HALMAZRENDSZEREK

Matematika MSc hallgatók számára

12. Előadás

Előadó: Hajnal Péter
Jegyzetelő: Hajnal Péter

2010. május 4.

A sík/tér kromatikus számának problémája

Az alábbi kérdés egy alapkérdés. Vegyük a sík pontjainak halmazán a következő U (végtelen) egyszerű gráfot: két pont akkor és csak akkor összekötött, ha egységtávolságra vannak. U csúcsainak száma/számossága kontinuum.

Ennek ellenére belátható, hogy hét színnel jól kiszínezhető (mindegyik csúcshoz hét szín egyikét rendelhetjük úgy, hogy egység távolságra lévő csúcsok különböző színt kapjanak). Azaz $\chi(U) \leq 7$. Ehhez a síkot szabályos hatszögekkel kell kiparkettázni, amely mérete éppen megengedi, hogy összes pontja ugyanazt a színt kapja. Kis számolással látható, hogy egy piros hatszög színe milyen távol ismételhető meg. Ezt figyelembe véve a hatszögek (diszkrét, megszámlálhatóan végtelen) halmaza megfelelően kiszínezhető hét színnel.

A jó színezéshez szükséges színek számára alsó becslés is adható: vegyünk egy $OABC$ egységoldalú, O-nál 60^o-os szöggel rendelkező rombuszt. Forgassuk ezt el O körül úgy, hogy B egységtávolsággal kerüljön arrébb, a B' pontba. A és C képe a forgatásnál legyen A' és C'. Egyszerű belátni, hogy az O, A, B, C, A', B', C' pontok és a köztük lévő egységtávolságok (véges) gráfjához sem elegendő három szín. $\chi(U) \geq 4$.

Az is ismert, hogy a fenti ismertetett alsó becslés technika teljes. A technika egy véges részgráf felmutatása és annak kromatikus számának kiszámolásával becsüli alúlról a végtelen gráf kromatikus számát. A teljesség Erdős és de Bruijn egy nevezetes tétele: Legyen k egy természetes szám. Ha egy végtelen gráf minden véges részgráfja k-színezhető, akkor G maga is.

A fentiek mind a mai napig a legjobb becslések $\chi(U)$-ra.

Könnyen bevezethető az U gráf d-dimenziós változata: U^d ($U = U^2$). $\chi(U^d)$ becsléséről nagyon kevés volt ismert. A „hetes” felső becslés d-dimenzióban exponenciális növekedésű felső becsléshez vezet. A d-től függő alsó becslések nagyságrendileg is távol voltak a felsőtől. Egészen 1981-ig ...

A d-dimenzió tér kromatikus számának nagyságrendje

Két megjegyzéssel kezdjük a fejezetet. Először is nem szükséges, hogy az egységtávolságra lévő pontok adjanak egy nagy kromatikus számú gráfot. Ha egy ponthalmazon belül bármilyen „népszerű” távolság olyan gráfot ír le, aminek kromatikus száma magas, akkor a ponthalmazunkat tudjuk úgy skálázni, hogy a népszerű távolság az U^d-t definiáló 1 távolságnak felejen meg.

Trivialitás, hogy k színezhető gráfok átlagos színosztály mérete $|V|/k$, azaz a legnagyobb független ponthalmaz legalább ekkora. Ha a legnagyobb független ponthalmaz méretét tudjuk felülről becsülni, akkor adódik egy alsó becslés a kromatikus számra is:

$$\chi(G) \geq \frac{|V|}{\alpha(G)}.$$

Véges $\mathbb{R}^d$-beli ponthalmazunk $\{0,1\}^d$ egy részhalmaza lesz. Ezek a pontok egy d elemű V alaphalmaz részhalmazaival azonosíthatók. Azaz ponthalmazunkat egy halmazrendszer írja le.

1. Tétel (Frankl—Wilson-tétel). $\chi(U^d) \geq 1.001^d$.

Bizonyítás. Először tegyük fel, hogy $d = 4p-1$, ahol p prímszám. Vegyük a $4p-1$ elemű halmaz összes $2p-1$ elemű részhalmazát. Ezek karakterisztikus vektorai definiálnak egy véges $\mathcal{P}_p$ ponthalmazt $\mathbb{R}^d$-ben. Könnyű látni, hogy $\chi_E, \chi_F \in \mathcal{P}_p$ esetén

$$d(\chi_E, \chi_F) = \sqrt{|E\Delta F|} = \sqrt{2k - 2|E\cap F|}.$$

Azaz — az uniformitás feltevése árán — a távolságot a metszetmérettel tudjuk összekötni. Speciálisan E és F metszetmérete akkor és csak akkor $p-1$, ha χ_E és χ_F távolsága $\sqrt{2(2p-1)-2(p-1)} = \sqrt{2p}$.

