HALMAZRENDSZEREK

Matematika MSc hallgatók számára

1. Előadás

Előadó: Hajnal Péter
Jegyzetelő: Barsi Dóra 2010. február 2.

Alapfogalmak

Definíció. $\mathcal{H}$ halmazrendszer V felett, ha $\mathcal{H} \subseteq P(V)$ (azaz $\mathcal{H}$ a V-nek részhalmazainak egy halmaza.

Definíció. $\mathcal{H}$ hipergráf V felett egy hármas (V, E, I), ahol $V \subseteq V \times E$-nek egy illeszkedési reláció.

A gráfoknál már megismert alapfogalmakat többnyire természetesen általánosíthatók a halmazrendszerek, illetve a hipergráfok esetén. Ezek alapján V elemeit csúcsoknak, míg $\mathcal{H}$ elemeit éleknek nevezzük.

Egy $e \in E$ esetén $\{v \in V : vIe\}$ halmaz e végpontjainak tekintjük. Különböző $\in E$ esetén ezek a halmazok lehetnek ugyanazok. (azaz $e \neq \ \in E$, de a végpontjaik megegyezik.)

Definíció. Legyen $\mathcal{H}$ egy V feletti halmazrendszer, és legyen $x \in V$ az alaphalmaz egy eleme. x fokszáma az x-et tartalmazó élek száma. Jelölés: $d_{\mathcal{H}}(x) = |\{e \in \mathcal{H} : eIx\}|$.

Ekkor egy $v \circ V(G)$ esetén a gráfelméleti $d_G(v)$ fokszám és a halmazrendszerként tekintett $d_G(v)$ fokszám eltér, ha v-re illeszkedik.

1. Lemma. $\sum_{x \in V} d_{\mathcal{H}}(x) = \sum_{E \in \mathcal{H}} |E|$, *azaz a fokszámok összege megegyezik az élek összegével.*

Definíció. $\mathcal{H}$ halmazrendszer k-uniform, ha bármely $E \in \mathcal{H}$ él esetén $|E| = k$. ($\mathcal{H}$ elemei k elemű halmazok).

Az egyszerű gráfok azonsíthatók a 2-uniform halmazrendsyerekkel.

Steiner-rendszerek

Legyen $v := |V|$.

Definíció. $\mathcal{S}$ halmazrendszer V felett Steiner-rendszer, ha 3-uniform halmazrendszer, amelynek alaphalmaza bármely két különböző pontját egy halmazrendszerbeli hármas tartalmazza.

Az alábbiakban egy alternatí leírását adjuk a Steiner-rendszereknek.

Definíció. K_v (v ponton teljes gráf) éleinek háromszögekre való particionálását nevezzük háromszög-bontásnak. A háromszög-bontás esetén az ott szereplő háromszögek élei diszjunktak és uniójuk megegyezik $E(K_v)$-val.

Egyszerű belátni, hogy akkor és csak akkor létezik Steiner-rendszer v ponton, ha K_v-nek van háromszög-bontása.

<u>Alapkérdés:</u> Milyen v-kre létezik Steiner-rendszer?

2. Lemma. *Ha létezik $\mathcal{S}$ Steiner-rendszer v-ponton, akkor $2|v-1$ és $3|v \cdot (v-1)$.*

Bizonyítás. Vegyük K_v egy háromszög-bontását. Ekkor a $v(v-1)/2$ élt három elemű csoportokba osztályoztuk. Továbbá minden csúcsnál az ott összefutó $v-1$ élt párokba osztottuk. □

Megjegyzés. A fenti lemma (egyelőre szükséges) feltételeit oszthatósági feltételeknek nevezzük. Könnyű számlámélet adja, hogy a feltétek ekvivalensek azzal, hogy $v \equiv 1, 3 \pmod 6$.

Példa. A $v = 1, 3$ ponton létezik Steiner-rendszer.

Feladat. A $v = 2, 4, 5, 6$ pontban nem létezik v-pontú Steiner-rendszer.

