnak fizikai, gazdasági kényszerekből

Feltételek

- A kikötések eltérő eredetűek lehetnek: formalizálhatnak matematikai feltételeket vagy származhatnak fizikai, gazdasági kényszerekből
- A feltételek előírására is többféle lehetőség létezik. Itt kettő megadási módot említünk:

Feltételek

- A kikötések eltérő eredetűek lehetnek: formalizálhatnak matematikai feltételeket vagy származhatnak fizikai, gazdasági kényszerekből
- A feltételek előírására is többféle lehetőség létezik. Itt kettő megadási módot említünk:
- **Implicit feltételek.** Adott $x \in \mathbb{R}^n$ elemről egy algoritmus/orákulum/szubrutin eldönti, hogy teljesíti-e a feltételeket:

$$x \Rightarrow \boxed{\text{ ALGORITMUS }} \Rightarrow \text{jó/rossz } (\in \mathcal{F} / \notin \mathcal{F})$$

Feltételek

- A kikötések eltérő eredetűek lehetnek: formalizálhatnak matematikai feltételeket vagy származhatnak fizikai, gazdasági kényszerekből
- A feltételek előírására is többféle lehetőség létezik. Itt kettő megadási módot említünk:
- **Implicit feltételek.** Adott $x \in \mathbb{R}^n$ elemről egy algoritmus/orákulum/szubrutin eldönti, hogy teljesíti-e a feltételeket:

$$x \Rightarrow \boxed{\text{ ALGORITMUS }} \Rightarrow \text{jó/rossz } (\in \mathcal{F} / \notin \mathcal{F})$$

- **Explicit feltételek.** Véges sok egyenlet és/vagy egyenlőtlenség írja le a feltételt:

$$\begin{cases} f_i(x) \leq 0, & i \in [k] := \{1, 2, \ldots, k\}, \\ g_j(x) = 0, & j \in [\ell], \end{cases} \tag{1.1}$$

ahol tehát f_i ($i \in [k]$) és g_j ($j \in [\ell]$) szintén n-változós valós függvények. Ekkor $\mathcal{F}$ a fenti rendszer megoldáshalmaza.

Értelmezési tartomány, Lehetséges megoldások

Értelmezési tartomány, Lehetséges megoldások

- Az **optimalizálási feladat értelmezési tartománya** a célfüggvény és a feltételek értelmezési tartományának metszete. Ez az (1.1) explicit feltételek esetén a

$$\mathcal{D} := \mathrm{dom}\,(c) \cap \left(\bigcap_{i=1}^{k} \mathrm{dom}\,(f_i) \right) \cap \left(\bigcap_{j=1}^{\ell} \mathrm{dom}\,(g_j) \right)$$

halmaz, amely tehát azon x-eket tartalmazza, amelyekre mind a célfüggvény, mind pedig a feltételek értelmezettek.

Értelmezési tartomány, Lehetséges megoldások

• Az **optimalizálási feladat értelmezési tartománya** a célfüggvény és a feltételek értelmezési tartományának metszete. Ez az (1.1) explicit feltételek esetén a

$$\mathcal{D} := \operatorname{dom}(c) \cap \left(\bigcap_{i=1}^{k} \operatorname{dom}(f_i) \right) \cap \left(\bigcap_{j=1}^{\ell} \operatorname{dom}(g_j) \right)$$

halmaz, amely tehát azon x-eket tartalmazza, amelyekre mind a célfüggvény, mind pedig a feltételek értelmezettek.

• **Lehetséges/megengedett megoldásoknak** azon $x \in \mathcal{D}$ vektorokat nevezzük, amelyek eleget tesznek a kritériumoknak is, azaz $x \in \mathcal{F}$. Ezen x-ek halmazát $\mathcal{L}$ jelöli. Tehát

$$\mathcal{L} := \mathcal{D} \cap \mathcal{F},$$

amely (1.1) explicit feltételek esetén

$$\mathcal{L} = \{x \in \mathcal{D} : f_i(x) \leq 0,\ g_j(x) = 0,\ i \in [k], j \in [\ell]\}.$$

Optimális érték, optimális hely

Optimális érték, optimális hely

- A feladathoz tartozó **optimális érték**

$$p^* = \inf_{x \in \mathcal{L}} c(x) \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\} \cup \{\infty\},$$

ahol az infimum ∞, ha a lehetséges megoldások halmaza üres és $-\infty$, ha a c célfüggvény a lehetséges megoldásokon tetszőlegesen kicsi értéket is felvesz.

Optimális érték, optimális hely

- A feladathoz tartozó **optimális érték**

$$p^* = \inf_{x \in \mathcal{L}} c(x) \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\} \cup \{\infty\},$$

ahol az infimum ∞, ha a lehetséges megoldások halmaza üres és $-\infty$, ha a c célfüggvény a lehetséges megoldásokon tetszőlegesen kicsi értéket is felvesz.

- Egy $x^* \in \mathcal{L}$ vektor **optimális hely**, ha ott a célfüggvény felveszi az optimális értéket

$$c(x^*) = p^*.$$

Optimális érték, optimális hely

• A feladathoz tartozó **optimális érték**

$$p^* = \inf_{x \in \mathcal{L}} c(x) \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\} \cup \{\infty\},$$

ahol az infimum ∞, ha a lehetséges megoldások halmaza üres és $-\infty$, ha a c célfüggvény a lehetséges megoldásokon tetszőlegesen kicsi értéket is felvesz.

• Egy $x^* \in \mathcal{L}$ vektor **optimális hely**, ha ott a célfüggvény felveszi az optimális értéket

$$c(x^*) = p^*.$$

• Az x_ℓ vektor **lokális optimum**, ha annak egy környezetének minden pontjában c legalább akkora, mint az x_ℓ helyen:

$$\exists\, \varepsilon > 0,\ \forall\, x : \|x - x_\ell\|_2 < \varepsilon \quad \text{esetén} \quad c(x_\ell) \le c(x),$$

ahol $\|\ \|_2$ az $\mathbb{R}^n$-en értelmezett euklidészi norma, $\|\ \|_2 \colon \mathbb{R}^n \to [0, \infty)$, $y \mapsto \|y\|_2 := \sqrt{y_1^2 + \cdots + y_n^2}$.

Közelítő megoldások

Közelítő megoldások

- Azt mondjuk, hogy x_0 egy **ε-közelítő megoldás** ($\varepsilon > 0$), ha

$$c(x_0) \leq p^* + \varepsilon.$$

Közelítő megoldások

- Azt mondjuk, hogy x_0 egy **ε-közelítő megoldás** ($\varepsilon > 0$), ha

$$c(x_0) \leq p^* + \varepsilon.$$

- Egy x_0 vektor **ε-approximációs megoldás** ($\varepsilon > 0$), ha

$$(0 < p^* \leq) c(x_0) \leq (1 + \varepsilon) p^*.$$

Közelítő megoldások

- Azt mondjuk, hogy x_0 egy **ε-közelítő megoldás** ($\varepsilon > 0$), ha

$$c(x_0) \leq p^* + \varepsilon.$$

- Egy x_0 vektor **ε-approximációs megoldás** ($\varepsilon > 0$), ha

$$(0 < p^* \leq) c(x_0) \leq (1 + \varepsilon) p^*.$$

- Az ε-approximációs megoldás fenti definíciójába beleértjük, hogy az optimális érték pozitív, $p^* > 0$. A negatív optimális értékű feladatokban az $c(x_0) \leq (1 - \varepsilon) p^*$ feltételt kell tennünk.

Példa I

Példa I

Minimalizáljuk	$\frac{1}{x}$-et
feltéve, hogy	$x \geq 0.$

Példa I

Minimalizáljuk	$\frac{1}{x}$-et
feltéve, hogy	$x \geq 0.$

• A célfüggvény a $c(x) = x^{-1}$ lineáris törtfüggvény, melynek értelmezési tartománya dom $(c) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Példa I

Minimalizáljuk	$\dfrac{1}{x}$-et
feltéve, hogy	$x \geq 0.$

- A célfüggvény a $c(x) = x^{-1}$ lineáris törtfüggvény, melynek értelmezési tartománya dom $(c) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Az explicit feltételt egyetlen egyenlőtlenség adja, nevezetesen $f_1(x) = -x \leq 0$, ezért $k = 1$, $\ell = 0$.

Példa I

Minimalizáljuk	$\frac{1}{x}$-et
feltéve, hogy	$x \geq 0.$

• A célfüggvény a $c(x) = x^{-1}$ lineáris törtfüggvény, melynek értelmezési tartománya $\text{dom}\,(c) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Az explicit feltételt egyetlen egyenlőtlenség adja, nevezetesen $f_1(x) = -x \leq 0$, ezért $k = 1$, $\ell = 0$. Mivel $\text{dom}\,(f_1) = \mathbb{R}$, így a feladat értelmezési tartománya

$$\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Példa I

Minimalizáljuk	$\dfrac{1}{x}$-et
feltéve, hogy	$x \geq 0.$

• A célfüggvény a $c(x) = x^{-1}$ lineáris törtfüggvény, melynek értelmezési tartománya dom $(c) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Az explicit feltételt egyetlen egyenlőtlenség adja, nevezetesen $f_1(x) = -x \leq 0$, ezért $k = 1$, $\ell = 0$. Mivel dom $(f_1) = \mathbb{R}$, így a feladat értelmezési tartománya

$$\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Ebből látható, hogy a lehetséges megoldások halmaza az

$$\mathcal{L} = \mathbb{R}_{>0} := (0, \infty) =]0.\infty[$$

nyílt intervallum.

Példa I (folytatás)

Példa I (folytatás)

- Mivel az $x \in \mathcal{L}$ megengedett megoldásokon felvett függvényértékek infimuma zéró, ezért

$$p^* = 0.$$

Példa I (folytatás)

- Mivel az $x \in \mathcal{L}$ megengedett megoldásokon felvett függvényértékek infimuma zéró, ezért

$$p^* = 0.$$

- Azonban nem létezik olyan $x \in \mathcal{L}$, amelyen c felveszi ezt az értéket, tehát optimális hely nincs.

Példa I (folytatás)

- Mivel az $x \in \mathcal{L}$ megengedett megoldásokon felvett függvényértékek infimuma zéró, ezért

$$p^* = 0.$$

- Azonban nem létezik olyan $x \in \mathcal{L}$, amelyen c felveszi ezt az értéket, tehát optimális hely nincs.
- Megjegyezzük, hogy bármely $\varepsilon > 0$ esetén az $x_0 \geq \varepsilon^{-1}$ számok ε-közelítő megoldások.

Példa I (folytatás)

- Mivel az $x \in \mathcal{L}$ megengedett megoldásokon felvett függvényértékek infimuma zéró, ezért

$$p^* = 0.$$

- Azonban nem létezik olyan $x \in \mathcal{L}$, amelyen c felveszi ezt az értéket, tehát optimális hely nincs.
- Megjegyezzük, hogy bármely $\varepsilon > 0$ esetén az $x_0 \geq \varepsilon^{-1}$ számok ε-közelítő megoldások.
- Viszont ε-approximáló megoldások nem léteznek.

Példa II

Példa II

$$\boxed{\text{Minimalizáljuk} \qquad x \log x\text{-et}}$$

Példa II

$$\boxed{\text{Minimalizáljuk} \qquad x \log x\text{-et}}$$

- Most nincsenek feltételek kiszabva, azaz $\mathcal{F} = \mathbb{R}$.

Példa II

$$\boxed{\text{Minimalizáljuk} \qquad x \log x\text{-et}}$$

- Most nincsenek feltételek kiszabva, azaz $\mathcal{F} = \mathbb{R}$.
- Ilyenkor azt mondjuk, hogy egy *globális optimalizálási problémát* tekintünk.

Példa II

$$\boxed{\text{Minimalizáljuk} \qquad x \log x\text{-et}}$$

- Most nincsenek feltételek kiszabva, azaz $\mathcal{F} = \mathbb{R}$.
- Ilyenkor azt mondjuk, hogy egy *globális optimalizálási problémát* tekintünk.
- A célfüggvény differenciálható értelmezési tartományán. Az optimalizálás a kalkulus kurzus standard része:

Példa II

$$\boxed{\text{Minimalizáljuk} \qquad x \log x\text{-et}}$$

- Most nincsenek feltételek kiszabva, azaz $\mathcal{F} = \mathbb{R}$.
- Ilyenkor azt mondjuk, hogy egy *globális optimalizálási problémát* tekintünk.
- A célfüggvény differenciálható értelmezési tartományán. Az optimalizálás a kalkulus kurzus standard része: A $c(x) = x \log x$ egyváltozós célfüggvény értelmezési tartománya $\mathrm{dom}\,(c) = \mathbb{R}_{>0}$.

Példa II

$$\boxed{\text{Minimalizáljuk} \qquad x \log x\text{-et}}$$

- Most nincsenek feltételek kiszabva, azaz $\mathcal{F} = \mathbb{R}$.
- Ilyenkor azt mondjuk, hogy egy *globális optimalizálási problémát* tekintünk.
- A célfüggvény differenciálható értelmezési tartományán. Az optimalizálás a kalkulus kurzus standard része: A $c(x) = x \log x$ egyváltozós célfüggvény értelmezési tartománya dom $(c) = \mathbb{R}_{>0}$. Mivel feltétel nincs, ezért

$$\mathcal{L} = \mathcal{D} \cap \mathcal{F} = \mathcal{D} = \text{dom } (c) = \mathbb{R}_{>0}.$$

Az optimális értéket például elemi függvénydiszkussziót elvégezve állapíthatjuk meg.

Példa II

$$\boxed{\text{Minimalizáljuk} \qquad x \log x\text{-et}}$$

- Most nincsenek feltételek kiszabva, azaz $\mathcal{F} = \mathbb{R}$.
- Ilyenkor azt mondjuk, hogy egy *globális optimalizálási problémát* tekintünk.
- A célfüggvény differenciálható értelmezési tartományán. Az optimalizálás a kalkulus kurzus standard része: A $c(x) = x \log x$ egyváltozós célfüggvény értelmezési tartománya dom $(c) = \mathbb{R}_{>0}$. Mivel feltétel nincs, ezért

$$\mathcal{L} = \mathcal{D} \cap \mathcal{F} = \mathcal{D} = \text{dom } (c) = \mathbb{R}_{>0}.$$

Az optimális értéket például elemi függvénydiszkussziót elvégezve állapíthatjuk meg.

- Eredményül kapjuk, hogy

$$p^* = -\frac{1}{e}, \qquad x^* = \frac{1}{e}.$$

Alakítsuk át optimalizáslási problémánkat

Alakítsuk át optimalizáslási problémánkat

- Egy megértett optimalizálási probléma esetén több lehetőség van annak formalizálására.

Alakítsuk át optimalizáslási problémánkat

- Egy megértett optimalizálási probléma esetén több lehetőség van annak formalizálására.
- Másképpen fogalmazva egy formalizált optimalizálási probléma gyakran átfogalmazható úgy, hogy ugyanazt a problémát írja le.

Alakítsuk át optimalizáslási problémánkat

- Egy megértett optimalizálási probléma esetén több lehetőség van annak formalizálására.
- Másképpen fogalmazva egy formalizált optimalizálási probléma gyakran átfogalmazható úgy, hogy ugyanazt a problémát írja le.
- Ezek az átírások az eredetivel ekvivalens problémához vezethetnek.

Alakítsuk át optimalizáslási problémánkat

- Egy megértett optimalizálási probléma esetén több lehetőség van annak formalizálására.
- Másképpen fogalmazva egy formalizált optimalizálási probléma gyakran átfogalmazható úgy, hogy ugyanazt a problémát írja le.
- Ezek az átírások az eredetivel ekvivalens problémához vezethetnek. Azonban ugyaznazon probléma kissé eltérő alakjai közt lényeges különbség lehet.

Alakítsuk át optimalizáslási problémánkat

- Egy megértett optimalizálási probléma esetén több lehetőség van annak formalizálására.

- Másképpen fogalmazva egy formalizált optimalizálási probléma gyakran átfogalmazható úgy, hogy ugyanazt a problémát írja le.

- Ezek az átírások az eredetivel ekvivalens problémához vezethetnek. Azonban ugyaznazon probléma kissé eltérő alakjai közt lényeges különbség lehet.

- Ekvivalens átalakítás alatt olyan formális átlalakítást értünk, hogy bármelyik feladat optimális értéke/helye a másik feladat optimális értéke/helye alapján könnyen megadható.