Legyen G_d az a gráf,a mit $\mathcal{P}_p$-ből kapunk a $\sqrt{2k}$ távolságra lévő pontok összekötésével. Belátjuk, hogy ennek a gráfnak nagy a kromatikus száma.

Egy független ponthalmaz egy olyan k-uniform halmazrendszerhez, amelyben minden metszetméret $\{0,1,2,\ldots,p-2,p,p+1,\ldots,2p-2\}$-beli. Azaz modulo p véve a metszetmereteket egy $p-1$ elemű halmazból kerülnek ki: $\{0,1,2,\ldots,p-2\}$. A Frankl—Wilson-tétel alapján legfeljebb $\binom{4p-1}{p-1}$ pontot tartalmazhat. Ez alapján

$$\begin{aligned}\chi(U^d) \geq & \chi(G_d) \geq \frac{\binom{4p-1}{2p-1}}{\binom{4p-1}{p-1}} = \frac{3p(3p-1)(3p-2)\ldots(2p+2)(2p+1)}{(2p-1)(2p-2)(2p-3)\ldots(p+1)p} = \\ = & \frac{3p}{2p-1}\frac{3p-1}{2p-2}\frac{3p-2}{2p-3}\ldots\frac{2p+2}{p+1}\frac{2p+1}{p} \geq 1.1^p = 1.1^{(d+1)/4} \geq 1.01^d.\end{aligned}$$

Ha d-ről nem tesszük fel a speciális alakot (egy prímszám négyszeresénél eggyel kevesebb), akkor d-t lefelé kell „kerekíteni” egy ilyen alakú számra és d helyette a lefelé kerekített értékkel kell dolgozni. A részletek kidolgozását az érdeklődő hallgatóra bízzuk. ∎

Alakzatok feldarabolása kisebb átmérőjú részekre

A kombinatorikus geometria egyik alapproblémája egy adott korlátos alakzat feldarabolását kéri az erdetinél kisebb átmérőjű részekre. Legyen $B(K)$ a minimális számú darab, amivel ez megoldható. Legyen $B(d)$ a d-dimenziós K alakzatok között a maximális $B(K)$ paraméter. Könnyen látható, hogy feltehető, hogy K zárt (így kompakt) és a részek is zártak. A konvexség is feltehető K-ra (és a darabokra is).

Több évtizedes kutatómunka gyűjtötte az eredményeket. A legegyszerűbbek $B(2) = 3$, $B(3) = 4$.

Borsuk egy nevezetes tétele szerint $B(\mathbb{S}^d) = d + 2$, ahol $\mathbb{S}^d$ a $d + 1$ dimenziós gömb (d-dimenziós) felülete. Speciálisan, ha a d-dimenziós gömbfelületet $d + 1$ zárt résszel fedjük, akkor valamelyik tartalmaz átellenes pontpárt (ez a nehezebb része a tételnek). Másrészt $d + 2$ részre felbontható a gömbfelület: Egy beírt szabályos szimplex csúcsai köré írt (fégömbnél kissé kisebb) sapkák megfelelnek.

Ebből rögtön következik, hogy ha a d-dimenzióban lévő K határa sima (mindegyik irányhoz pontosan egy olyan támasz-hipersík van, amely külső normálisa az adott irányba mutat), akkor $B(K) \leq d + 1$. Valóban: Ekkor K (feltesszük, hogy konvex és zárt) határának minden pontját megfeleltethetjük egy iránnyal (az ottani támasz-hipersík kifelé mutató normálisának irányával), így egy $\mathbb{S}^{d-1}$ pontjával. A gömbfelület korábbi sapka-fedését visszavetíthetjük K-ra. Ez elkerüli az olyan határpontpárokat, amelyekben a két támasz-hipersík párhuzamos. Ez garantálja, hogy a visszavetített sapkák átmérője kisebb mint K átmérője. (A sima tesetk között a gömb a legnehezebb.)

Egy Borsuknak tulajdonított sejtés szerint $B(d) \leq d + 1$. Azaz a gömb az összes alakzat között a legnehezebb ilyen feldarabolás szempontjából.

Később kiderült, hogy ez nagyon nem igaz. A poliedérek (igazából véges csúcsponthalmazuk) kisebb átmérőjű részekre darabolása jóval mélyebb nehézségeket rejt.