Példa. A $v = 3^k$ pontban is létezik, mert $V = \mathbb{Z}_3^k$ csoport és elemein a $\mathcal{S} = \{\{x, y, z\} : x, y, z \in \mathbb{Z}_3^k, x + y + z = 0\}$ egy Steiner-rendszer.

Példa. $v = 7$ ponton létezik Steiner-rendszer: Fano-sík.

Példa. $v = 9$ ponton létezik Steiner-rendszer: 3 paraméterú affin sík.

Feladat. $v = 13$ ponton létezik Steiner-rendszer.

A fenti példák talán sugalják, hogy az oszthatósági feltételek elégségesek is a Steiner-rendszer létezéséhez. Ez így is van. Ezt a *Steiner-rendszer alaprtételének* nevezzük. Az alábbiakban célunk v pontú Steiner-rendszer megadása. Minél több módszert szeretnénk mutatni ilyen konstrukcióra.

Steiner-rendszerek elemi konstrukciói

Az alábbi lemma hasznosnak bizonyul:

3. Lemma. *K_{2k+1} élei felbonthatók $2k+1$ darab majdnem teljes párosítás uniójára ($\chi_e(K_{2k+1}) = 2k + 1$).*

Bizonyítás. A csúcsokat egy szabályos $2k + 1$-szög csúcsai reprezentálják. Minden oldalhoz tartozzon egy majdnem teljes párosítás: az oldallal párhuzamos átlók (a kiinduló oldalt is áltónak tekintjük és az általa definiált pároításnak eleme lesz). Egyetlen pont lesz párosítatlan: a sokszög kiinduló oldallal szemközti csúcsa. A fenti mejdnem telje párosításk a lemmát igazolják. □

4. Következmény. *A $v = 6k + 3$ esetén létezik Steiner-rendszer.*

Bizonyítás. Vegyünk három darab K_{2k+1} teljes gráfot. Ezek legyenek K, K^+, K^{++}. A három teljes gráf körszerűen rendezve van: A K gráf egy v csúcsának megfelel v^+ csúcs K^+-ban. Ez v rákövetkezője. v^+ rákövetkezője v^{++}, amely rákövetkezője v.

Alkalmazzuk a három teljes gráfra a lemmát. A majdnem teljes párosít'asokat színekkel kódoljuk: Mindegyikben lesz egy piros pont, piros élek, kék pont és kék éleket stb. A piros csúcs rákövetkezője a következő gráf piros csúcs, a piros élek rákövetkezői a következő gráf piros élei és így tovább.

Legyen a $\mathcal{S}$ rendszer élei:

(i) {a három piros pont}, {a három kék pont}, $\ldots \to$ Ez $2k+1$ darab hármas.

(ii) { piros pont és rákövetkezőben valamely piros él két végpontja }, { kék pont és rákövetkezőben valamely kék él két végpontja }, $\ldots \to$ Ez $v \cdot k$ darab hármas.

5. Állítás. *$\mathcal{S}$ Steiner-rendszer.*

Valóban: Minden $x, y \in V$ különböző csúcspárra megadható rajtuk átmenő él. Továbbá a hármasok száma a várt $(v(v-1)/6)$.

A befejezést az érdeklődő hallgatóra bízzuk:

Feladat. $\mathcal{S}$ Steiner-rendszer V felett, ha $|\mathcal{S}| = \frac{\binom{v}{2}}{3}$ és minden pontpáron át halad él.