Alakítsuk át optimalizáslási problémánkat

- Egy megértett optimalizálási probléma esetén több lehetőség van annak formalizálására.
- Másképpen fogalmazva egy formalizált optimalizálási probléma gyakran átfogalmazható úgy, hogy ugyanazt a problémát írja le.
- Ezek az átírások az eredetivel ekvivalens problémához vezethetnek. Azonban ugyaznazon probléma kissé eltérő alakjai közt lényeges különbség lehet.
- Ekvivalens átalakítás alatt olyan formális átlalakítást értünk, hogy bármelyik feladat optimális értéke/helye a másik feladat optimális értéke/helye alapján könnyen megadható.
- Most (a teljesség igénye nélkül) néhány lehetőségét megemlítünk.

Átalakítások: Min/max csere

Átalakítások: Min/max csere

$$\boxed{\begin{array}{ll} \text{Maximalizáljuk} & c(x)\text{-et} \\ \text{feltéve, hogy} & x \in \mathcal{F} \end{array}} \equiv$$

$$\boxed{\begin{array}{ll} \text{Minimalizáljuk} & -c(x)\text{-et} \\ \text{feltéve, hogy} & x \in \mathcal{F} \end{array}}$$

Átalakítások: Min/max csere

Maximalizáljuk	$c(x)$-et
feltéve, hogy	$x \in \mathcal{F}$

$$\equiv$$

Minimalizáljuk	$-c(x)$-et
feltéve, hogy	$x \in \mathcal{F}$

• A minimalizálási probléma egy optimális pontja egyben a maximalizálási problémának is optimális pontja.

Átalakítások: Min/max csere

Maximalizáljuk	$c(x)$-et
feltéve, hogy	$x \in \mathcal{F}$

$$\equiv$$

Minimalizáljuk	$-c(x)$-et
feltéve, hogy	$x \in \mathcal{F}$

- A minimalizálási probléma egy optimális pontja egyben a maximalizálási problémának is optimális pontja.
- Ha a mimimalizálási probléma optimális értékét ismerjük, akkor annak ellentettje lesz a maximalizálási probléma optimális értéke.

Átalakítások: A feltételek ekvivalens átírása

Átalakítások: A feltételek ekvivalens átírása

- A középiskolában már láttunk formulák/egyenlőtlenségek/egyenlőségek ekvivalens átalakításait.

Átalakítások: A feltételek ekvivalens átírása

- A középiskolában már láttunk formulák/egyenlőtlenségek/egyenlőségek ekvivalens átalakításait.
- A feltételeinknél ezeket természetesen felhasználhatjuk.

Átalakítások: A feltételek ekvivalens átírása

- A középiskolában már láttunk formulák/egyenlőtlenségek/egyenlőségek ekvivalens átalakításait.
- A feltételeinknél ezeket természetesen felhasználhatjuk.

$$\frac{x_1}{x_2^2+1} \leq 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x_1 \leq 0.$$

Átalakítások: A feltételek ekvivalens átírása

- A középiskolában már láttunk formulák/egyenlőtlenségek/egyenlőségek ekvivalens átalakításait.
- A feltételeinknél ezeket természetesen felhasználhatjuk.

$$\frac{x_1}{x_2^2+1} \leq 0 \iff x_1 \leq 0.$$

$$(x_1+x_2)^2 \leq 0 \iff (x_1+x_2)^2 = 0 \iff x_1+x_2 = 0.$$

Átalakítások: egyenlőtlenségek helyettesítése előjelfeltételekkel:

Átalakítások: egyenlőtlenségek helyettesítése előjelfeltételekkel:

Minimalizáljuk	$c(x)$-et
feltéve, hogy	$f_i(x) \leq 0$
	$g_i(x) = 0$

$\equiv$

Minimalizáljuk	$c(x)$-et
feltéve, hogy	$f_i(x) + s_i = 0$
	$g_i(x) = 0$
	$s_i \geq 0$

Átalakítások: egyenlőtlenségek helyettesítése előjelfeltételekkel:

Minimalizáljuk	$c(x)$-et
feltéve, hogy	$f_i(x) \leq 0$
	$g_i(x) = 0$

$\equiv$

Minimalizáljuk	$c(x)$-et
feltéve, hogy	$f_i(x) + s_i = 0$
	$g_i(x) = 0$
	$s_i \geq 0$

- A bevezetett s_i változók neve „slack változók”.

Átalakítások: A lineáris egyenlőségek kiküszöbölése

Átalakítások: A lineáris egyenlőségek kiküszöbölése

- Az $Ax = b$ lineáris egyenlőségrendszer megoldása alap algebra tananyag.

Átalakítások: A lineáris egyenlőségek kiküszöbölése

- Az $Ax = b$ lineáris egyenlőségrendszer megoldása alap algebra tananyag. Az általános megoldás $x = x_0 + Fy$ alakban írható, ahol x_0 egy tetszőleges megoldás, míg F oszlopai az $Ax = 0$ egyenletrendszer által leírt lineáris altér egy generáló rendszere. Ha F-nek s oszlopa van, akkor $y \in \mathbb{R}^s$.

Átalakítások: A lineáris egyenlőségek kiküszöbölése

- Az $Ax = b$ lineáris egyenlőségrendszer megoldása alap algebra tananyag. Az általános megoldás $x = x_0 + Fy$ alakban írható, ahol x_0 egy tetszőleges megoldás, míg F oszlopai az $Ax = 0$ egyenletrendszer által leírt lineáris altér egy generáló rendszere. Ha F-nek s oszlopa van, akkor $y \in \mathbb{R}^s$.
- x_0 és F meghatározása hatékonyan megtehető.

Átalakítások: A lineáris egyenlőségek kiküszöbölése

- Az $Ax = b$ lineáris egyenlőségrendszer megoldása alap algebra tananyag. Az általános megoldás $x = x_0 + Fy$ alakban írható, ahol x_0 egy tetszőleges megoldás, míg F oszlopai az $Ax = 0$ egyenletrendszer által leírt lineáris altér egy generáló rendszere. Ha F-nek s oszlopa van, akkor $y \in \mathbb{R}^s$.
- x_0 és F meghatározása hatékonyan megtehető.

Minimalizáljuk	$c(x)$-et
feltéve, hogy	$f_i(x) \leq 0$
	$Ax = b$

$\equiv$

Minimalizáljuk	$c(x_0 + Fy)$-et
feltéve, hogy	$f_i(x_0 + Fy) \leq 0$

Átalakítások: A célfüggvény helyettesítése egy monoton függvénybe

Átalakítások: A célfüggvény helyettesítése egy monoton függvénybe

- Legyen $m : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ egy szigorúan monoton függvény range c-n (a célfüggvény által felvett értékek halmazán).

Átalakítások: A célfüggvény helyettesítése egy monoton függvénybe

- Legyen $m : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ egy szigorúan monoton függvény range c-n (a célfüggvény által felvett értékek halmazán).
- Ekkor

$$\boxed{\begin{array}{ll} \text{Minimalizáljuk} & c(x)\text{-et} \\ \text{feltéve, hogy} & x \in \mathcal{F} \end{array}} \quad \equiv$$

$$\boxed{\begin{array}{ll} \text{Minimalizáljuk} & m(c(x))\text{-et} \\ \text{feltéve, hogy} & x \in \mathcal{F} \end{array}}$$

Átalakítások: A célfüggvény helyettesítése egy monoton függvénybe: Példa

Átalakítások: A célfüggvény helyettesítése egy monoton függvénybe: Példa

Példa

Minimalizáljuk	$\|x\|_2$-et
feltéve, hogy	$x \in \mathcal{F}$

$\equiv$

Minimalizáljuk	$\|x\|_2^2$-et
feltéve, hogy	$x \in \mathcal{F}$

Átalakítások: A célfüggvény helyettesítése egy monoton függvénybe: Példa

Példa

$$\boxed{\begin{array}{ll} \text{Minimalizáljuk} & \|x\|_2\text{-et} \\ \text{feltéve, hogy} & x \in \mathcal{F} \end{array}} \equiv$$

$$\boxed{\begin{array}{ll} \text{Minimalizáljuk} & \|x\|_2^2\text{-et} \\ \text{feltéve, hogy} & x \in \mathcal{F} \end{array}}$$

- Fenti esetben range $c = \mathbb{R}_{\geq 0}$, ahol az $m(x) = x^2$ függvény monoton.

Átalakítások: A célfüggvény helyettesítése egy monoton függvénybe: Példa

Példa

Minimalizáljuk	$\|x\|_2$-et
feltéve, hogy	$x \in \mathcal{F}$

$\equiv$

Minimalizáljuk	$\|x\|_2^2$-et
feltéve, hogy	$x \in \mathcal{F}$

- Fenti esetben range $c = \mathbb{R}_{\geq 0}$, ahol az $m(x) = x^2$ függvény monoton.
- Minimális változtatást eszközöltünk, de az új célfüggvény differenciálható.

Átalakítások: A célfüggvény helyettesítése egy monoton függvénybe: Példa

Példa

Minimalizáljuk	$\|x\|_2$-et
feltéve, hogy	$x \in \mathcal{F}$

$\equiv$

Minimalizáljuk	$\|x\|_2^2$-et
feltéve, hogy	$x \in \mathcal{F}$

- Fenti esetben range $c = \mathbb{R}_{\geq 0}$, ahol az $m(x) = x^2$ függvény monoton.

- Minimális változtatást eszközöltünk, de az új célfüggvény differenciálható. Látni fogjuk, hogy egy ilyen „kis” előny nagyon jelentős lehet.

Átalakítások: A célfüggvény helyettesítése egy monoton függvénybe: Egy összetettebb példa

Átalakítások: A célfüggvény helyettesítése egy monoton függvénybe: Egy összetettebb példa

$$\boxed{\begin{array}{ll} \text{Maximalizáljuk} & x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1\text{-et.} \\ \text{feltéve, hogy} & x_1 + x_2 + x_3 = 100, \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0. \end{array}} \equiv$$

$$\boxed{\begin{array}{ll} \text{Minimalizáljuk} & \sqrt{\frac{x_1^2+x_2^2+x_3^2}{3}}\text{-et.} \\ \text{feltéve, hogy} & \frac{x_1+x_2+x_3}{3} = \frac{100}{3}, \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0. \end{array}}$$

Átalakítások: A célfüggvény helyettesítése egy monoton függvénybe: Egy összetettebb példa

$$\boxed{\begin{array}{ll} \text{Maximalizáljuk} & x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1\text{-et.} \\ \text{feltéve, hogy} & x_1 + x_2 + x_3 = 100, \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0. \end{array}} \equiv$$

$$\boxed{\begin{array}{ll} \text{Minimalizáljuk} & \sqrt{\frac{x_1^2+x_2^2+x_3^2}{3}}\text{-et.} \\ \text{feltéve, hogy} & \frac{x_1+x_2+x_3}{3} = \frac{100}{3}, \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0. \end{array}}$$

- A két feltételrendszer nyilván ekvivalens.

Átalakítások: A célfüggvény helyettesítése egy monoton függvénybe: Egy összetettebb példa (folytatás)

Átalakítások: A célfüggvény helyettesítése egy monoton függvénybe: Egy összetettebb példa (folytatás)

- A két célfüggvény: $c_1(x_1, x_2, x_3) = x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1$, illetve $c_2(x_1, x_2, x_3) = \sqrt{\frac{x_1^2+x_2^2+x_3^2}{3}}$.

Átalakítások: A célfüggvény helyettesítése egy monoton függvénybe: Egy összetettebb példa (folytatás)

- A két célfüggvény: $c_1(x_1, x_2, x_3) = x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1$, illetve $c_2(x_1, x_2, x_3) = \sqrt{\frac{x_1^2+x_2^2+x_3^2}{3}}$.
- A kapcsolat nyilvánvaló (a feltételek teljesülése esetén):

$$3c_2^2 + 2c_1 = (x_1 + x_2 + x_3)^2 = 100^2.$$

Átalakítások: A célfüggvény helyettesítése egy monoton függvénybe: Egy összetettebb példa (folytatás)

- A két célfüggvény: $c_1(x_1, x_2, x_3) = x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1$, illetve $c_2(x_1, x_2, x_3) = \sqrt{\frac{x_1^2+x_2^2+x_3^2}{3}}$.
- A kapcsolat nyilvánvaló (a feltételek teljesülése esetén):

$$3c_2^2 + 2c_1 = (x_1 + x_2 + x_3)^2 = 100^2.$$

- c_1 maximalizálása helyett áttérhetünk $100^2 - 2c_1 = 3c_2^2$ minimalizálására.

Átalakítások: A célfüggvény helyettesítése egy monoton függvénybe: Egy összetettebb példa (folytatás)

- A két célfüggvény: $c_1(x_1, x_2, x_3) = x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1$, illetve $c_2(x_1, x_2, x_3) = \sqrt{\frac{x_1^2+x_2^2+x_3^2}{3}}$.
- A kapcsolat nyilvánvaló (a feltételek teljesülése esetén):

$$3c_2^2 + 2c_1 = (x_1 + x_2 + x_3)^2 = 100^2.$$

- c_1 maximalizálása helyett áttérhetünk $100^2 - 2c_1 = 3c_2^2$ minimalizálására. Majd itt alkalmazhatjuk az $m(x) = \sqrt{\frac{x}{3}}$ szigorúan monoton függvényt (az új célfüggvény által felvett nemnegatív értékek halmazán) az aktuális célfüggvényre.

Átalakítások: A célfüggvény helyettesítése egy monoton függvénybe: Egy összetettebb példa (folytatás)

- A két célfüggvény: $c_1(x_1, x_2, x_3) = x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1$, illetve $c_2(x_1, x_2, x_3) = \sqrt{\frac{x_1^2+x_2^2+x_3^2}{3}}$.
- A kapcsolat nyilvánvaló (a feltételek teljesülése esetén):

$$3c_2^2 + 2c_1 = (x_1 + x_2 + x_3)^2 = 100^2.$$

- c_1 maximalizálása helyett áttérhetünk $100^2 - 2c_1 = 3c_2^2$ minimalizálására. Majd itt alkalmazhatjuk az $m(x) = \sqrt{\frac{x}{3}}$ szigorúan monoton függvényt (az új célfüggvény által felvett nemnegatív értékek halmazán) az aktuális célfüggvényre. Így a fenti második alakot kapjuk.

Átalakítások: A célfüggvény helyettesítése egy monoton függvénybe: Egy összetettebb példa (folytatás)

- A két célfüggvény: $c_1(x_1, x_2, x_3) = x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1$, illetve $c_2(x_1, x_2, x_3) = \sqrt{\frac{x_1^2+x_2^2+x_3^2}{3}}$.
- A kapcsolat nyilvánvaló (a feltételek teljesülése esetén):

$$3c_2^2 + 2c_1 = (x_1 + x_2 + x_3)^2 = 100^2.$$

- c_1 maximalizálása helyett áttérhetünk $100^2 - 2c_1 = 3c_2^2$ minimalizálására. Majd itt alkalmazhatjuk az $m(x) = \sqrt{\frac{x}{3}}$ szigorúan monoton függvényt (az új célfüggvény által felvett nemnegatív értékek halmazán) az aktuális célfüggvényre. Így a fenti második alakot kapjuk.
- Az új alak előnye nyilvánvaló.

Átalakítások: A célfüggvény helyettesítése egy monoton függvénybe: Egy összetettebb példa (folytatás)

- A két célfüggvény: $c_1(x_1, x_2, x_3) = x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1$, illetve $c_2(x_1, x_2, x_3) = \sqrt{\frac{x_1^2+x_2^2+x_3^2}{3}}$.
- A kapcsolat nyilvánvaló (a feltételek teljesülése esetén):

$$3c_2^2 + 2c_1 = (x_1 + x_2 + x_3)^2 = 100^2.$$

- c_1 maximalizálása helyett áttérhetünk $100^2 - 2c_1 = 3c_2^2$ minimalizálására. Majd itt alkalmazhatjuk az $m(x) = \sqrt{\frac{x}{3}}$ szigorúan monoton függvényt (az új célfüggvény által felvett nemnegatív értékek halmazán) az aktuális célfüggvényre. Így a fenti második alakot kapjuk.
- Az új alak előnye nyilvánvaló. A négyzetes közepet kell minimalizálni adott számtani közép érték esetén.