A Borsuk-függvény valódi nagyságrendje

Az előzőekben definiált Frankl—Wilson-ponthalmaz mintájára kezdünk el dolgozni. A nagy hasonlóság ellenére több mint tíz év volt szükséges annak felismerésére, hogy a Borsuk-probléma is kezelhető a korábban kidolgozott technikák segítségével.

Az alaphalmaz (amiket majd a koordinátákkal azonosítunk) egy kicsit bonyolultabb lesz: p legyen egy prímszám. Az U alaphalmaz egy $4p-1$ elemű V csúcshalmaz pontpárjai. Az összes lehetséges módon vágjuk ketté V-t egy $2p$ és egy $2p-1$ elemű részre és vegyük azon párok halmazát, amelyek a vágás különböző osztályába eső egy-egy pontot tartalmaznak. Ezen pontpár-halmazok karakterisztikus vektorai alkossanak egy $\mathcal{Q}_p$ ponthalmazt. A dimenzió, ahol vagyunk $D = \binom{4p-1}{2}$. A megfelelő halmazrendszerünk uniform: minden él $(2p-1)2p$ elemű. Az azonban nem igaz, hogy az alaphalmaz összes ekkora részhalmazát élként vettük be. Minden élt azonosíthatunk az élt leíró vágás $2p-1$ elemű oldalával. Ez éppen $\mathcal{P}_p$ csúcshalmazának egy leírása (ezen ponthalmaz $d = 4p-1$ dimenzióban van).

Könnyen felírható $\chi_E, \chi_F \in \mathcal{P}_p$-nek megfelelő $\mathcal{Q}_p$-beli két pont (v_E és v_F) távolsága. Ez csak a két pontnak megfelelő párrendszerek metszetméretétől ($|\mathcal{E} \cap \mathcal{F}|$-től) függ (halmazrendszerünk most is uniform):

$$d(v_E, v_F) = \sqrt{4p(2p-1) - 2|\mathcal{E} \cap \mathcal{F}|}$$

$|\mathcal{E} \cap \mathcal{F}|$ értéke könnyen számolható:

$$|\mathcal{E} \cap \mathcal{F}| = x(x+1) + (2p-1-x)^2 = 2\left[x - \left(p - \frac{3}{4}\right)\right]^2 + 3p - \frac{5}{8}.$$

Ez a függvény egész x értékek között $p-1$-nél veszi fel minimumát. $x = p-1$ a $d(v_E, v_F)$ távolság maximumának helye ($\mathcal{Q}_p$-ben). Azaz a korábbi G_{4p-1} gráf megegyezik a $\mathcal{Q}_p$-ben az átme'rőnyi távolságra lévő pontpárok gráfjával.

Ebben azonban a legnagyobb független ponthalmaz mérete legfeljebb $\binom{4p-1}{p-1}$. De a csökkentett átmérőjű fedésnél minden fedő rész egy független ponthalmazt fed le. Így a szükséges részek száma legalább

$$\frac{\binom{4p-1}{2p-1}}{\binom{4p-1}{p-1}} = \frac{3p(3p-1)(3p-2)\dots(2p+2)(2p+1)}{(2p-1)(2p-2)(2p-3)\dots(p+1)p} = \\ = \frac{3p}{2p-1}\frac{3p-1}{2p-2}\frac{3p-2}{2p-3}\dots\frac{2p+2}{p+1}\frac{2p+1}{p} \geq 1.1^p.$$

A dimenzió $D = \binom{4p-1}{2} = (4p-1)(2p-1) = 8p^2 - 6p + 1$. A fenti becslés könnyen kifejezhető D segítségével, illetve a speciális dimenzió esete kiterjeszthető tetszőleges dimenzióra. A részletek kidolgozása nélkül megemlítjük a tételt.

2. Tétel (Kahn—Kalai-tétel). $B(d) \geq 1.001^{\sqrt{d}}$.

Ramsey-elmélet

Az $R(k)$ Ramsey-számok a kombinatorika egyik legközpontibb számsorozata. Megértésük komoly erőfeszítésekhez vezettek.

$R(k)$ azon maximális n csúcsszám, amelyhez létezik n pontú G_n gráf, melyre $\alpha(G_n)$ és $\omega(G_n)$ is k-nál kisebb (azaz a gráf és komplementere sem tartalmaz k pontú klikket).

Egy alternatív definíció: $R(k) + 1$ az a minimális n csúcsszám, amelyre garantálható, hogy minden n pontú G_n gráf tartalmaz k pontú klikket vagy k pontú független halmazt.