□

Steiner-rendszerek számelméleti konstrukciója

Legyen $v = 6k+1$ prím. Legyen $V = \mathbb{F}_v = \{0, 1, \ldots v-1\}$, ahol az alaphalmazt a mod v aritmetikával látjuk el. Legyen $\mathbb{F}_v = \{0\} \dot\cup Q \dot\cup \overline{Q}$, ahol Q a kvadratikus-maradékok (mod q nem-nulla négyzetszámok, azaz azon $a \neq 0$ elemek V-ből, amelyekre $x^2 = a$ megoldható) halmaza, továbbá $\overline{Q}$ a kvadratikus-nem-maradékok halmaza. Az $\mathbb{F}_v^*$ a v elemű test multiplikatív csoportja, egy ciklikus csoport, azaz alkalmas $g \in \mathbb{F}_v^*$ elemre, hogy $\mathbb{F}_v^* = \{g, g^2, \ldots g^{p-1}\}$. Ekkor $g^{p-1} = g^{6k} = 1$ és $q^{3k} = q^{\frac{p-1}{2}} = -1$.

A konstrukciónakt néhány alapháromszög leírásával kezdjük. Legyen

$$T_i = \{g^i, g^{i+2k}, g^{i+4k}\},$$

ahol $1 \leq i \leq k$.

Példa. $p = v = 13$, $k = 2$ esetén

$$\mathbb{F}_{13}^* = \{2, 4, 8, 3, 6, 12, 11, 9, 5, 10, 7, 1\}$$

$$T_1 = \{2, 5, 6\}$$

$$T_2 = \{4, 10, 12\}$$

Észrevétel. A példában a két alapháromszöget a szabályos 13-szög csúcsain ábrázoljuk a standard módon, akkor a kombinatorikus oldalhosszak (6 darab) az összes kombinatorikus átlóhosszat egyszeresen reprezentálják.

Így az alapháromszögek elforgatottjai Steiner-rendszert alkotnak. Ez az ötletet valósítjuk meg tetszőleges olyan ponthalmazon, amely elemszáma $6k+1$ alakú prímszám.

6. Tétel. *Az észrevétel minden $v = p = 6k+1$ esetén igaz. Azaz az alapháromszögek $3k$ darab oldala különböző hosszú.*

Bizonyítás. Valóban: Legyen $g^{i+\varepsilon\cdot 2k}, g^{i+(\varepsilon+1)\cdot 2k}$ és $g^{j+e\cdot 2k}$, $g^{j+(e+1)\cdot 2k}$ két alapháromszög egy-egy oldala ($\varepsilon = e \in \{0,1,2\}$ és $1 \le i,j \le k$). A két oldal különbözősége $(i,\varepsilon) \ne (j,\ell)$-vel ekvivalens.

A bizonyítandó

$$g^{i+\varepsilon\cdot 2k} - g^{i+(\varepsilon+1)2k} \ne \pm(g^{i+e\cdot 2k} - g^{j+(e+1)\cdot 2k}).$$

Rendezéssel (osztva a $1-g^{2k}$ nem-nulla számmal) kapjuk a következő ekvivalens formát:

$$g^{i+\varepsilon\cdot 2k} \ne \pm g^{j+e\cdot 2k}.$$

Azaz $g^{3k} = -1$ felhasználásával

$$g^{i+\varepsilon\cdot 2k} \ne g^{j+e\cdot 2k} \qquad \text{és} \qquad g^{i+\varepsilon\cdot 2k} \ne g^{j+e\cdot 2k+3k}.$$

Az első egyenlőtlenség könnyen adódik a $(i,\varepsilon) \ne (j,\ell)$ feltevésből. A második is könnyen meggondolható. □

7. Következmény. *Minden olyan alaphalmazon, amely elemszáma $6k+1$ alakú prímszám létezik Steiner-rendszer.*

Skolem-konstrukció

Definíció. Skolem-párosítás $\{1,2,\ldots 2n\}$ párosítása úgy, hogy a párokban lévő számpárok távolsága rendre $1,2,\ldots,n$ legyen.

Milyen n pozitív egészre van Skolem-párosítás?

Példa. $n = 1$ esetén van Skolem-párosítás. persze csak egy pár lehet: 12 és ezek távolsága egy (ahogy kell).

Példa. Az $n = 4, 6$ esetében nincs Skolem-párosítás.