Átalakítások: A célfüggvény helyettesítése egy monoton függvénybe: Egy összetettebb példa (folytatás)

- A két célfüggvény: $c_1(x_1, x_2, x_3) = x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1$, illetve $c_2(x_1, x_2, x_3) = \sqrt{\frac{x_1^2+x_2^2+x_3^2}{3}}$.
- A kapcsolat nyilvánvaló (a feltételek teljesülése esetén):

$$3c_2^2 + 2c_1 = (x_1 + x_2 + x_3)^2 = 100^2.$$

- c_1 maximalizálása helyett áttérhetünk $100^2 - 2c_1 = 3c_2^2$ minimalizálására. Majd itt alkalmazhatjuk az $m(x) = \sqrt{\frac{x}{3}}$ szigorúan monoton függvényt (az új célfüggvény által felvett nemnegatív értékek halmazán) az aktuális célfüggvényre. Így a fenti második alakot kapjuk.
- Az új alak előnye nyilvánvaló. A négyzetes közepet kell minimalizálni adott számtani közép érték esetén. A számtani és négyzetes közép közötti egyenlőtlenség alapján elemi matematikával megválaszolható az optimalizálási kérdés.

Szünet

Szöveges példák vs az alapproblémánk

Szöveges példák vs az alapproblémánk

- Az előadássorozatban többször látni fogunk olyan feladatot, amely formalizálása okozza a legtöbb problémát.

Szöveges példák vs az alapproblémánk

- Az előadássorozatban többször látni fogunk olyan feladatot, amely formalizálása okozza a legtöbb problémát.
- A gyakorlatban nem formalizált problémákat kapunk.

Szöveges példák vs az alapproblémánk

- Az előadássorozatban többször látni fogunk olyan feladatot, amely formalizálása okozza a legtöbb problémát.
- A gyakorlatban nem formalizált problémákat kapunk. Beszélnünk kell az alkalmazóval.

Szöveges példák vs az alapproblémánk

- Az előadássorozatban többször látni fogunk olyan feladatot, amely formalizálása okozza a legtöbb problémát.
- A gyakorlatban nem formalizált problémákat kapunk. Beszélnünk kell az alkalmazóval. Meg kell értenünk nyelvezetét, gondolkozását.

Szöveges példák vs az alapproblémánk

- Az előadássorozatban többször látni fogunk olyan feladatot, amely formalizálása okozza a legtöbb problémát.
- A gyakorlatban nem formalizált problémákat kapunk. Beszélnünk kell az alkalmazóval. Meg kell értenünk nyelvezetét, gondolkozását. Eseteg tanulnunk kell fizikát, kémiát, biológiát ahhoz hogy egyenlőségeket, egyenlőtlenségeket lássunk magunk előtt.

Szöveges példák vs az alapproblémánk

- Az előadássorozatban többször látni fogunk olyan feladatot, amely formalizálása okozza a legtöbb problémát.
- A gyakorlatban nem formalizált problémákat kapunk. Beszélnünk kell az alkalmazóval. Meg kell értenünk nyelvezetét, gondolkozását. Eseteg tanulnunk kell fizikát, kémiát, biológiát ahhoz hogy egyenlőségeket, egyenlőtlenségeket lássunk magunk előtt.
- Gyakran a formális leíráshoz szükségesek a matematikai ötletek.

Szöveges példák vs az alapproblémánk

- Az előadássorozatban többször látni fogunk olyan feladatot, amely formalizálása okozza a legtöbb problémát.
- A gyakorlatban nem formalizált problémákat kapunk. Beszélnünk kell az alkalmazóval. Meg kell értenünk nyelvezetét, gondolkozását. Eseteg tanulnunk kell fizikát, kémiát, biológiát ahhoz hogy egyenlőségeket, egyenlőtlenségeket lássunk magunk előtt.
- Gyakran a formális leíráshoz szükségesek a matematikai ötletek.
- Gyakran egy jó, szerencsés formalizálás után az optimalizálási algoritmus már készen vár.

Szöveges példák vs az alapproblémánk

- Az előadássorozatban többször látni fogunk olyan feladatot, amely formalizálása okozza a legtöbb problémát.
- A gyakorlatban nem formalizált problémákat kapunk. Beszélnünk kell az alkalmazóval. Meg kell értenünk nyelvezetét, gondolkozását. Eseteg tanulnunk kell fizikát, kémiát, biológiát ahhoz hogy egyenlőségeket, egyenlőtlenségeket lássunk magunk előtt.
- Gyakran a formális leíráshoz szükségesek a matematikai ötletek.
- Gyakran egy jó, szerencsés formalizálás után az optimalizálási algoritmus már készen vár.
- Az alábbiakban néhány bevezető példát mutatunk az alapfogalmakra, illetve elemi formalizálási trükkökre.

Példa I

Példa I

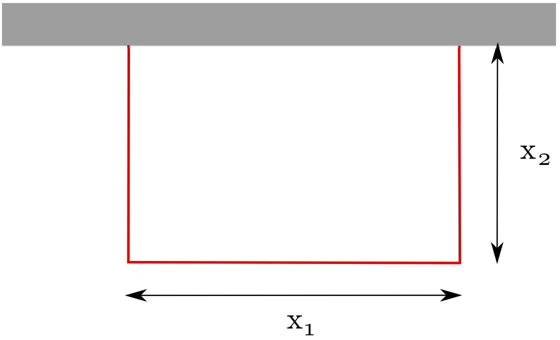
Példa

Tegyük fel, hogy a lehető legnagyobb téglalap alakú tartományt szeretnék bekeríteni 100 m hosszú kerítéssel úgy, hogy a terület egyik oldalát egy fal képezi.

Példa I

Példa

Tegyük fel, hogy a lehető legnagyobb téglalap alakú tartományt szeretnék bekeríteni 100 m hosszú kerítéssel úgy, hogy a terület egyik oldalát egy fal képezi.



Példa I (folytatás)

Példa I (folytatás)

- Ez a probléma a következőképpen írható le optimalizálási feladatként:

Maximalizáljuk	$x_1 x_2$-t
feltéve, hogy	$x_1 + 2x_2 = 100,$
	$x_1, x_2 \geq 0.$

Példa I (folytatás)

- Ez a probléma a következőképpen írható le optimalizálási feladatként:

Maximalizáljuk	x_1x_2-t
feltéve, hogy	$x_1 + 2x_2 = 100,$
	$x_1, x_2 \geq 0.$

- Nyilvánvaló, hogy a $c(x_1, x_2) = x_1x_2$ célfüggvény az egész $\mathbb{R}^2$ síkon értelmezett és $f_1(x_1, x_2) = -x_1$, $f_2(x_1, x_2) = -x_2$, $g_1(x_1, x_2) = x_1 + 2x_2 - 100$, ezért $\mathcal{D} = \mathbb{R}^2$ és $\mathcal{L} = \mathbb{R}_{\geq 0} \times \mathbb{R}_{\geq 0}$.

Példa I (folytatás)

- Ez a probléma a következőképpen írható le optimalizálási feladatként:

Maximalizáljuk	x_1x_2-t
feltéve, hogy	$x_1 + 2x_2 = 100$,
	$x_1, x_2 \geq 0$.

- Nyilvánvaló, hogy a $c(x_1, x_2) = x_1x_2$ célfüggvény az egész $\mathbb{R}^2$ síkon értelmezett és
$f_1(x_1, x_2) = -x_1$, $f_2(x_1, x_2) = -x_2$, $g_1(x_1, x_2) = x_1 + 2x_2 - 100$, ezért $\mathcal{D} = \mathbb{R}^2$ és $\mathcal{L} = \mathbb{R}_{\geq 0} \times \mathbb{R}_{\geq 0}$.

- Alkalmazva a számtani és mértani közepek közötti egyenlőtlenséget és a feltételeket figyelembe véve adódik, hogy

$$50 = \frac{x_1 + 2x_2}{2} \geq \sqrt{x_1(2x_2)} \qquad (\geq 0).$$

Példa I (folytatás)

Példa I (folytatás)

- Ebből négyzetre emeléssel kapjuk, hogy

$$2500 \geq 2x_1x_2 = 2c(x_1, x_2),$$

vagyis a célfüggvény felülről korlátos: $c(x_1, x_2) \leq 1250$.

Példa I (folytatás)

- Ebből négyzetre emeléssel kapjuk, hogy

$$2500 \geq 2x_1x_2 = 2c(x_1, x_2),$$

vagyis a célfüggvény felülről korlátos: $c(x_1, x_2) \leq 1250$.

- Mivel $x^* = (50, 25) \in \mathcal{L}$ egy lehetséges megoldás, ahol c eléri ezt a korlátot, így $p^* = 1250$.

Példa I (folytatás)

- Ebből négyzetre emeléssel kapjuk, hogy

$$2500 \geq 2x_1x_2 = 2c(x_1, x_2),$$

vagyis a célfüggvény felülről korlátos: $c(x_1, x_2) \leq 1250$.

- Mivel $x^* = (50, 25) \in \mathcal{L}$ egy lehetséges megoldás, ahol c eléri ezt a korlátot, így $p^* = 1250$.

- A számtani és mértani közép közötti egyenlőtlenségben az egyenlőség esetének analízise jól is mert.

Példa I (folytatás)

- Ebből négyzetre emeléssel kapjuk, hogy

$$2500 \geq 2x_1x_2 = 2c(x_1, x_2),$$

vagyis a célfüggvény felülről korlátos: $c(x_1, x_2) \leq 1250$.

- Mivel $x^* = (50, 25) \in \mathcal{L}$ egy lehetséges megoldás, ahol c eléri ezt a korlátot, így $p^* = 1250$.

- A számtani és mértani közép közötti egyenlőtlenségben az egyenlőség esetének analízise jól is mert. Ez alapján $(50, 25)$ nem csak egy optimális hely. $(50, 25)$ az EGYETLEN optimális hely.

Példa II

Példa II

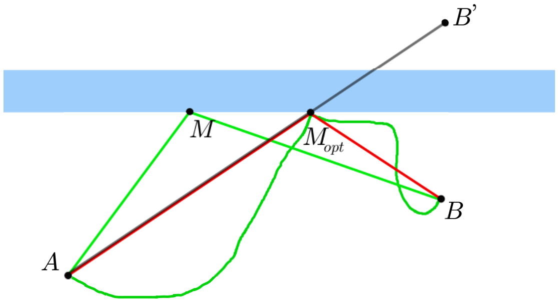
Példa

Tegyük fel, hogy egy lovas egy egyenesen haladó folyó egyik oldalán található A pontból az ugyanazon oldalon lévő B pontba szeretne eljutni, de közben a lovát is meg szeretné itatni. Melyik a legrövidebb ilyen út?

Példa II

Példa

Tegyük fel, hogy egy lovas egy egyenesen haladó folyó egyik oldalán található A pontból az ugyanazon oldalon lévő B pontba szeretne eljutni, de közben a lovát is meg szeretné itatni. Melyik a legrövidebb ilyen út?



Példa II: A megoldás

Példa II: A megoldás

- A feladattal már általános iskolában találkozhattunk geometria órán.

Példa II: A megoldás

- A feladattal már általános iskolában találkozhattunk geometria órán.
- Legyen t azon folyópart egyenese, amelyik oldalon lovasunk van.

Példa II: A megoldás

- A feladattal már általános iskolában találkozhattunk geometria órán.
- Legyen t azon folyópart egyenese, amelyik oldalon lovasunk van.
- Legyen M az itatás pontja.

Példa II: A megoldás

- A feladattal már általános iskolában találkozhattunk geometria órán.
- Legyen t azon folyópart egyenese, amelyik oldalon lovasunk van.
- Legyen M az itatás pontja. Tetszőleges lehetséges megoldás esetén a lovas pályájának AM szakaszát meghagyva, majd a későbbi szakaszt t-re tükrözve egy olyan pályát kapunk, ami A-ből, B'-be vezet (B' a B pont tükörképe t-re).

Példa II: A megoldás

- A feladattal már általános iskolában találkozhattunk geometria órán.
- Legyen t azon folyópart egyenese, amelyik oldalon lovasunk van.
- Legyen M az itatás pontja. Tetszőleges lehetséges megoldás esetén a lovas pályájának AM szakaszát meghagyva, majd a későbbi szakaszt t-re tükrözve egy olyan pályát kapunk, ami A-ból, B'-be vezet (B' a B pont tükörképe t-re). A módosított pálya hossza a tetszőlegesen választott lehetséges megoldás hossza/költsége.

Példa II: A megoldás

- A feladattal már általános iskolában találkozhattunk geometria órán.
- Legyen t azon folyópart egyenese, amelyik oldalon lovasunk van.
- Legyen M az itatás pontja. Tetszőleges lehetséges megoldás esetén a lovas pályájának AM szakaszát meghagyva, majd a későbbi szakaszt t-re tükrözve egy olyan pályát kapunk, ami A-ből, B'-be vezet (B' a B pont tükörképe t-re). A módosított pálya hossza a tetszőlegesen választott lehetséges megoldás hossza/költsége.
- A módosított pályák között nyilván az AB' szakasz bejárása az optimális. Azaz t és az AB' szakasz M metszéspontja az „optimális itató hely".

Példa II: A megoldás

- A feladattal már általános iskolában találkozhattunk geometria órán.
- Legyen t azon folyópart egyenese, amelyik oldalon lovasunk van.
- Legyen M az itatás pontja. Tetszőleges lehetséges megoldás esetén a lovas pályájának AM szakaszát meghagyva, majd a későbbi szakaszt t-re tükrözve egy olyan pályát kapunk, ami A-ből, B'-be vezet (B' a B pont tükörképe t-re). A módosított pálya hossza a tetszőlegesen választott lehetséges megoldás hossza/költsége.
- A módosított pályák között nyilván az AB' szakasz bejárása az optimális. Azaz t és az AB' szakasz M metszéspontja az „optimális itató hely".
- Ide A-ból egyenes úton érkezve, majd B-be ugyancsak egyenes mentén haladva lesz legrövidebb a pályája a feladatbeli lovasnak.

Példa II: A formalizálás

Példa II: A formalizálás

- A formalizált optimalizálási feladatot többféleképpen is felírhatjuk.

Példa II: A formalizálás

- A formalizált optimalizálási feladatot többféleképpen is felírhatjuk.
- Egy lehetőség, ha derékszögű koordinátákat vezetünk be (például a lovas felőli folyópart az x tengely).

Példa II: A formalizálás

- A formalizált optimalizálási feladatot többféleképpen is felírhatjuk.
- Egy lehetőség, ha derékszögű koordinátákat vezetünk be (például a lovas felőli folyópart az x tengely).
- Feladatunk azon $M(x^*, 0)$ pont keresése, amelyre az AM, MB szakaszok hosszának összege minimális.

Példa II: A formalizálás

- A formalizált optimalizálási feladatot többféleképpen is felírhatjuk.
- Egy lehetőség, ha derékszögű koordinátákat vezetünk be (például a lovas felőli folyópart az x tengely).
- Feladatunk azon $M(x^*, 0)$ pont keresése, amelyre az AM, MB szakaszok hosszának összege minimális.
- Hiszen nyilvánvaló, hogy ha A és M vagy M és B pontok között nem egyenes szakaszon mozog a lovas, akkor pályája nem optimális.

Példa II: A formalizálás

- A formalizált optimalizálási feladatot többféleképpen is felírhatjuk.
- Egy lehetőség, ha derékszögű koordinátákat vezetünk be (például a lovas felőli folyópart az x tengely).
- Feladatunk azon $M(x^*, 0)$ pont keresése, amelyre az AM, MB szakaszok hosszának összege minimális.
- Hiszen nyilvánvaló, hogy ha A és M vagy M és B pontok között nem egyenes szakaszon mozog a lovas, akkor pályája nem optimális.
- Tehát adott $A(a_1, a_2)$ és $B(b_1, b_2)$ esetén a feladat az alábbi módon fogalmazható meg:

$$\boxed{\text{Minimalizáljuk} \qquad \sqrt{(a_1 - x)^2 + a_2^2} + \sqrt{(b_1 - x)^2 + b_2^2}\text{-et.}}$$

Példa III

Példa III

Példa

Az $x_1 + x_2 + x_3 = 100$ egyenletű sík mely pontjának minimális az origótól mért távolsága?

Példa III

Példa

Az $x_1 + x_2 + x_3 = 100$ egyenletű sík mely pontjának minimális az origótól mért távolsága?

- Vegyük észre, hogy a távolság helyett írhatjuk távolság $\sqrt{\frac{1}{3}}$-szeresét is.

Példa III

Példa

Az $x_1 + x_2 + x_3 = 100$ egyenletű sík mely pontjának minimális az origótól mért távolsága?