Egy inverz függvény: $\rho(n)$ az a maximális k méret, hogy garantálható minden n pontú G_n gráfre, hogy tartalmaz k pontú klikket vagy k pontú független halmazt.

A következő tétel két alaptételt foglal össze:

3. Tétel (Erdős, Ramsey tétel). *(i)* $(\sqrt{2})^k \leq R(k) \leq 4^k$,

(ii) $\frac{1}{2}\log_2 n \leq \rho(n) \leq 2\log_2 n$.

A fenti becslések mai napig a legjobbak (az α^k típusú függvények között). Mi most az alsó becslésekre koncentrálunk: Ezek nagyon egyszerűek. Egy $(\sqrt{2})^k$ vagy n pontú csúcshalmaz minden pontpárjára dobjunk fel egy érmét. Ha fej, akkor összekötjük őket, ha írás, akkor nem. Az így kapott valószínűségiváltozó (értéke egy gráf) bizonyítja a tételt: pozitív valószínűséggel nem tartalmaz k vagy $\frac{1}{2}\log_2 n$ méretű klikket és független ponthalmazt sem.

Az állítás bizonyítása volt az egyik hajtóerő, ami Erdős Pált a valószínűségszámítási módszer kifejlesztése felé vezette.

A bizonyításra a természetes mód azonban nem ez volt (különösen nem 1947-ben). Le kell írni, konstruálni kell egy G_n gráfot és meg kell becsülni a $\max\{\omega(G_n), \alpha(G_n)\}$ paramétert. (Ezt tette a valószínűségszámítási módszer konkrét G_n leírása nélkül. Az összes lehetséges G_n-ről állította, hogy egy generikus gráf a fenti értelemben jó.)

Ha valaki konstruál egy G_n gráfot (igazából persze gráfsorozatról beszélünk), amely $\max\{\omega(G_n), \alpha(G_n)\}$ paramétere jól becsülhető felülről, akkor konstruktív Ramsey-gráfokról beszélünk. Ezen irányban a fentieknél jóval gyengébb eredmények ismertek. Az áttörést itt is a halmazrendszerek elméletének alkalmazása jelentette.

Konstruktív Ramsey-gráfok

Definíció (Frankl—Wilson-gráf). Legyen p egy prímszám. Legyen $R_{FW}(p,\ell)$ a következő egyszerű gráf: Csúcsai egy ℓ-elemű V halmaz összes p^2-1 elemű részhalmaza. Két csúcs (V részhalmaza) akkor és csak akkor szomszédos, ha metszetük elemszáma p-vel osztva -1-et ad maradékul.

4. Tétel. $\max\{\omega(R_{FW}(p,\ell)),\alpha(R_{FW}(p,\ell))\} \leq \binom{\ell}{p-1}$

Bizonyítás. $\omega(R_{FW}(p,\ell)) \leq \binom{\ell}{p-1}$ egyszerűen adódik abból, hogy egy klikk ponthalmaza olyan halmazrendszert ad, amely metszetméretei $\{p-1, 2p-1, 3p-1, \ldots, (p-1)p-1\}$ halmazbeliek. Ray-Chaudhuri—Wilson-tétel adja a bizonyítandót.

$\alpha(R_{FW}(p,\ell)) \leq \binom{\ell}{p-1}$ becsléséhez egy független ponthalmaz csúcsaihoz tartozó halmazok rendszerét nézzük. Ebben minden metszetméret $\{0,1,2,\ldots,p-2,p,p+1,\ldots,2p-2,2p,2p+1,\ldots\}$ halmazbeli. Ez túl nagy halmaz, de modulo p nézve a metszetméreteket már csak egy $p-1$ elemű halmazt kapunk: $\{0,1,2,\ldots,p-2\}$. Ray-Chaudhuri—Wilson-tétel moduláris változata, a Frankl—Wilson-tétel adja a bizonyítandót. ■

5. Következmény. *Legyen p egy prímszám. Jelöljük k-val a $\binom{p^3}{p-1}$ értéket. Ekkor $R_{FW}(p,p^3)$ egy k pontú klikk és k pontú független halmaz nélküli gráf, amely csúcsszáma több mint*

$$e^{0.999\frac{\ln^2 k}{\ln\ln k}}.$$

A szükséges számolásokat az érdeklődő hallgatókra bízzuk.

Természetesen a valószínűségszámítási módszer (ma már csuklógyakorlatnak számító módon) $e^{\alpha\cdot k}$ pontszámon (jóval több csúcson) definiál egy ilyen gráfot. A fenti konstrukció csúcsszámának nagyságrendjét mind a mai napig nem sikerült megjavítani.