Példa. Az $n = 8$ esetében 12, 46, 58, 37 egy Skolem-párosítás. Itt a számpárokban a távolságok rendre 1,2,3,4.

8. Lemma (Skolem-párosítások oszthatósági feltétele). *Ha létezik Skolem-párosítás az $\{1,2,\ldots,2n\}$ halmazon, akkor $n \equiv 0,1 \pmod 4$ igaz.*

Bizonyítás. Létezik Skolem-párosítás $\{1,2,\ldots,2n\}$-en akkor a párosítás az alaphalmazt felbontja két részre: $A\dot\cup F$, ahol A az egyes párok kisebb elemeinek halmaza, F az egyes párokból a nagyobb elemek halmaza.

Ekkor

$$\sum F = \sum_{a\in A}(a+\ell(a)) = \sum A + \frac{n(n+1)}{2},$$

ahol $\ell(a)$ az a elem és párjának távolsága.

Másrészt

$$\sum_{i=1}^{2n} i = \sum F + \sum A = 2\sum A + \frac{n(n+1)}{2}.$$

Ez utóbbi egyenlőség rendezve $n \equiv \frac{n(n+1)}{2} \pmod 2$. Elemi számelmélet fejezi be a lemma bizonyítását. □

9. Tétel (Skolem tétele, Skolem-párosítások alaptétele). *Ha n-re teljesül a Skolem-párosítások oszthatósági feltétele, akkor létezik Skolem-párosítás $\{1, 2, \ldots, 2n\}$-en.*

Ezt nem bizonyítjuk.

Könnyű látni, hogy $\{1, 2, \ldots, 2n\}$-en akkor és csak akkor létezik Skolem-párosítás, ha $\{k, k+1, \ldots, k+2n-1\}$-en létezik Skolem párosítás. Ez utóbbi pároitásból viszont könnyű alapháromszögeket definiálni a $\{0, 1, 2, 3, \ldots, 6n\}$ halmazon: Minde párhoz hozzáadjuk a 0 elemet egy hármas képzéséhez. Az így kapott n darab alapháromszög kombinatorikus oldalhosszai reprezentálják a $3n$ darab lehetséges átlóhosszat. Így elforgatottjai egy Steiner-rendszert adnak.

Eredményeinket a következő állítások foglalják össze.

10. Lemma. *Ha $\{1, 2, \ldots, 2n\}$-en létezik Skolem-párosítás, akkor a $\{0, 1, 2, 3, \ldots, 6n\}$ halmazon létezik Steiner-rendszer.*

11. Következmény. *A $v = 24k + 1$ és $v = 24k + 7$ elemű ponthalmazon létezik Steiner-rendszer.*

Steiner-rendszerek algebrai-konstrukciói

$\mathcal{S}$ Steiner rendszer legyen a $(V, \circ)$ a következő struktúra:

$$x \circ y = \begin{cases} x, & \text{ha } x = y, \\ z, & \text{ha } x \neq y \text{ és } \{x, y, z\} \in \mathcal{S}. \end{cases}$$

A következő lemma foglalja össze a fent definiált $\circ$ művelet alaptulajdonságait.

12. Lemma. $(V, 0)$ *csoport tulajdonságai:*

(i) $x \circ x = x$, *azaz* $\circ$ *idempotens,*

(ii) $x \circ y = y \circ x$, *azaz* $\circ$ *kommutatív,*

(iii) $x \circ (x \circ y) = y$, *ezt* $\circ$ *Steiner-tulajdonságának nevezzük.*

Az (ii) és (iii) állításokból következik, hogy $x \circ \alpha = y$ és $\alpha \circ x = y$ megoldható minden x, y-ra. Az ilyen struktúrákat kvázi-csoportoknak nevezzük. Tehát a Steiner-rendszerekből speciális kvázi-csoportokat definiáltunk.

Feladat. Ha van V-n idempotens, kommutatív, Steiner-művelet, akkor létezik V-n Steiner-rendszer.