- Vegyük észre, hogy a távolság helyett írhatjuk távolság $\sqrt{\frac{1}{3}}$-szeresét is.
- A formalizálás (egy korábbi példával megegyezően) lehet a következő:

Minimalizáljuk	$\sqrt{\frac{x_1^2+x_2^2+x_3^2}{3}}$-et
feltéve, hogy	$\frac{x_1+x_2+x_3}{3} = \frac{100}{3}$,
	$x_1, x_2, x_3 > 0$.

Példa III (folytatás)

Példa III (folytatás)

A számtani és a négyzetes közepek közötti egyenlőtlenséget használjuk fel az eredeti optimális érték becslésére:

$$\sqrt{\frac{1}{3}}c(x) = \sqrt{\frac{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}{3}} \geq \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3} = \frac{100}{3}.$$

Példa III (folytatás)

A számtani és a négyzetes közepek közötti egyenlőtlenséget használjuk fel az eredeti optimális érték becslésére:

$$\sqrt{\frac{1}{3}}c(x) = \sqrt{\frac{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}{3}} \geq \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3} = \frac{100}{3}.$$

- Azaz

$$p^* \geq \sqrt{3}\frac{100}{3}.$$

Példa III (folytatás)

A számtani és a négyzetes közepek közötti egyenlőtlenséget használjuk fel az eredeti optimális érték becslésére:

$$\sqrt{\frac{1}{3}}c(x) = \sqrt{\frac{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}{3}} \geq \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3} = \frac{100}{3}.$$

- Azaz

$$p^* \geq \sqrt{3}\frac{100}{3}.$$

- Továbbá a korlát elérhető, ha $x_1 = x_2 = x_3 = \frac{100}{3}$ (és csak ekkor).

Példa III (folytatás)

A számtani és a négyzetes közepek közötti egyenlőtlenséget használjuk fel az eredeti optimális érték becslésére:

$$\sqrt{\frac{1}{3}}c(x) = \sqrt{\frac{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}{3}} \geq \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3} = \frac{100}{3}.$$

- Azaz

$$p^* \geq \sqrt{3}\frac{100}{3}.$$

- Továbbá a korlát elérhető, ha $x_1 = x_2 = x_3 = \frac{100}{3}$ (és csak ekkor). Tehát a feladat egyetlen optimális helye

$$x^* = \left(\frac{100}{3}, \frac{100}{3}, \frac{100}{3}\right).$$

Példa III (folytatás)

A számtani és a négyzetes közepek közötti egyenlőtlenséget használjuk fel az eredeti optimális érték becslésére:

$$\sqrt{\frac{1}{3}}c(x) = \sqrt{\frac{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}{3}} \geq \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3} = \frac{100}{3}.$$

- Azaz

$$p^* \geq \sqrt{3}\frac{100}{3}.$$

- Továbbá a korlát elérhető, ha $x_1 = x_2 = x_3 = \frac{100}{3}$ (és csak ekkor). Tehát a feladat egyetlen optimális helye

$$x^* = \left(\frac{100}{3}, \frac{100}{3}, \frac{100}{3}\right).$$

- Továbbá optimális értéke

$$p^* = c(x^*) = \sqrt{3}\frac{100}{3}.$$

Példa IV

Példa IV

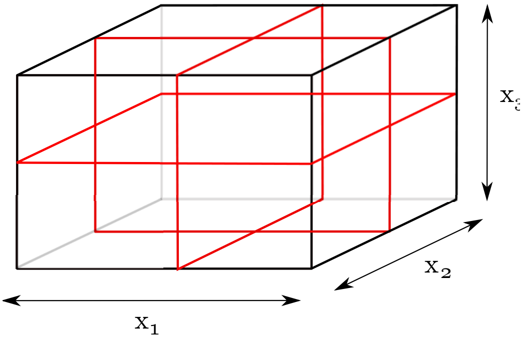
Példa

Mekkora a legnagyobb felszínű (téglatest alakú) doboz, amelyet egy 400 cm-es madzaggal át tudunk kötni (a mellékelt ábrának megfelelő módon)?

Példa IV

Példa

Mekkora a legnagyobb felszínű (téglatest alakú) doboz, amelyet egy 400 cm-es madzaggal át tudunk kötni (a mellékelt ábrának megfelelő módon)?



Példa IV: Formalizálás

A formalizálás nyilvánvaló:

Maximalizáljuk	$2x_1x_2 + 2x_2x_3 + 2x_3x_1$-et
feltéve, hogy	$4x_1 + 4x_2 + 4x_3 = 400,$
	$x_1, x_2, x_3 > 0.$

A korábbiak alapján ez ekvivalens feladat az előzővel. Az ekvivalencia újbóli meggondolása adja, hogy az optimális hely azonos az előző feladat optimális helyével.

$$x^* = \left(\frac{100}{3}, \frac{100}{3}, \frac{100}{3}\right).$$

Ebből az eredeti feladat optimális értéke

$$p^* = c(x^*) = \frac{20\,000}{3}.$$

Példa V

Példa V

Példa

A 100 pontú 3-részes egyszerű gráfok közül melyeknek maximális az élszáma?

Példa V

Példa

A 100 pontú 3-részes egyszerű gráfok közül melyeknek maximális az élszáma?

- Ezzel a feladattal Kombinatorika kurzuson a Turán-tétel kapcsán találkoztunk.

Példa V

Példa

A 100 pontú 3-részes egyszerű gráfok közül melyeknek maximális az élszáma?

• Ezzel a feladattal Kombinatorika kurzuson a Turán-tétel kapcsán találkoztunk. Ha a három rész méretét rendre x_1, x_2 és x_3 jelöli és élünk a természetes észrevétellel, hogy teljes 3-részes gráfok között keressük az optimálist, akkor a feladat a következő:

Maximalizáljuk	$x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1$-et
feltéve, hogy	$x_1 + x_2 + x_3 = 100,$
	$x_1, x_2, x_3 > 0,$
	$x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{Z}.$

Példa V (folytatás)

Példa V (folytatás)

- Mivel $\mathcal{F}$ egy nemüres véges halmaz, így a lehetséges megoldások között biztosan létezik x^* optimális hely, $p^* \in \mathbb{R}$ optimális értékkel.

Példa V (folytatás)

- Mivel $\mathcal{F}$ egy nemüres véges halmaz, így a lehetséges megoldások között biztosan létezik x^* optimális hely, $p^* \in \mathbb{R}$ optimális értékkel.
- A feltételből az is látható, hogy ha (x_1, x_2, x_3) egy lehetséges megoldás, akkor például $(x_1 - 1,\ x_2 + 1, x_3)$ is lehetséges megoldás (feltéve, hogy $x_1 > 1$).

Példa V (folytatás)

- Mivel $\mathcal{F}$ egy nemüres véges halmaz, így a lehetséges megoldások között biztosan létezik x^* optimális hely, $p^* \in \mathbb{R}$ optimális értékkel.
- A feltételből az is látható, hogy ha (x_1, x_2, x_3) egy lehetséges megoldás, akkor például $(x_1 - 1,\ x_2 + 1, x_3)$ is lehetséges megoldás (feltéve, hogy $x_1 > 1$).
- Ha $x_1 \geq x_2 + 2$, akkor az utóbbi helyen nagyobb a célfüggvény, mint az előbbin.

Példa V (folytatás)

- Mivel $\mathcal{F}$ egy nemüres véges halmaz, így a lehetséges megoldások között biztosan létezik x^* optimális hely, $p^* \in \mathbb{R}$ optimális értékkel.
- A feltételből az is látható, hogy ha (x_1, x_2, x_3) egy lehetséges megoldás, akkor például $(x_1 - 1,\ x_2 + 1, x_3)$ is lehetséges megoldás (feltéve, hogy $x_1 > 1$).
- Ha $x_1 \geq x_2 + 2$, akkor az utóbbi helyen nagyobb a célfüggvény, mint az előbbin.
- Ez azt is jelenti, hogy az optimális helyen $|x_i^* - x_j^*| \leq 1$ minden $i, j \in \{1, 2, 3\}$ esetén.

Példa V (folytatás)

- Mivel $\mathcal{F}$ egy nemüres véges halmaz, így a lehetséges megoldások között biztosan létezik x^* optimális hely, $p^* \in \mathbb{R}$ optimális értékkel.
- A feltételből az is látható, hogy ha (x_1, x_2, x_3) egy lehetséges megoldás, akkor például $(x_1 - 1,\ x_2 + 1, x_3)$ is lehetséges megoldás (feltéve, hogy $x_1 > 1$).
- Ha $x_1 \geq x_2 + 2$, akkor az utóbbi helyen nagyobb a célfüggvény, mint az előbbin.
- Ez azt is jelenti, hogy az optimális helyen $|x_i^* - x_j^*| \leq 1$ minden $i, j \in \{1, 2, 3\}$ esetén.
- Három ilyen lehetséges megoldás van, ahol a célfüggvény közös értéket vesz fel.

Példa V (folytatás)

- Mivel $\mathcal{F}$ egy nemüres véges halmaz, így a lehetséges megoldások között biztosan létezik x^* optimális hely, $p^* \in \mathbb{R}$ optimális értékkel.
- A feltételből az is látható, hogy ha (x_1, x_2, x_3) egy lehetséges megoldás, akkor például $(x_1 - 1,\ x_2 + 1, x_3)$ is lehetséges megoldás (feltéve, hogy $x_1 > 1$).
- Ha $x_1 \geq x_2 + 2$, akkor az utóbbi helyen nagyobb a célfüggvény, mint az előbbin.
- Ez azt is jelenti, hogy az optimális helyen $|x_i^* - x_j^*| \leq 1$ minden $i, j \in \{1, 2, 3\}$ esetén.
- Három ilyen lehetséges megoldás van, ahol a célfüggvény közös értéket vesz fel. Így az optimális helyek a $(34, 33, 33)$, $(33, 34, 33)$, $(33, 33, 34)$ pontok.

Példa V (folytatás)

- Mivel $\mathcal{F}$ egy nemüres véges halmaz, így a lehetséges megoldások között biztosan létezik x^* optimális hely, $p^* \in \mathbb{R}$ optimális értékkel.
- A feltételből az is látható, hogy ha (x_1, x_2, x_3) egy lehetséges megoldás, akkor például $(x_1 - 1,\ x_2 + 1, x_3)$ is lehetséges megoldás (feltéve, hogy $x_1 > 1$).
- Ha $x_1 \geq x_2 + 2$, akkor az utóbbi helyen nagyobb a célfüggvény, mint az előbbin.
- Ez azt is jelenti, hogy az optimális helyen $|x_i^* - x_j^*| \leq 1$ minden $i, j \in \{1, 2, 3\}$ esetén.
- Három ilyen lehetséges megoldás van, ahol a célfüggvény közös értéket vesz fel. Így az optimális helyek a $(34, 33, 33)$, $(33, 34, 33)$, $(33, 33, 34)$ pontok.
- Az optimális érték $p^* = 3333$.

Példa V: Megjegyzések

Példa V: Megjegyzések

- A fenti feladat NEM ekvivalens a korábbi példáink egyikével sem.

Példa V: Megjegyzések

- A fenti feladat NEM ekvivalens a korábbi példáink egyikével sem.

- Ezt jelzi az optimális helyek és a lehetséges megoldások halmazának eltérése, melynek oka a feltételek „lényeges” különbözősége: most kizárólag egész koordinátájú helyek jöhetnek szóba.

Példa V: Megjegyzések

- A fenti feladat NEM ekvivalens a korábbi példáink egyikével sem.
- Ezt jelzi az optimális helyek és a lehetséges megoldások halmazának eltérése, melynek oka a feltételek „lényeges” különbözősége: most kizárólag egész koordinátájú helyek jöhetnek szóba.
- A „folytonos” feladatban (előző két példa) az optimális érték $3\,333\frac{1}{3}$, nagyobb a mostaninál.

Példa V: Megjegyzések

- A fenti feladat NEM ekvivalens a korábbi példáink egyikével sem.

- Ezt jelzi az optimális helyek és a lehetséges megoldások halmazának eltérése, melynek oka a feltételek „lényeges” különbözősége: most kizárólag egész koordinátájú helyek jöhetnek szóba.

- A „folytonos” feladatban (előző két példa) az optimális érték $3\,333\frac{1}{3}$, nagyobb a mostaninál.

- Ez természetes: a folytonos „versenyben” több „résztvevő” van, a maximum értéke legalább annyi mint ahol csak egész koordinátájú „versenyzők” indultak.

Példa V: Megjegyzések

- A fenti feladat NEM ekvivalens a korábbi példáink egyikével sem.

- Ezt jelzi az optimális helyek és a lehetséges megoldások halmazának eltérése, melynek oka a feltételek „lényeges" különbözősége: most kizárólag egész koordinátájú helyek jöhetnek szóba.

- A „folytonos" feladatban (előző két példa) az optimális érték $3\,333\frac{1}{3}$, nagyobb a mostaninál.

- Ez természetes: a folytonos „versenyben" több „résztvevő" van, a maximum értéke legalább annyi mint ahol csak egész koordinátájú „versenyzők" indultak.

- Érdekes, de talán a diszkrét probléma első pillantásra könnyebbenk tűnik: Véges sok lehetőség közül kell a optimális(ak)at megtalálni.

Példa V: Megjegyzések

- A fenti feladat NEM ekvivalens a korábbi példáink egyikével sem.
- Ezt jelzi az optimális helyek és a lehetséges megoldások halmazának eltérése, melynek oka a feltételek „lényeges” különbözősége: most kizárólag egész koordinátájú helyek jöhetnek szóba.
- A „folytonos” feladatban (előző két példa) az optimális érték $3\,333\frac{1}{3}$, nagyobb a mostaninál.
- Ez természetes: a folytonos „versenyben” több „résztvevő” van, a maximum értéke legalább annyi mint ahol csak egész koordinátájú „versenyzők” indultak.
- Érdekes, de talán a diszkrét probléma első pillantásra könnyebbenk tűnik: Véges sok lehetőség közül kell a optimális(ak)at megtalálni. Mégis a diszkrét esethez mintha több ötlet kellene.

Példa VI

Példa

Legyen $d, n \in \mathbb{N}$ és $\ell_1(x), \ldots, \ell_n(x) \colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ adott lineáris függvények. Határozzuk meg a $c(x) = \max_{1 \le i \le n} \ell_i(x)$ függvény minimumát.

Tehát a formalizált feladat:

$$\boxed{\text{Minimalizáljuk} \qquad c(x)\text{-et}}$$

A feladat globális (nincsenek feltételek).

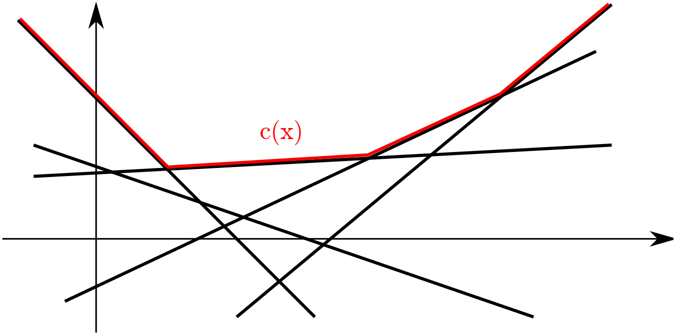
Példa VI: Ábra

Példa VI: Ábra

- A mellékelt ábra a $d = 1$, $n = 5$ eset egy általános konfigurációját szemlélteti.

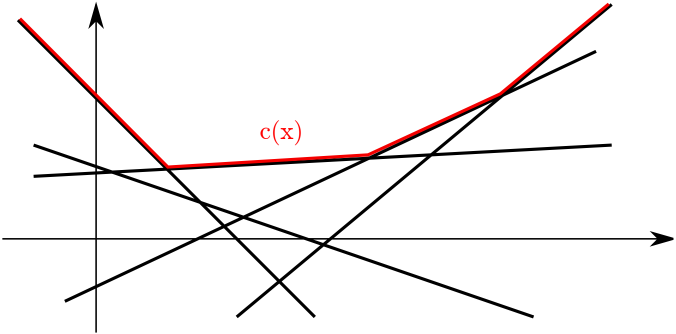
Példa VI: Ábra

- A mellékelt ábra a $d = 1$, $n = 5$ eset egy általános konfigurációját szemlélteti.



Példa VI: Ábra

- A mellékelt ábra a $d = 1$, $n = 5$ eset egy általános konfigurációját szemlélteti.



- Már ez a speciális választás is hű képet ad a célfüggvényről. c lineáris függvények maximuma „szakaszonként” lineáris függvény. Ez $d > 1$ esetén azt jelenti, hogy c értelmezési tartománya felbontható olyan összefüggő részekre, melyeken c lineáris.

