HALMAZRENDSZEREK

Matematika MSc hallgatók számára

11. Előadás

Előadó: Hajnal Péter
Jegyzetelő: Hajnal Péter 2010. április 27.

Emlékeztető. Erdő—Ko—Rado-tétel.

Kezdeti extremális tételek metszetfeltételekkel

Az Erdős—Ko—Rado-tétel egy értelmezése, hogy ha egy k-uniform halmazrendszer metszetméretei (az éleiből két különbözőt az összes lehetséges módon metszve és elemszámaikat összegyűjtve) az $\{1, 2, \ldots, k-1\}$ halmazbeli számokat kapunk (azaz csak a 0 lehetséges metszetméretet tiltjuk), akkor az élek száma nem lehet $\binom{n-1}{k-1}$-nél nagyobb.

A metszetméretek korlátozásával változatos tételeket kapunk. Ezek önmagukban is szépek, de nagyon fontos alkalamzásokkal is bírnak. Először ismertetjük a történetileg első néhány ilyen jellegű tételt.

1. Tétel (Erdős—de Bruijn-tétel). *Legyen $\mathcal{H}$ egy halmazrendszer V felett, amely bármely két élének metszete egyelemű. Ekkor*

$$|\mathcal{H}| \leq |V|.$$

Továbbá egyenlőség, akkor és csak akkor, igaz ha $\mathcal{H}$ a következő lehetőségek egyikébe esik:

a) Egy x elemet tartalmazó összes egy- és kételemű halmaz.

b) Egy x elemet tartalmazó összes kételemű halmaz és az x-et nem tartalmazó $|V| - 1$ elemű halmaz. (Az ilyen halmazrendszereket elfajuló projektív síknak nevezik.)

c) Projektív síkok.

Uniform halmazrendszerekre gyengébb feltételek mellett is garantálhatjuk ugyanezt a felső becslést az élszámra.

2. Tétel (Fisher-egyenlőtlenség). *Legyen $\mathcal{H}$ egy uniform halmazrendszer V felett, amely bármely két élének metszetének elemszáma ugyanaz. Ekkor*

$$|\mathcal{H}| \leq |V|.$$

A Fisher-egyenlőtlenség Bose-féle bizonyításának módszere vezette be a lineáris algebra módszerét a halamzrendszerek kutatásába. A módszer a feltételek gyöngítését is lehetővé teszi.

3. Tétel (nem-uniform Fisher-egyenlőtlenség). *Legyen $\mathcal{H}$ egy halmazrendszer V felett, amely bármely két élének metszetének elemszáma ugyanaz a μ szám. Ha $\mu > 0$, akkor*

$$|\mathcal{H}| \leq |V|.$$

Ez a tétel az Erdős—de Bruijn-tétel egy általánosítása is (nem számolva az extremális halmazrendszerek leírását).

Bizonyítás. Először egy technikai megjegyzést teszünk. Ha halmazrendszerünkben egy E élt tartalmaz egy F másik, akkor készen vagyunk: E elemszámának μ-nak kell lenni, minden élnek tartalmazni kell E-t. Az élek E komplementeréből ($n-\mu \leq n-1$ darab csúcs) diszjunkt halmazokat metszenek ki. Így legfeljebb $1+(n-\mu)$ halmazunk lehet. A továbbiakban feltesszük, hogy semelyik él sem tartalmaz másik élt, azaz az élek mérete szigorúan nagyobb mint μ.

Definiálunk egy mátrixot. Sorai és oszlopai is $\mathcal{H}$ éleivel vannak azonosítva. Egy E él sorának és egy F él oszlopának talákozásában álljon $\chi_e \cdot \chi_F$, a két él karakterisztikus vektorának skaláris szorzata. Erre a mátrixra, mint skalárszorzat-mátrixként hívatkozunk.

A mátrix főátlójában az élméretek (μ-nál nagyobb számok) állnak, azon kívül minden elem értéke μ. Belátjuk, hogy a skalárszorzat-mátrix nem elfajuló. Ekkor könnyen látható, hogy a $\{\chi_e : E \in \mathcal{H}\}$ vektorrendszer lineárisan független (lineáris függés a belsőszorozatok között is adna egy függőséget, ami a belsőszorzat-mátrix elfajultságát adná). Vektorain egy $|V|$-dimenziós térben vannak, így a vektoraink száma ($|\mathcal{H}|$) nem haladhatja meg ezt.

A bizonyítást állításunknál egy kissé absztraktabb lemma fejezi be.