Példa VI: Átfogalmazás

Példa VI: Átfogalmazás

- Az előzővel ekvivalens optimalizálási feladatban az m számot minimalizáljuk úgy, hogy az ottani célfüggvény definícióját (maximalitását) beépítjük a feltételekbe.

Példa VI: Átfogalmazás

- Az előzővel ekvivalens optimalizálási feladatban az m számot minimalizáljuk úgy, hogy az ottani célfüggvény definícióját (maximalitását) beépítjük a feltételekbe.

$$\boxed{\begin{array}{ll} \text{Minimalizáljuk} & m\text{-et} \\ \text{feltéve, hogy} & l_1(x) \leq m, \\ & \vdots \\ & l_n(x) \leq m, \end{array}}$$

ahol $(x, m) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}$.

Példa VII: Egy probléma osztály

Példa VII: Egy probléma osztály

- Egy optimalizálási feladat ezen formája ismerős lehet az operációkutatás kurzusról.

Példa VII: Egy probléma osztály

- Egy optimalizálási feladat ezen formája ismerős lehet az operációkutatás kurzusról.

Lineáris programozás, LP

Legyen $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ adott mátrix, $b \in \mathbb{R}^m$, $c \in \mathbb{R}^n$ rögzített vektorok és $x \in \mathbb{R}^n$ az ismeretlen vektor. A feladat:

Példa VII: Egy probléma osztály

- Egy optimalizálási feladat ezen formája ismerős lehet az operációkutatás kurzusról.

Lineáris programozás, LP

Legyen $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ adott mátrix, $b \in \mathbb{R}^m$, $c \in \mathbb{R}^n$ rögzített vektorok és $x \in \mathbb{R}^n$ az ismeretlen vektor. A feladat:

$$\boxed{\begin{array}{ll} \text{Minimalizáljuk} & c^{\mathsf{T}}x\text{-et} \\ \text{feltéve, hogy} & Ax \preceq b, \end{array}}$$

Példa VII: Egy probléma osztály

- Egy optimalizálási feladat ezen formája ismerős lehet az operációkutatás kurzusról.

Lineáris programozás, LP

Legyen $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ adott mátrix, $b \in \mathbb{R}^m$, $c \in \mathbb{R}^n$ rögzített vektorok és $x \in \mathbb{R}^n$ az ismeretlen vektor. A feladat:

$$\boxed{\begin{array}{ll} \text{Minimalizáljuk} & c^T x\text{-et} \\ \text{feltéve, hogy} & Ax \preceq b, \end{array}}$$

ahol $Ax \preceq b$ az Ax és b $\mathbb{R}^m$-beli vektorok „minden komponensben kisebb egyenlő" viszonyát jelöli.

Példa VII: Egy probléma osztály

Példa VII: Egy probléma osztály

- Az LP feladatosztályt az Operációkutatás kurzuson részletesen tárgyaljuk.

Példa VII: Egy probléma osztály

- Az LP feladatosztályt az Operációkutatás kurzuson részletesen tárgyaljuk.
- Megjegyezzük, hogy az LP feladat nagyon központi probléma.

Példa VII: Egy probléma osztály

- Az LP feladatosztályt az Operációkutatás kurzuson részletesen tárgyaljuk.

- Megjegyezzük, hogy az LP feladat nagyon központi probléma. Sok gyakorlatban és elméletben is jónak tartott algoritmus létezik rá.

Példa VII: Egy probléma osztály

- Az LP feladatosztályt az Operációkutatás kurzuson részletesen tárgyaljuk.
- Megjegyezzük, hogy az LP feladat nagyon központi probléma. Sok gyakorlatban és elméletben is jónak tartott algoritmus létezik rá.
- Ha egy problémát LP feladatként fogalmazunk meg, akkor a „nehezén túl vagyunk”

Példa VII: Egy probléma osztály

- Az LP feladatosztályt az Operációkutatás kurzuson részletesen tárgyaljuk.
- Megjegyezzük, hogy az LP feladat nagyon központi probléma. Sok gyakorlatban és elméletben is jónak tartott algoritmus létezik rá.
- Ha egy problémát LP feladatként fogalmazunk meg, akkor a „nehezén túl vagyunk" (akár középiskolában, ha egyenletmegoldás során másodfokú egyenletre redukáltuk munkánkat).

Példa VII: Egy probléma osztály

- Az LP feladatosztályt az Operációkutatás kurzuson részletesen tárgyaljuk.

- Megjegyezzük, hogy az LP feladat nagyon központi probléma. Sok gyakorlatban és elméletben is jónak tartott algoritmus létezik rá.

- Ha egy problémát LP feladatként fogalmazunk meg, akkor a „nehezén túl vagyunk" (akár középiskolában, ha egyenletmegoldás során másodfokú egyenletre redukáltuk munkánkat).

- Valamelyik általános LP algoritmussal fejezzük be munkánkat (ilyenek nyilvános forráskóddal is könnyen elérhetőek).

Példa VIII

Példa VIII

Példa

Az LP problémát tekintjük, amelyben a lineáris célfüggvény ($c^{\mathsf{T}}x$) c vektora valószínűségi változó. Feltesszük, hogy várható értéke, $\overline{c} = \mathbb{E}[c]$ ismert, továbbá a feltételek már nem függnek a véletlentől.

Példa VIII

Példa

Az LP problémát tekintjük, amelyben a lineáris célfüggvény ($c^T x$) c vektora valószínűségi változó. Feltesszük, hogy várható értéke, $\overline{c} = \mathbb{E}[c]$ ismert, továbbá a feltételek már nem függnek a véletlentől.

Minimalizáljuk a célfüggvény értékének várható értékét.

Példa VIII

Példa

Az LP problémát tekintjük, amelyben a lineáris célfüggvény ($c^{\mathsf{T}}x$) c vektora valószínűségi változó. Feltesszük, hogy várható értéke, $\overline{c} = \mathbb{E}[c]$ ismert, továbbá a feltételek már nem függnek a véletlentől.

Minimalizáljuk a célfüggvény értékének várható értékét.

- A várható érték linearitása alapján $\mathbb{E}[c^{\mathsf{T}}x] = (\mathbb{E}[c])^{\mathsf{T}}x$.

Példa VIII

Példa

Az LP problémát tekintjük, amelyben a lineáris célfüggvény ($c^T x$) c vektora valószínűségi változó. Feltesszük, hogy várható értéke, $\overline{c} = \mathbb{E}[c]$ ismert, továbbá a feltételek már nem függnek a véletlentől.

Minimalizáljuk a célfüggvény értékének várható értékét.

- A várható érték linearitása alapján $\mathbb{E}[c^T x] = (\mathbb{E}[c])^T x$.
- Egy LP feladat marad optimalizálási kérdésünk:

Minimalizáljuk	$(\mathbb{E}[c])^T x$
feltéve, hogy	$Ax \preceq b$.

Példa IX: Csebisev középpont

Példa IX: Csebisev középpont

Definíció

A $\mathcal{P} = \{x \in \mathbb{R}^n : a_i^\top x \leq b, \ i = 1, \ldots, k\}$ alakú ponthalmazokat poliédereknek nevezzük. Ha a $\mathcal{P}$ poliéder korlátos (amikor is kompakt: korlátos és zárt), akkor politópnak nevezzük.

Példa IX: Csebisev középpont

Definíció

A $\mathcal{P} = \{x \in \mathbb{R}^n : a_i^\mathsf{T} x \leq b, \ i = 1, \ldots, k\}$ alakú ponthalmazokat poliédereknek nevezzük. Ha a $\mathcal{P}$ poliéder korlátos (amikor is kompakt: korlátos és zárt), akkor politópnak nevezzük.

Példa: Politópok Csebisev-középpontja

Adott $\mathcal{P}$ poliéder.

Példa IX: Csebisev középpont

Definíció

A $\mathcal{P} = \{x \in \mathbb{R}^n : a_i^\mathsf{T} x \leq b,\ i = 1, \ldots, k\}$ alakú ponthalmazokat poliédereknek nevezzük. Ha a $\mathcal{P}$ poliéder korlátos (amikor is kompakt: korlátos és zárt), akkor politópnak nevezzük.

Példa: Politópok Csebisev-középpontja

Adott $\mathcal{P}$ poliéder. Melyek $\mathcal{P}$ legbelsőbb pontjai?

Példa IX: Csebisev középpont

Definíció

A $\mathcal{P} = \{x \in \mathbb{R}^n : a_i^\mathsf{T} x \leq b, \ i = 1, \ldots, k\}$ alakú ponthalmazokat poliédereknek nevezzük. Ha a $\mathcal{P}$ poliéder korlátos (amikor is kompakt: korlátos és zárt), akkor politópnak nevezzük.

Példa: Politópok Csebisev-középpontja

Adott $\mathcal{P}$ poliéder. Melyek $\mathcal{P}$ legbelsőbb pontjai?

- Igazából az is központi probléma, hogy $\mathcal{P}$-ről döntsük el, hogy üres-e.

Példa IX: Csebisev középpont

Definíció

A $\mathcal{P} = \{x \in \mathbb{R}^n : a_i^\top x \leq b, \ i = 1, \ldots, k\}$ alakú ponthalmazokat poliédereknek nevezzük. Ha a $\mathcal{P}$ poliéder korlátos (amikor is kompakt: korlátos és zárt), akkor politópnak nevezzük.

Példa: Politópok Csebisev-középpontja

Adott $\mathcal{P}$ poliéder. Melyek $\mathcal{P}$ legbelsőbb pontjai?

- Igazából az is központi probléma, hogy $\mathcal{P}$-ről döntsük el, hogy üres-e.

- Eseteünkben azt kell mérnünk, hogy $\mathcal{P}$ egy pontja milyen mélyen van $\mathcal{P}$ belsejében.

Példa IX: Csebisev középpont

Definíció

A $\mathcal{P} = \{x \in \mathbb{R}^n : a_i^{\mathsf{T}} x \leq b,\ i = 1, \ldots, k\}$ alakú ponthalmazokat poliédereknek nevezzük. Ha a $\mathcal{P}$ poliéder korlátos (amikor is kompakt: korlátos és zárt), akkor politópnak nevezzük.

Példa: Politópok Csebisev-középpontja

Adott $\mathcal{P}$ poliéder. Melyek $\mathcal{P}$ legbelsőbb pontjai?

- Igazából az is központi probléma, hogy $\mathcal{P}$-ről döntsük el, hogy üres-e.
- Eseteünkben azt kell mérnünk, hogy $\mathcal{P}$ egy pontja milyen mélyen van $\mathcal{P}$ belsejében.
- Sokféle megoldás/válasz van. Mi egy, Csebisev nevéhez fűzött, megoldásról beszélünk.

Példa IX: Csebisev-középpont (folytatás)

Definíció

$B(c, r) = \{x \in \mathbb{R}^n : |x - c|^2 \leq r^2\}$ a c középpontú r sugarú gömb.

Példa IX: Csebisev-középpont (folytatás)

Definíció

$B(c, r) = \{x \in \mathbb{R}^n : |x - c|^2 \leq r^2\}$ a c középpontú r sugarú gömb.

A $p \in \mathcal{P}$ pont Csebisev-mélysége

$$M(p) = \sup\{r : B(p, r) \subset \mathcal{P}\}.$$

Példa IX: Csebisev-középpont (folytatás)

Definíció

$B(c, r) = \{x \in \mathbb{R}^n : |x - c|^2 \leq r^2\}$ a c középpontú r sugarú gömb.

A $p \in \mathcal{P}$ pont Csebisev-mélysége

$$M(p) = \sup\{r : B(p, r) \subset \mathcal{P}\}.$$

c a $\mathcal{P}$ politóp egy Csebisev-középpontja, ha

$$M(c) = \sup_{p \in \mathcal{P}} M(p).$$

Példa IX: Csebisev-középpont (folytatás)

Definíció

$B(c,r) = \{x \in \mathbb{R}^n : |x-c|^2 \leq r^2\}$ a c középpontú r sugarú gömb.

A $p \in \mathcal{P}$ pont Csebisev-mélysége

$$M(p) = \sup\{r : B(p,r) \subset \mathcal{P}\}.$$

c a $\mathcal{P}$ politóp egy Csebisev-középpontja, ha

$$M(c) = \sup_{p \in \mathcal{P}} M(p).$$

- Az alapproblémánk: Adott $\mathcal{P}$ esetén keressünk egy Csebisev-középpontot.

Példa IX: Csebisev-középpont (folytatás)

Példa IX: Csebisev-középpont (folytatás)

- A feladat első ránézesre nem lineáris.

Példa IX: Csebisev-középpont (folytatás)

- A feladat első ránézesre nem lineáris. Némi geometriai ismeretre lesz szükségünk.

Példa IX: Csebisev-középpont (folytatás)

- A feladat első ránézesre nem lineáris. Némi geometriai ismeretre lesz szükségünk.

Definíció

Egy hipersík $\mathbb{R}^n$-ben: $H = \{x : a^\mathsf{T} x = b\}$ alakú ponthalmaz.

Példa IX: Csebisev-középpont (folytatás)

- A feladat első ránézesre nem lineáris. Némi geometriai ismeretre lesz szükségünk.

Definíció

Egy hipersík $\mathbb{R}^n$-ben: $H = \{x : a^\mathsf{T} x = b\}$ alakú ponthalmaz.

r pont pontosan akkor esik H-ra, ha $a^\mathsf{T} r - b = 0$.

Példa IX: Csebisev-középpont (folytatás)

- A feladat első ránézesre nem lineáris. Némi geometriai ismeretre lesz szükségünk.

Definíció

Egy hipersík $\mathbb{R}^n$-ben: $H = \{x : a^\mathsf{T} x = b\}$ alakú ponthalmaz.

r pont pontosan akkor esik H-ra, ha $a^\mathsf{T} r - b = 0$.

Egy p pont előjeles távolsága H-tól

$$\frac{a^\mathsf{T}}{|a|} p - \frac{b}{|a|}.$$

Példa IX: Csebisev-középpont (folytatás)

- A feladat első ránézesre nem lineáris. Némi geometriai ismeretre lesz szükségünk.

Definíció

Egy hipersík $\mathbb{R}^n$-ben: $H = \{x : a^\mathsf{T} x = b\}$ alakú ponthalmaz.

r pont pontosan akkor esik H-ra, ha $a^\mathsf{T} r - b = 0$.

Egy p pont előjeles távolsága H-tól

$$\frac{a^\mathsf{T}}{|a|} p - \frac{b}{|a|}.$$

Az előjeles távolság abszolútértéke a távolság, előjele a hipersík azon oldalát írja le, ahová pontunk esik.

Példa IX: Csebisev-középpont (folytatás)

- A feladat első ránézesre nem lineáris. Némi geometriai ismeretre lesz szükségünk.

Definíció

Egy hipersík $\mathbb{R}^n$-ben: $H = \{x : a^{\mathsf{T}}x = b\}$ alakú ponthalmaz.

r pont pontosan akkor esik H-ra, ha $a^{\mathsf{T}}r - b = 0$.

Egy p pont előjeles távolsága H-tól

$$\frac{a^{\mathsf{T}}}{|a|}p - \frac{b}{|a|}.$$

Az előjeles távolság abszolútértéke a távolság, előjele a hipersík azon oldalát írja le, ahová pontunk esik.

Kétféle előjeles távolság létezik. A fenti az, amelyik az $\{x : a^{\mathsf{T}}x > b\}$ féltérben pozitív, a komplementer (nyilt) féltérben negatív.

Példa IX: Csebisev középpont (folytatás)

Példa IX: Csebisev középpont (folytatás)

- A Csebisev-középpont problémája ekvivalens a következővel:

Maximalizáljuk	r
feltéve, hogy	$a_i^{\mathsf{T}}x + \lvert a_i\rvert r \leq b_i, \quad i = 1, \ldots, k$
	$r \geq 0$

Példa IX: Csebisev középpont (folytatás)

- A Csebisev-középpont problémája ekvivalens a következővel:

Maximalizáljuk	r
feltéve, hogy	$a_i^{\mathsf{T}}x + \lvert a_i\rvert r \leq b_i, \quad i = 1, \ldots, k$
	$r \geq 0$

- Első típusú feltételünk ekvivalens azzal, hogy $\frac{a_i^{\mathsf{T}}}{\lvert a_i\rvert}x + r \leq \frac{b}{\lvert a_i\rvert}$, azaz

$$r \leq \frac{b}{\lvert a_i\rvert} - \frac{a_i^{\mathsf{T}}}{\lvert a_i\rvert}x.$$

Példa IX: Csebisev középpont (folytatás)

- A Csebisev-középpont problémája ekvivalens a következővel:

Maximalizáljuk	r
feltéve, hogy	$a_i^{\mathsf{T}}x + \lvert a_i\rvert r \le b_i, \quad i = 1, \ldots, k$
	$r \ge 0$

- Első típusú feltételünk ekvivalens azzal, hogy $\frac{a_i^{\mathsf{T}}}{\lvert a_i\rvert}x + r \le \frac{b}{\lvert a_i\rvert}$, azaz

$$r \le \frac{b}{\lvert a_i\rvert} - \frac{a_i^{\mathsf{T}}}{\lvert a_i\rvert}x.$$

- A jobb oldalon egy előjeles távolság szerepel, amit úgy választottunk, hogy az $a_i x < b$ félterekben legyen pozitív.

Példa IX: Csebisev középpont (folytatás)

- A Csebisev-középpont problémája ekvivalens a következővel:

Maximalizáljuk	r	
feltéve, hogy	$a_i^{\mathsf{T}} x + \lvert a_i\rvert r \leq b_i,$	$i = 1, \ldots, k$
	$r \geq 0$	

- Első típusú feltételünk ekvivalens azzal, hogy $\frac{a_i^{\mathsf{T}}}{|a_i|} x + r \leq \frac{b}{|a_i|}$, azaz

$$r \leq \frac{b}{|a_i|} - \frac{a_i^{\mathsf{T}}}{|a_i|} x.$$

- A jobb oldalon egy előjeles távolság szerepel, amit úgy választottunk, hogy az $a_i x < b$ félterekben legyen pozitív.

- Az átfogalmazott optimalizálási feladat egy LP feladat.

Szünet

Példa X: Legkisebb négyzetek problémája

Példa X: Legkisebb négyzetek problémája

- A következő problémával és megoldási módszereivel a numerikus analízis tárgykörében találkozhattunk.

Példa X: Legkisebb négyzetek problémája

- A következő problémával és megoldási módszereivel a numerikus analízis tárgykörében találkozhattunk.

Példa: A legkisebb négyzetek problémája

A probléma

$$\boxed{\text{Minimalizáljuk} \qquad \|c - Ax\|}$$

illetve

$$\boxed{\text{Minimalizáljuk} \qquad \|c - Ax\|^2}$$

ahol $x \in \mathbb{R}^n$, $A \in \mathbb{R}^{k \times n}$ valós mátrix és $c \in \mathbb{R}^k$.

Példa X: Legkisebb négyzetek problémája

- A következő problémával és megoldási módszereivel a numerikus analízis tárgykörében találkozhattunk.

Példa: A legkisebb négyzetek problémája

A probléma

$$\boxed{\text{Minimalizáljuk} \qquad \|c - Ax\|}$$

illetve

$$\boxed{\text{Minimalizáljuk} \qquad \|c - Ax\|^2}$$

ahol $x \in \mathbb{R}^n$, $A \in \mathbb{R}^{k \times n}$ valós mátrix és $c \in \mathbb{R}^k$.

- Ez egy feltétel nélküli optimalizálási feladat. Alap lineáris algebrai, geometriai ismeretek alapján egyszerűen kezelhető.

Példa X: Legkisebb négyzetek problémája

Példa X: Legkisebb négyzetek problémája

Példa

Adott egy méréssorozat (pl. egy kísérleti laboratórium különböző időpontokban vett mérései, vagy egy meteorológiai állomás különböző helyeken mért adatai), ahol $t_1, t_2, \ldots t_N$ és $p_1, p_2, \ldots, p_N$ jelöli rendre a mérési időket/helyeket illetve a mért paramétereket. Keresünk egy "alacsony", d-fokú polinomot, ami jó "hipotézis" p változásaira (vagyis jól "illeszthető" a diszkrét idő-mért paraméter grafikonra).

Példa X: Legkisebb négyzetek problémája

Példa

Adott egy méréssorozat (pl. egy kísérleti laboratórium különböző időpontokban vett mérései, vagy egy meteorológiai állomás különböző helyeken mért adatai), ahol $t_1, t_2, \dots t_N$ és $p_1, p_2, \dots, p_N$ jelöli rendre a mérési időket/helyeket illetve a mért paramétereket. Keresünk egy "alacsony", d-fokú polinomot, ami jó "hipotézis" p változásaira (vagyis jól "illeszthető" a diszkrét idő-mért paraméter grafikonra).

- Legyen

$$p(x) = x_d x^d + \cdots + x_1 x + x_0$$

azaz $p = (p_1, \dots, p_N)^{\mathsf{T}}$ mért vektor esetén az

$$x_d(t_1^d, \dots, t_N^d)^{\mathsf{T}} + x_{d-1}(t_1^{d-1}, \dots, t_N^{d-1})^{\mathsf{T}} + \dots$$

vektor L_2-ben mért p-től vett távolságát kell minimalizálni.

Példa X: Legkisebb négyzetek problémája

Példa

Adott egy méréssorozat (pl. egy kísérleti laboratórium különböző időpontokban vett mérései, vagy egy meteorológiai állomás különböző helyeken mért adatai), ahol $t_1, t_2, \dots t_N$ és $p_1, p_2, \dots, p_N$ jelöli rendre a mérési időket/helyeket illetve a mért paramétereket. Keresünk egy "alacsony", d-fokú polinomot, ami jó "hipotézis" p változásaira (vagyis jól "illeszthető" a diszkrét idő-mért paraméter grafikonra).

- Legyen
$$p(x) = x_d x^d + \cdots + x_1 x + x_0$$
azaz $p = (p_1, \dots, p_N)^\mathsf{T}$ mért vektor esetén az
$$x_d(t_1^d, \dots, t_N^d)^\mathsf{T} + x_{d-1}(t_1^{d-1}, \dots, t_N^{d-1})^\mathsf{T} + \dots$$
vektor L_2-ben mért p-től vett távolságát kell minimalizálni.
- A legkisebb négyzetek problémájában kvadratikus forma a

Példa XI: Kvadratikus programozás

Példa XI: Kvadratikus programozás

Kvadratikus programozás, QP

Adottak az $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ szimmetrikus és $C \in \mathbb{R}^{m \times n}$ mátrixok, valamint a $b \in \mathbb{R}^n$, $d \in \mathbb{R}^m$ vektorok.

Példa XI: Kvadratikus programozás

Kvadratikus programozás, QP

Adottak az $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ szimmetrikus és $C \in \mathbb{R}^{m \times n}$ mátrixok, valamint a $b \in \mathbb{R}^n$, $d \in \mathbb{R}^m$ vektorok.

Minimalizáljuk	$x^\mathsf{T} A x + b^\mathsf{T} x$-et
feltéve, hogy	$Cx \preceq d$.

Példa XI: Kvadratikus programozás

Kvadratikus programozás, QP

Adottak az $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ szimmetrikus és $C \in \mathbb{R}^{m\times n}$ mátrixok, valamint a $b \in \mathbb{R}^n$, $d \in \mathbb{R}^m$ vektorok.

Minimalizáljuk	$x^\mathsf{T} A x + b^\mathsf{T} x$-et
feltéve, hogy	$Cx \preceq d$.

- A QP alapfeladat feltételrendszere lineáris. A célfüggvény azonban jóval általánosabb.

Példa XI: Kvadratikus programozás

Kvadratikus programozás, QP

Adottak az $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ szimmetrikus és $C \in \mathbb{R}^{m\times n}$ mátrixok, valamint a $b \in \mathbb{R}^n$, $d \in \mathbb{R}^m$ vektorok.

Minimalizáljuk	$x^\mathsf{T} Ax + b^\mathsf{T} x$-et
feltéve, hogy	$Cx \preceq d$.

- A QP alapfeladat feltételrendszere lineáris. A célfüggvény azonban jóval általánosabb.

- Megjegyezzük, hogy a QP alapfeladata is kezelhető (hatékony algoritmus ismert rá) ha a célfüggvény konvex (azaz A pozitív szemidefinit).

Példa XI: Kvadratikus programozás

Kvadratikus programozás, QP

Adottak az $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ szimmetrikus és $C \in \mathbb{R}^{m\times n}$ mátrixok, valamint a $b \in \mathbb{R}^n$, $d \in \mathbb{R}^m$ vektorok.

Minimalizáljuk	$x^\mathsf{T} A x + b^\mathsf{T} x$-et
feltéve, hogy	$Cx \preceq d$.

- A QP alapfeladat feltételrendszere lineáris. A célfüggvény azonban jóval általánosabb.

- Megjegyezzük, hogy a QP alapfeladata is kezelhető (hatékony algoritmus ismert rá) ha a célfüggvény konvex (azaz A pozitív szemidefinit). Ha egy problémát ilyen (konvex QP) alakra hozunk, akkor „készen vagyunk”.

Példa XII: Sztochasztikus lineáris programozás

Példa XII: Sztochasztikus lineáris programozás

- Az LP problémát tekintjük, amelyben a lineáris célfüggvény ($c^{\mathsf{T}}x$) c vektora valószínűségi változó. Feltesszük, hogy várható értéke, $\overline{c} = \mathbb{E}[c]$, kovarianciamátrixa $\Sigma = \mathbb{E}[(c - \overline{c})(c - \overline{c})^{\mathsf{T}}]$ ismert. Továbbá a feltételek már nem függnek a véletlentől.

Példa XII: Sztochasztikus lineáris programozás

- Az LP problémát tekintjük, amelyben a lineáris célfüggvény ($c^{\mathsf{T}}x$) c vektora valószínűségi változó. Feltesszük, hogy várható értéke, $\overline{c} = \mathbb{E}[c]$, kovarianciamátrixa $\Sigma = \mathbb{E}[(c - \overline{c})(c - \overline{c})^{\mathsf{T}}]$ ismert. Továbbá a feltételek már nem függnek a véletlentől.
- Láttuk, ha csak a célfüggvény értékének várható értékét ($\mathbb{E}[c^{\mathsf{T}}x] = (\mathbb{E}[c])^{\mathsf{T}}x$) minimalizáljuk, akkor egy LP feladathoz jutunk.

Példa XII: Sztochasztikus lineáris programozás

- Az LP problémát tekintjük, amelyben a lineáris célfüggvény ($c^{\mathsf{T}}x$) c vektora valószínűségi változó. Feltesszük, hogy várható értéke, $\overline{c} = \mathbb{E}[c]$, kovarianciamátrixa $\Sigma = \mathbb{E}[(c - \overline{c})(c - \overline{c})^{\mathsf{T}}]$ ismert. Továbbá a feltételek már nem függnek a véletlentől.
- Láttuk, ha csak a célfüggvény értékének várható értékét ($\mathbb{E}[c^{\mathsf{T}}x] = (\mathbb{E}[c])^{\mathsf{T}}x$) minimalizáljuk, akkor egy LP feladathoz jutunk.
- Ekkor azonban a „kockázatot” nem vettük figyelembe.

Példa XII: Sztochasztikus lineáris programozás (folytatás)

Példa XII: Sztochasztikus lineáris programozás (folytatás)

- Megszokott a következő változat vizsgálata:

Példa XII: Sztochasztikus lineáris programozás (folytatás)

- Megszokott a következő változat vizsgálata:

Sztochasztikus LP

$$\boxed{\begin{array}{ll} \text{Minimalizáljuk} & \mathbb{E}[c^{\mathsf{T}}x] + \gamma\,\mathbb{V}ar[c^{\mathsf{T}}x] \\ \text{feltéve, hogy} & Ax \preceq b \\ & Dx = e \end{array}}$$

ahol $\gamma \in \mathbb{R}_{>0}$ egy az alkalmazáshoz választott paraméter.

Példa XII: Sztochasztikus lineáris programozás (folytatás)

- Megszokott a következő változat vizsgálata:

Sztochasztikus LP

$$\boxed{\begin{array}{ll} \text{Minimalizáljuk} & \mathbb{E}[c^\mathsf{T} x] + \gamma\, \mathbb{V}ar[c^\mathsf{T} x] \\ \text{feltéve, hogy} & Ax \preceq b \\ & Dx = e \end{array}}$$

ahol $\gamma \in \mathbb{R}_{>0}$ egy az alkalmazáshoz választott paraméter.

- Egyszerű átlakításokkal

$$\mathbb{V}ar[c^\mathsf{T} x] = \mathbb{E}[(c^\mathsf{T} x - \mathbb{E}[c^\mathsf{T} x])^2] = \mathbb{E}[(c^\mathsf{T} x - (\mathbb{E}[c])^\mathsf{T} x)^2]$$
$$= \mathbb{E}[((c^\mathsf{T} - \mathbb{E}[c]^\mathsf{T})x)^2] = x^\mathsf{T} \mathbb{E}[(c - \mathbb{E}[c])(c^\mathsf{T} - \mathbb{E}[c]^\mathsf{T})]x = x^\mathsf{T} \Sigma x.$$

Példa XII: Sztochasztikus lineáris programozás (folytatás)

- Megszokott a következő változat vizsgálata:

Sztochasztikus LP

$$\boxed{\begin{array}{ll} \text{Minimalizáljuk} & \mathbb{E}[c^\top x] + \gamma\,\mathbb{V}ar[c^\top x] \\ \text{feltéve, hogy} & Ax \preceq b \\ & Dx = e \end{array}}$$

ahol $\gamma \in \mathbb{R}_{>0}$ egy az alkalmazáshoz választott paraméter.

- Egyszerű átlakításokkal

$$\mathbb{V}ar[c^\top x] = \mathbb{E}[(c^\top x - \mathbb{E}[c^\top x])^2] = \mathbb{E}[(c^\top x - (\mathbb{E}[c])^\top x)^2]$$
$$= \mathbb{E}[((c^\top - \mathbb{E}[c]^\top)x)^2] = x^\top \mathbb{E}[(c - \mathbb{E}[c])(c^\top - \mathbb{E}[c]^\top)]x = x^\top \Sigma x.$$

- A kérdés konvex QP alakja már látható.

Példa XIII: Poliéderek távolsága

Példa XIII: Poliéderek távolsága

Példa

Határozzuk meg az n-dimenziós euklidészi tér két adott poliéderjének távolságát!

Példa XIII: Poliéderek távolsága

Példa

Határozzuk meg az *n*-dimenziós euklidészi tér két adott poliéderjének távolságát!

- Mivel a poliéderek lineáris egyenlőtlenségrendszerek megoldáshalmazaként állnak elő, ezért mindkét politópnak megfelel egy egyenlőtlenségrendszer ($C_1 \in \mathbb{R}^{k_1 \times n}$, $C_2 \in \mathbb{R}^{k_2 \times n}$):

$$\mathcal{P}_1 = \{x_1 \in \mathbb{R}^n : C_1 x_1 \preceq d_1\} \quad \text{és} \quad \mathcal{P}_2 = \{x_2 \in \mathbb{R}^n : C_2 x_2 \preceq d_2\}.$$

Példa XIII: Poliéderek távolsága

Példa

Határozzuk meg az n-dimenziós euklidészi tér két adott poliéderjének távolságát!

- Mivel a poliéderek lineáris egyenlőtlenségrendszerek megoldáshalmazaként állnak elő, ezért mindkét politópnak megfelel egy egyenlőtlenségrendszer ($C_1 \in \mathbb{R}^{k_1 \times n}$, $C_2 \in \mathbb{R}^{k_2 \times n}$):

$$\mathcal{P}_1 = \{x_1 \in \mathbb{R}^n : C_1 x_1 \preceq d_1\} \quad \text{és} \quad \mathcal{P}_2 = \{x_2 \in \mathbb{R}^n : C_2 x_2 \preceq d_2\}.$$

- Ezek távolsága

$$d(\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2) = \inf\{d(x_1, x_2) : x_1 \in \mathcal{P}_1,\ x_2 \in \mathcal{P}_2\},$$

ahol $d(x_1, x_2) = \|x_1 - x_2\|_2$.

Példa XIII: Poliéderek távolsága (folytatás)

Példa XIII: Poliéderek távolsága (folytatás)

- A távolságnégyzetet tekintve ekvivalens optimalizálási feladatot nyerünk:

Példa XIII: Poliéderek távolsága (folytatás)

- A távolságnégyzetet tekintve ekvivalens optimalizálási feladatot nyerünk:

Minimalizáljuk	$\|x_1 - x_2\|_2^2$-et
feltéve, hogy	$C_1 x_1 \preceq d_1,$
	$C_2 x_2 \preceq d_2.$

Példa XIII: Poliéderek távolsága (folytatás)

- A távolságnégyzetet tekintve ekvivalens optimalizálási feladatot nyerünk:

Minimalizáljuk	$\|x_1 - x_2\|_2^2$-et
feltéve, hogy	$C_1 x_1 \preceq d_1$,
	$C_2 x_2 \preceq d_2$.

- Ehhez tekintsük a $d_1 \in \mathbb{R}^{k_1}, d_2 \in \mathbb{R}^{k_2}, x_1, x_2 \in \mathbb{R}^n$ vektorokból és $C_1, C_2 \in \mathbb{R}^{(k_1+k_2)\times n}$ mátrixokból képzett

$$d = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2n}, \quad C = \begin{pmatrix} C_1 & 0 \\ 0 & C_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2n\times 2n}$$

vektorokat és mátrixot, ahol tehát 0 a megfelelő méretű nullmátrixokat jelöli.

Példa XIII: Poliéderek távolsága (folytatás)

- A távolságnégyzetet tekintve ekvivalens optimalizálási feladatot nyerünk:

Minimalizáljuk	$\|x_1 - x_2\|_2^2$-et
feltéve, hogy	$C_1 x_1 \preceq d_1$,
	$C_2 x_2 \preceq d_2$.

- Ehhez tekintsük a $d_1 \in \mathbb{R}^{k_1}, d_2 \in \mathbb{R}^{k_2}, x_1, x_2 \in \mathbb{R}^n$ vektorokból és $C_1, C_2 \in \mathbb{R}^{(k_1+k_2)\times n}$ mátrixokból képzett

$$d = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2n}, \quad C = \begin{pmatrix} C_1 & 0 \\ 0 & C_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2n\times 2n}$$

vektorokat és mátrixot, ahol tehát 0 a megfelelő méretű nullmátrixokat jelöli. Feltételrendszerünk: $Cx \preceq d$.

Példa XIII: Poliéderek távolsága (folytatás)

Példa XIII: Poliéderek távolsága (folytatás)

- Ha az $n \times n$-es egységmátrixból képezzük még, az

$$A = \begin{pmatrix} I & -I \\ -I & I \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2n \times 2n}$$

mátrixot, akkor feladatunk a célfüggvény $x^\mathsf{T} A x$ alakba írható.

Példa XIII: Poliéderek távolsága (folytatás)

- Ha az $n \times n$-es egységmátrixból képezzük még, az

$$A = \begin{pmatrix} I & -I \\ -I & I \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2n \times 2n}$$

mátrixot, akkor feladatunk a célfüggvény $x^{\mathsf{T}} A x$ alakba írható.

- A fenti írásmódot használva látjuk, hogy ez egy konvex QP feladat.

Példa XIII: Poliéderek távolsága (folytatás)

- Ha az $n \times n$-es egységmátrixból képezzük még, az

$$A = \begin{pmatrix} I & -I \\ -I & I \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2n \times 2n}$$

mátrixot, akkor feladatunk a célfüggvény $x^\mathsf{T} A x$ alakba írható.

- A fenti írásmódot használva látjuk, hogy ez egy konvex QP feladat. A fentiek alapján két politóp távolságának meghatározása hatékonyan elvégezhető.

Példa XIV: Klikk probléma

Példa XIV: Klikk probléma

Példa

Adott egy G egyszerű gráf. Határozzuk meg $\omega(G) = \max\{|K| : K \subset V(G)\,\text{klikk}\}$ értékét.

Példa XIV: Klikk probléma

Példa

Adott egy G egyszerű gráf. Határozzuk meg $\omega(G) = \max\{|K| : K \subset V(G)\,\text{klikk}\}$ értékét.

- Egy tetszőleges U csúcshalmaz leírható $\{0,1\}^V \subset \mathbb{R}^V$-beli χ_U karakterisztikus vektorával. U elemszáma éppen $1^\mathsf{T}\chi_U$, ahol $1 \in \mathbb{R}^V$ azon vektor, amely minden komponense 1.

Példa XIV: Klikk probléma

Példa

Adott egy G egyszerű gráf. Határozzuk meg $\omega(G) = \max\{|K| : K \subset V(G) \,\text{klikk}\}$ értékét.

- Egy tetszőleges U csúcshalmaz leírható $\{0,1\}^V \subset \mathbb{R}^V$-beli χ_U karakterisztikus vektorával. U elemszáma éppen $1^\mathsf{T}\chi_U$, ahol $1 \in \mathbb{R}^V$ azon vektor, amely minden komponense 1.

- $\{0,1\}^V$ elemeit a $0 \leq x_v \leq 1$, $x_v \in \mathbb{Z}$ tetszőleges v csúcsra tett feltételekkel írhatjuk le. Egy 0-1 vektor akkor lesz klikk karakterisztikus vektora, ha tetszőleges össze nem kötött u és v csúcsra legfeljebb egyikük esik bele. Azaz minden $uv \notin E(G), u \neq v$ csúcsok esetén $x_u + x_v \leq 1$.

Példa XIV: Klikk probléma (folytatás)

Példa XIV: Klikk probléma (folytatás)

- A jól ismerten $\mathcal{N}P$-nehéz klikk probléma megfogalmazható a következő módon:

Maximalizáljuk	$1^{\mathsf{T}}x$-et,
feltéve, hogy	$0 \leq x_v \leq 1$, $x_v \in \mathbb{Z}$ minden v csúcsra
	$x_u + x_v \leq 1$
	tetszőleges $uv \notin E(G), u \neq v$ csúcsokra.

Példa XV: Egész értékű programozás

Példa XV: Egész értékű programozás

- Az előző példa egy általános séma eleme:

Példa XV: Egész értékű programozás

• Az előző példa egy általános séma eleme: Ismét „nyúljunk” bele az LP alapfeladatba.

Példa XV: Egész értékű programozás

• Az előző példa egy általános séma eleme: Ismét „nyúljunk” bele az LP alapfeladatba. Most a feltételrendszert módosítsuk. A feltételek közé tegyük be azt, hogy „versenyző” vektoraink koordinátái legyenek egészek.

Példa XV: Egész értékű programozás

• Az előző példa egy általános séma eleme: Ismét „nyúljunk” bele az LP alapfeladatba. Most a feltételrendszert módosítsuk. A feltételek közé tegyük be azt, hogy „versenyző” vektoraink koordinátái legyenek egészek.

Egész értékű programozás, IP

Az alapfeladat:

$$\boxed{\begin{array}{ll} \text{Minimalizáljuk} & c^{\mathsf{T}}x\text{-et} \\ \text{feltéve, hogy} & Ax \preceq b, \\ & x \in \mathbb{Z}^d. \end{array}}$$

Példa XV: Egész értékű programozás

- Az előző példa egy általános séma eleme: Ismét „nyúljunk” bele az LP alapfeladatba. Most a feltételrendszert módosítsuk. A feltételek közé tegyük be azt, hogy „versenyző” vektoraink koordinátái legyenek egészek.

Egész értékű programozás, IP

Az alapfeladat:

Minimalizáljuk	$c^T x$-et
feltéve, hogy	$Ax \preceq b$,
	$x \in \mathbb{Z}^d$.

- LP esetén a lehetséges megoldások halmaza egy poliéder volt.

Példa XV: Egész értékű programozás

• Az előző példa egy általános séma eleme: Ismét „nyúljunk” bele az LP alapfeladatba. Most a feltételrendszert módosítsuk. A feltételek közé tegyük be azt, hogy „versenyző” vektoraink koordinátái legyenek egészek.

Egész értékű programozás, IP

Az alapfeladat:

Minimalizáljuk	$c^T x$-et
feltéve, hogy	$Ax \preceq b$,
	$x \in \mathbb{Z}^d$.

• LP esetén a lehetséges megoldások halmaza egy poliéder volt. Most egy poliéder és $\mathbb{Z}^d$ metszete

Példa XV: Egész értékű programozás

• Az előző példa egy általános séma eleme: Ismét „nyúljunk” bele az LP alapfeladatba. Most a feltételrendszert módosítsuk. A feltételek közé tegyük be azt, hogy „versenyző” vektoraink koordinátái legyenek egészek.

Egész értékű programozás, IP

Az alapfeladat:

$$\boxed{\begin{array}{ll} \text{Minimalizáljuk} & c^{\mathsf{T}}x\text{-et} \\ \text{feltéve, hogy} & Ax \preceq b, \\ & x \in \mathbb{Z}^d. \end{array}}$$

• LP esetén a lehetséges megoldások halmaza egy poliéder volt. Most egy poliéder és $\mathbb{Z}^d$ metszete (politópok esetén ez egy véges halmaz).

Példa XV: Egész értékű programozás

- Az előző példa egy általános séma eleme: Ismét „nyúljunk” bele az LP alapfeladatba. Most a feltételrendszert módosítsuk. A feltételek közé tegyük be azt, hogy „versenyző” vektoraink koordinátái legyenek egészek.

Egész értékű programozás, IP

Az alapfeladat:

$$\boxed{\begin{array}{ll} \text{Minimalizáljuk} & c^T x\text{-et} \\ \text{feltéve, hogy} & Ax \preceq b, \\ & x \in \mathbb{Z}^d. \end{array}}$$

- LP esetén a lehetséges megoldások halmaza egy poliéder volt. Most egy poliéder és $\mathbb{Z}^d$ metszete (politópok esetén ez egy véges halmaz). Lehet, hogy ez a módosítás „ártatlanabbnak” tűnik, mint a célfüggvény módosítása, mégis a kapott probléma nehéz.

Példa XV: Egész értékű programozás

• Az előző példa egy általános séma eleme: Ismét „nyúljunk" bele az LP alapfeladatba. Most a feltételrendszert módosítsuk. A feltételek közé tegyük be azt, hogy „versenyző" vektoraink koordinátái legyenek egészek.

Egész értékű programozás, IP

Az alapfeladat:

Minimalizáljuk	$c^T x$-et
feltéve, hogy	$Ax \preceq b$,
	$x \in \mathbb{Z}^d$.

• LP esetén a lehetséges megoldások halmaza egy poliéder volt. Most egy poliéder és $\mathbb{Z}^d$ metszete (politópok esetén ez egy véges halmaz). Lehet, hogy ez a módosítás „ártatlanabbnak" tűnik, mint a célfüggvény módosítása, mégis a kapott probléma nehéz. Ez az általános forma képes $\mathcal{NP}$-teljes problémák formalizálására.

Példa XV: Egész értékű programozás

• Az előző példa egy általános séma eleme: Ismét „nyúljunk” bele az LP alapfeladatba. Most a feltételrendszert módosítsuk. A feltételek közé tegyük be azt, hogy „versenyző” vektoraink koordinátái legyenek egészek.

Egész értékű programozás, IP

Az alapfeladat:

$$\boxed{\begin{array}{ll} \text{Minimalizáljuk} & c^T x\text{-et} \\ \text{feltéve, hogy} & Ax \preceq b, \\ & x \in \mathbb{Z}^d. \end{array}}$$

• LP esetén a lehetséges megoldások halmaza egy poliéder volt. Most egy poliéder és $\mathbb{Z}^d$ metszete (politópok esetén ez egy véges halmaz). Lehet, hogy ez a módosítás „ártatlanabbnak” tűnik, mint a célfüggvény módosítása, mégis a kapott probléma nehéz. Ez az általános forma képes $\mathcal{NP}$-teljes problémák formalizálására. Általános, hatékony megoldása nem várható.

Példa XVI: Párosítási probléma

Példa XVI: Párosítási probléma

Példa

Adott G gráf élei közötti maximális párosítást keressük.

Példa XVI: Párosítási probléma

Példa

Adott G gráf élei közötti maximális párosítást keressük.

- A feladat formalizálása:

Maximalizáljuk	$1^\mathsf{T}x$-et (ahol $1^\mathsf{T} = (1, \ldots, 1), x \in \mathbb{R}^{E(G)}$)
feltéve, hogy	x párosítás karakterisztikus vektora.

Példa XVI: Párosítási probléma

Példa

Adott G gráf élei közötti maximális párosítást keressük.

- A feladat formalizálása:

Maximalizáljuk	$1^{\mathsf{T}}x$-et (ahol $1^{\mathsf{T}} = (1, \ldots, 1), x \in \mathbb{R}^{E(G)}$)
feltéve, hogy	x párosítás karakterisztikus vektora.

- A feltételt algebraizálva az alábbi ekvivalens optimalizálási feladatot kapjuk:

Maximalizáljuk	$1^{\mathsf{T}}x$-et (ahol $x \in \mathbb{R}^{E(G)}$)
feltéve, hogy	$0 \leq x_e \leq 1$, $x_e \in \mathbb{Z}$
	$\sum_{e: v \mid e} x_e \leq 1$ minden v csúcsra.

Példa XVI: Párosítási probléma: Relaxáció

Példa XVI: Párosítási probléma: Relaxáció

- Azaz egy IP feladatot látunk.

Példa XVI: Párosítási probléma: Relaxáció

- Azaz egy IP feladatot látunk. Az $x_e \in \mathbb{Z}$ feltétel elhagyását **LP relaxációnak** nevezzük.

Példa XVI: Párosítási probléma: Relaxáció

- Azaz egy IP feladatot látunk. Az $x_e \in \mathbb{Z}$ feltétel elhagyását **LP relaxációnak** nevezzük. Ezzel a versenyt „megnyitjuk” a nem egész koordinátájú „versenyzők” felé is.

Példa XVI: Párosítási probléma: Relaxáció

- Azaz egy IP feladatot látunk. Az $x_e \in \mathbb{Z}$ feltétel elhagyását **LP relaxációnak** nevezzük. Ezzel a versenyt „megnyitjuk" a nem egész koordinátájú „versenyzők" felé is. Természetesen a maximalizálási feladat optimális értéke megnőhet.

Példa XVI: Párosítási probléma: Relaxáció

- Azaz egy IP feladatot látunk. Az $x_e \in \mathbb{Z}$ feltétel elhagyását **LP relaxációnak** nevezzük. Ezzel a versenyt „megnyitjuk” a nem egész koordinátájú „versenyzők” felé is. Természetesen a maximalizálási feladat optimális értéke megnőhet.
- A relaxált feladat egy kezelhető probléma/LP feladat:

Példa XVI: Párosítási probléma: Relaxáció

- Azaz egy IP feladatot látunk. Az $x_e \in \mathbb{Z}$ feltétel elhagyását **LP relaxációnak** nevezzük. Ezzel a versenyt „megnyitjuk" a nem egész koordinátájú „versenyzők" felé is. Természetesen a maximalizálási feladat optimális értéke megnőhet.
- A relaxált feladat egy kezelhető probléma/LP feladat:

Maximalizáljuk	$\mathbf{1}^T x$-et
feltéve, hogy	$0 \leq x_e \leq 1$,
	$\sum_{e: v \,I\, e} x_e \leq 1$ minden v csúcsra.

Példa XVI: Párosítási probléma: Relaxáció

- Azaz egy IP feladatot látunk. Az $x_e \in \mathbb{Z}$ feltétel elhagyását **LP relaxációnak** nevezzük. Ezzel a versenyt „megnyitjuk” a nem egész koordinátájú „versenyzők” felé is. Természetesen a maximalizálási feladat optimális értéke megnőhet.
- A relaxált feladat egy kezelhető probléma/LP feladat:

Maximalizáljuk	$1^{\mathsf{T}}x$-et
feltéve, hogy	$0 \leq x_e \leq 1$,
	$\sum_{e:v \mathbf{I} e} x_e \leq 1$ minden v csúcsra.

Jelölés

$$\nu^*(G)$$

jelölje a fenti LP feladat optimális értékét.

Példa XVI: Párosítási probléma (folytatás)

Példa XVI: Párosítási probléma (folytatás)

Tétel

Ha G páros, akkor $\nu^*(G) = \nu(G)$.

Példa XVI: Párosítási probléma (folytatás)

Tétel

Ha G páros, akkor $\nu^*(G) = \nu(G)$.

Azaz LP relaxációval nyert optimalizálási feladat ekvivalens az eredetivel.

Példa XVI: Párosítási probléma (folytatás)

Tétel

Ha G páros, akkor $\nu^*(G) = \nu(G)$.

Azaz LP relaxációval nyert optimalizálási feladat ekvivalens az eredetivel.

- Problémánk kezdeti alakját ekvivalens módod is átírhatjuk LP alakba.

Példa XVI: Párosítási probléma (folytatás)

Tétel

Ha G páros, akkor $\nu^*(G) = \nu(G)$.

Azaz LP relaxációval nyert optimalizálási feladat ekvivalens az eredetivel.

• Problémánk kezdeti alakját ekvivalens módod is átírhatjuk LP alakba. Eredetileg véges sok „versenyzőnk” volt, a párosítások karakterisztikus vektorai.

Példa XVI: Párosítási probléma (folytatás)

Tétel

Ha G páros, akkor $\nu^*(G) = \nu(G)$.

Azaz LP relaxációval nyert optimalizálási feladat ekvivalens az eredetivel.

• Problémánk kezdeti alakját ekvivalens módod is átírhatjuk LP alakba. Eredetileg véges sok „versenyzőnk” volt, a párosítások karakterisztikus vektorai. Ezt a versenyzőhalmazt helyettesítve a konvex burkukkal egy ekvivalens problémát kapunk (célfüggvényünk lineáris!):

Példa XVI: Párosítási probléma (folytatás)

Tétel

Ha G páros, akkor $\nu^*(G) = \nu(G)$.

Azaz LP relaxációval nyert optimalizálási feladat ekvivalens az eredetivel.

• Problémánk kezdeti alakját ekvivalens módod is átírhatjuk LP alakba. Eredetileg véges sok „versenyzőnk” volt, a párosítások karakterisztikus vektorai. Ezt a versenyzőhalmazt helyettesítve a konvex burkukkal egy ekvivalens problémát kapunk (célfüggvényünk lineáris!):

Maximalizáljuk	$1^T x$
feltéve, hogy	$x \in \mathrm{conv}\{\chi_M : M \text{ párosítás}\}$

Példa XVI: Párosítási probléma (folytatás)

Példa XVI: Párosítási probléma (folytatás)

- A feltétel egy politópot ír le.

Példa XVI: Párosítási probléma (folytatás)

- A feltétel egy politópot ír le. Ez leírható véges sok féltér metszeteként, azaz algebrailag egy véges lineáris egyenlőtlenségrendszer megoldáshalmaza.

Példa XVI: Párosítási probléma (folytatás)

- A feltétel egy politópot ír le. Ez leírható véges sok féltér metszeteként, azaz algebrailag egy véges lineáris egyenlőtlenségrendszer megoldáshalmaza.

Tétel*

Legyen G páros gráf. Ekkor

$$\mathrm{conv}\{\chi_M : M \text{ párosítás}\} =$$
$$=\{x \in \mathbb{R}^E : 0 \leq x_e \leq 1, \sum_{e:v\, I\, e} x_e \leq 1 \text{ minden } v \text{ csúcsra.}\}$$

Példa XVI: Párosítási probléma (folytatás)

- A feltétel egy politópot ír le. Ez leírható véges sok féltér metszeteként, azaz algebrailag egy véges lineáris egyenlőtlenségrendszer megoldáshalmaza.

Tétel*

Legyen G páros gráf. Ekkor

$$\mathrm{conv}\{\chi_M : M \text{ párosítás}\} =$$
$$=\{x \in \mathbb{R}^E : 0 \leq x_e \leq 1, \sum_{e:v\, I\, e} x_e \leq 1 \text{ minden } v \text{ csúcsra.}\}$$

- A nem páros gráfok esetét a későbbiekben vizsgáljuk meg jobban.

Példa XIV: Klikk probléma újra

Példa XIV: Klikk probléma újra

- Végül egy $\mathcal{N}P$-nehéz problémát formalizálunk/algebraizálunk.

Példa XIV: Klikk probléma újra

- Végül egy $\mathcal{N}P$-nehéz problémát formalizálunk/algebraizálunk.

Az eredmény alakja egy QP alapfeladat.

Példa XIV: Klikk probléma újra

- Végül egy $\mathcal{N}P$-nehéz problémát formalizálunk/algebraizálunk.

Az eredmény alakja egy QP alapfeladat. Természetesen nem konvex feladat lesz.

Példa XIV: Klikk probléma újra

- Végül egy $\mathcal{NP}$-nehéz problémát formalizálunk/algebraizálunk. Az eredmény alakja egy QP alapfeladat. Természetesen nem konvex feladat lesz.

Példa

Adott egy G gráf. Határozzuk meg a klikk paraméterét ($\omega(G)$-t), azaz a legnagyobb klikk méretét.

Példa XIV: Klikk probléma újra

• Végül egy $\mathcal{NP}$-nehéz problémát formalizálunk/algebraizálunk. Az eredmény alakja egy QP alapfeladat. Természetesen nem konvex feladat lesz.

Példa

Adott egy G gráf. Határozzuk meg a klikk paraméterét ($\omega(G)$-t), azaz a legnagyobb klikk méretét.

• Láttuk, hogy a kérdés egy IP problémaként is megfogalmazható. Az alábbi tétel egy távolról sem nyilvánvaló, másik formalizálását adja $\omega(G)$ meghatározásának.

Példa XIV: Klikk probléma újra: A Tétel

Példa XIV: Klikk probléma újra: A Tétel

Tétel

Legyen $A \in \mathbb{R}^{V \times V}$ a G gráf szomszédsági mátrixa és tekintsük az alábbi feladatot ($x, 0, 1 \in \mathbb{R}^V$):

Maximalizáljuk	$x^{\mathsf{T}} A x$-et
feltéve, hogy	$x \succeq 0$,
	$1^{\mathsf{T}} x = 1$.

Példa XIV: Klikk probléma újra: A Tétel

Tétel

Legyen $A \in \mathbb{R}^{V \times V}$ a G gráf szomszédsági mátrixa és tekintsük az alábbi feladatot ($x, 0, 1 \in \mathbb{R}^V$):

$$\boxed{\begin{array}{ll} \text{Maximalizáljuk} & x^\mathsf{T} A x\text{-et} \\ \text{feltéve, hogy} & x \succeq 0, \\ & 1^\mathsf{T} x = 1. \end{array}}$$

Ekkor

$$p^* = 1 - \frac{1}{\omega(G)}.$$

Példa XIV: Klikk probléma újra: A Bizonyítás

Példa XIV: Klikk probléma újra: A Bizonyítás

(1): $p^* \geq 1 - \dfrac{1}{\omega(G)}$.

Példa XIV: Klikk probléma újra: A Bizonyítás

(1): $p^* \geq 1 - \dfrac{1}{\omega(G)}$.

- Legyen K egy optimális (maximális elemszámú) klikk.

Példa XIV: Klikk probléma újra: A Bizonyítás

(1): $p^* \geq 1 - \dfrac{1}{\omega(G)}$.

- Legyen K egy optimális (maximális elemszámú) klikk. Ekkor az

$$x_K = (0, \ldots, 0, \underbrace{\frac{1}{\omega}, \ldots, \frac{1}{\omega}}_{K}, 0, \ldots, 0)$$

lehetséges helyen

Példa XIV: Klikk probléma újra: A Bizonyítás

(1): $p^* \geq 1 - \dfrac{1}{\omega(G)}$.

- Legyen K egy optimális (maximális elemszámú) klikk. Ekkor az

$$x_K = (0, \ldots, 0, \underbrace{\frac{1}{\omega}, \ldots, \frac{1}{\omega}}_{K}, 0, \ldots, 0)$$

lehetséges helyen c értéke

$$c(x_K) = x_K^{\mathsf{T}} A x_K = \frac{1}{\omega^2}\omega(\omega - 1) = 1 - \frac{1}{\omega}.$$

Példa XIV: Klikk probléma újra: A Bizonyítás

Példa XIV: Klikk probléma újra: A Bizonyítás

(2): $p^* \leq 1 - \dfrac{1}{\omega(G)}$.

Példa XIV: Klikk probléma újra: A Bizonyítás

(2): $p^* \leq 1 - \dfrac{1}{\omega(G)}$.

- Tekintsük az

$$x = \left(\frac{\overset{v_1}{n_1}}{N}, \ldots, \frac{\overset{v_k}{n_k}}{N} \right) \in \mathcal{L} \cap \mathbb{Q}^{V(G)}$$

vektort, ahol tehát $k = |V(G)|$ és az $n_1, \ldots, n_k \in \mathbb{N}$ számok az $N \in \mathbb{N}$ szám egy partícióját adják.

Példa XIV: Klikk probléma újra: A Bizonyítás

(2): $p^* \leq 1 - \dfrac{1}{\omega(G)}$.

• Tekintsük az

$$x = \left(\frac{\overset{v_1}{n_1}}{N}, \ldots, \frac{\overset{v_k}{n_k}}{N} \right) \in \mathcal{L} \cap \mathbb{Q}^{V(G)}$$

vektort, ahol tehát $k = |V(G)|$ és az $n_1, \ldots, n_k \in \mathbb{N}$ számok az $N \in \mathbb{N}$ szám egy partícióját adják.

• Ezek után a G gráfhoz rendeljünk egy $\widetilde{G}$-mal jelölt gráfot a következő módon:

Példa XIV: Klikk probléma újra: A Bizonyítás

(2): $p^* \leq 1 - \dfrac{1}{\omega(G)}$.

• Tekintsük az

$$x = \left(\frac{\overset{v_1}{n_1}}{N}, \ldots, \frac{\overset{v_k}{n_k}}{N} \right) \in \mathcal{L} \cap \mathbb{Q}^{V(G)}$$

vektort, ahol tehát $k = |V(G)|$ és az $n_1, \ldots, n_k \in \mathbb{N}$ számok az $N \in \mathbb{N}$ szám egy partícióját adják.

• Ezek után a G gráfhoz rendeljünk egy $\widetilde{G}$-mal jelölt gráfot a következő módon:

◦ A G gráf v_i pontjának egy n_i pontból álló élmentes V_i független ponthalmaz felel meg $\widetilde{G}$-ban ($i = 1, \ldots, k$).

Példa XIV: Klikk probléma újra: A Bizonyítás

(2): $p^* \leq 1 - \dfrac{1}{\omega(G)}$.

• Tekintsük az

$$x = \left(\frac{\overset{v_1}{n_1}}{N}, \ldots, \frac{\overset{v_k}{n_k}}{N} \right) \in \mathcal{L} \cap \mathbb{Q}^{V(G)}$$

vektort, ahol tehát $k = |V(G)|$ és az $n_1, \ldots, n_k \in \mathbb{N}$ számok az $N \in \mathbb{N}$ szám egy partícióját adják.

• Ezek után a G gráfhoz rendeljünk egy $\widetilde{G}$-mal jelölt gráfot a következő módon:

∘ A G gráf v_i pontjának egy n_i pontból álló élmentes V_i független ponthalmaz felel meg $\widetilde{G}$-ban ($i = 1, \ldots, k$).

∘ Ha a $v_i, v_j \in V(G)$ pontok szomszédosak, akkor a megfelelő V_i, V_j csúcshalmazok közt egy K_{n_i,n_j} teljes páros gráfot teszünk (minden lehetséges keresztélt behúzunk).

Példa XIV: Klikk probléma újra: A Bizonyítás

(2): $p^* \leq 1 - \dfrac{1}{\omega(G)}$.

- Tekintsük az

$$x = \left(\overset{v_1}{\frac{n_1}{N}}, \ldots, \overset{v_k}{\frac{n_k}{N}} \right) \in \mathcal{L} \cap \mathbb{Q}^{V(G)}$$

vektort, ahol tehát $k = |V(G)|$ és az $n_1, \ldots, n_k \in \mathbb{N}$ számok az $N \in \mathbb{N}$ szám egy partícióját adják.

- Ezek után a G gráfhoz rendeljünk egy $\widetilde{G}$-mal jelölt gráfot a következő módon:
  - A G gráf v_i pontjának egy n_i pontból álló élmentes V_i független ponthalmaz felel meg $\widetilde{G}$-ban ($i = 1, \ldots, k$).
  - Ha a $v_i, v_j \in V(G)$ pontok szomszédosak, akkor a megfelelő V_i, V_j csúcshalmazok közt egy K_{n_i, n_j} teljes páros gráfot teszünk (minden lehetséges keresztélt behúzunk).
  - Ha a $v_i, v_j \in V(G)$ pontokat nem köti össze él, akkor a megfelelő V_i, V_j csúcshalmazok között nincs él.

Példa XIV: Klikk probléma újra: A Bizonyítás

Példa XIV: Klikk probléma újra: A Bizonyítás

- A definíció alapján $\widetilde{G}$ pontjainak száma

$$|V(\widetilde{G})| = \sum_{i=1}^{k} v_i = N \sum_{i=1}^{k} \frac{n_i}{N} = N$$

Példa XIV: Klikk probléma újra: A Bizonyítás

- A definíció alapján $\widetilde{G}$ pontjainak száma

$$|V(\widetilde{G})| = \sum_{i=1}^{k} v_i = N \sum_{i=1}^{k} \frac{n_i}{N} = N$$

- A konstrukció alapján $\widetilde{G}$ élszáma

$$|E(\widetilde{G})| = \sum_{\{v_i,v_j\} \in E(G)} n_i n_j = \frac{1}{2} N^2 \sum_{v_i v_j \in E(G)} \frac{n_i}{N} \frac{n_j}{N} = \frac{N^2}{2} x^\mathsf{T} A x = \frac{N^2}{2} c(x).$$

Példa XIV: Klikk probléma újra: A Bizonyítás

- A definíció alapján $\widetilde{G}$ pontjainak száma

$$|V(\widetilde{G})| = \sum_{i=1}^{k} v_i = N \sum_{i=1}^{k} \frac{n_i}{N} = N$$

- A konstrukció alapján $\widetilde{G}$ élszáma

$$|E(\widetilde{G})| = \sum_{\{v_i,v_j\}\in E(G)} n_i n_j = \frac{1}{2} N^2 \sum_{v_i v_j \in E(G)} \frac{n_i}{N}\frac{n_j}{N} = \frac{N^2}{2} x^{\mathsf{T}} A x = \frac{N^2}{2} c(x).$$

- $\widetilde{G}$ legnagyobb klikkje $\omega(G)$ méretű. A Turán-tételt alkalmazva élszáma legfeljebb az $\omega(G)$ osztályú/N pontú Turán-gráf élszáma:

$$|E(\widetilde{G})| \leq |E(T_{N,\omega(G)})| \leq \binom{\omega(G)}{2}\left(\frac{N}{\omega(G)}\right)^2 = \left(1 - \frac{1}{\omega(G)}\right)\frac{N^2}{2}.$$

Példa XIV: Klikk probléma újra: A Bizonyítás

Példa XIV: Klikk probléma újra: A Bizonyítás

- A fentiek összegzése után kapjuk, hogy

$$c(x) = \frac{2}{N^2}|E(\widetilde{G})| \leq 1 - \frac{1}{\omega(G)},$$

ha $x \in \mathcal{L} \cap \mathbb{Q}^{V(G)}$.

Példa XIV: Klikk probléma újra: A Bizonyítás

- A fentiek összegzése után kapjuk, hogy

$$c(x) = \frac{2}{N^2}|E(\widetilde{G})| \leq 1 - \frac{1}{\omega(G)},$$

ha $x \in \mathcal{L} \cap \mathbb{Q}^{V(G)}$.

- $\mathbb{Q}^{V(G)}$ egy sűrű halmaz $\mathcal{L}$-ben, a célfüggvény folytonos.

Példa XIV: Klikk probléma újra: A Bizonyítás

- A fentiek összegzése után kapjuk, hogy

$$c(x) = \frac{2}{N^2}|E(\widetilde{G})| \leq 1 - \frac{1}{\omega(G)},$$

ha $x \in \mathcal{L} \cap \mathbb{Q}^{V(G)}$.

- $\mathbb{Q}^{V(G)}$ egy sűrű halmaz $\mathcal{L}$-ben, a célfüggvény folytonos.
- Ez bizonyítja a hiányzó egyenlőtlenséget. Vagyis $p^* = 1 - \frac{1}{\omega(G)}$.

Példa XIV: Klikk probléma újra: Megjegyzések

Példa XIV: Klikk probléma újra: Megjegyzések

- A tétel által adott formalizálásban egy kvadratikus alakot kell maximalizálni.

Példa XIV: Klikk probléma újra: Megjegyzések

- A tétel által adott formalizálásban egy kvadratikus alakot kell maximalizálni.
- A konvex QP alapfeladat feltételei közül „csak” a kvadratikus alak mátrixának pozitív szemidefinitsége hiányzik.

Példa XIV: Klikk probléma újra: Megjegyzések

- A tétel által adott formalizálásban egy kvadratikus alakot kell maximalizálni.
- A konvex QP alapfeladat feltételei közül „csak” a kvadratikus alak mátrixának pozitív szemidefinitsége hiányzik.
- Ezen feltétel elhagyása olyan alakot eredményez, ami képes reménytelen optimalizálási feladatok formalizálására.

Vége van!

Köszönöm a figyelmet!