4. Lemma. *Legyen M egy olyan négyzetes mátrix, ami minden főátlón kívüli elemének értéke ugyanaz a pozitív t szám, míg főátlójában t-nél nagyobb számok állnak. Ekkor M nem elfajuló.*

Tegyük fel, hogy a sorok egy nem-triviális lineáris kombinációja 0-t ad. A sorokat $(1,1,\ldots,1) + \alpha_E e_E = j + \alpha_E e_E$ alakba írhatjuk, ahol e_E minden komponense 0, kivéve az E-nek megfelelőt, ahol 1 áll, továbbá α_E pozitív. Ezeket a vektorokat kell nem triviálisan súlyozni úgy, hogy minden koordinátában 0-t kapjunk. Az első tagok (a j-k) mindegyik koordinátában ugyanazt a hozzájárulást adják, a második tagok közül mindegyik koordinátában csak az egyik hat és annak le kell nullázni az első tagokból jövő közös értéket, azaz ugyanabba az irányba kell hatniuk. Mivel az α_i-k pozitívak, ez csak úgy lehet, ha mindegyik súlyozó együttható vagy mind pozitív, vagy mind 0, vagy mind negatív. Ez viszont ellentmondás, mert egy nem-negatív értékekkel rendelkező mátrix soraiból ilyen módokon (a triviális kivételével) nem lehet a nullvektort kikombinálni. ■

Az Erdős—de Bruijn-tétel azon részét, amely az extremális halmazrendszereket írja le nem bizonyítjuk (a lineáris algebrai módszerből ez nem adódik, más megközelítésre van szükség).

A lineáris algebrai módszer későbbi alkalmazásai

A fentiekben a metszetméretek halmaza egyelemű volt. Ez általánosítható.

5. Tétel (Frankl—Wilson-tétel). *Legyen $\mathcal{H}$ egy halmazrendszer. Tegyük fel, hogy a metszetméretek mindegyike az $M = \{\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_s\}$ halmazbeli. Ekkor*

$$|\mathcal{H}| \leq \binom{|V|}{s} + \binom{|V|}{s-1} + \binom{|V|}{s-2} + \dots + \binom{|V|}{1} + \binom{|V|}{0}.$$

Megjegyzés. A felső becslésünk éles, amit a $\mathcal{H} = \binom{V}{\leq s}$ és $M = \{0, 1, 2, \dots, s-1\}$ példa mutat.

Bizonyítás. Definiálunk egy $\mathcal{H} \times \mathcal{H}$ négyzetes mátrixot. Az E-sort azonosítsuk az E él χ_E karakterisztikus vektorával. Az F-oszlopot azonosítsuk a

$$p_F = \prod_{m: m \in M, m < |F|} (\chi_F \cdot x - m)$$

polinommal. Vegyük a kiértékelési mátrixot ,azaz azt a mátrixot, amelyre

$$M_{EF} = \prod_{m: m \in M, M < |F|} (\chi_F \cdot \chi_E - m).$$

A sorokat (és velük összhangban az oszlopokat) rendezzük méret szerint csökkenő sorrendben. Ekkor könnyű észrevenni, hogy egy alsó trianguláris mátrixot kapunk, nem-nulla elemekkel a főátlón. Valóban, a főátlón

$$M_{EE} = \prod_{m: m \in M, M < |E|} (\chi_E \cdot \chi_E - m) = \prod_{m: m \in M, m < |E|} (|E| - m),$$

ami nem-nulla. A főátló felett (sor/oszlopsorrendünk miatt $|E| \geq |F|$)

$$M_{EF} = \prod_{m: m \in M, M < |F|} (\chi_F \cdot \chi_E - m) = \prod_{m: m \in M, m < |F|} (|E \cap F| - m),$$

ami nulla, hiszen $|E \cap F| \in M$ és $|E \cap F| < |F|$.

Speciálisan mátrixunk nem-elfajuló, így oszlopaihoz rendelt polinomok lineárisan függetlenek. A polinomjaink terére adható „felső becslés” azonban túl nagy dimenziós. Egy trükkre/észrevételre van szükségünk.

Egy $p = \sum_{i \in I} \alpha_i m_i(x_1, x_2, \dots, x_n)$ polinom multilinearizáltja legyen

$$p^{multilin} = \sum_{i \in I} \alpha_i m_i^{multilin}(x_1, x_2, \dots, x_n),$$

ahol az $m = x_1^{\ell_1} x_2^{\ell_2} \cdot \ldots \cdot x_n^{\ell_n}$ monom $m^{multilin}$ multilinearizáltja $\prod_{i: \ell_i \geq 1} x_i$, azaz minden monomban az egynél nagyobb kitevőket lekerekítjük 1-re. Vegyük észre, hogy M definíciójában polinomjaink kiértékelésénél 0-1 értékeket adunk. Így, ha az oszlopainknak a $\widetilde{p}_F = p_F^{multilin}$ polinomokat feleltetjük meg, akkor ugyanazt a kiértékelési mátrixot kapjuk, ugyancsak következtethetünk lineáris függetlenségükre. A $\{p_F^{multilin} : F \in \mathcal{H}\}$ polinomhalmaz a

$$\langle x_{i_1} x_{i_2} \cdot \ldots \cdot x_{i_t} : i_1 < i_2 < \ldots < i_t, t \leq s \rangle$$

lineáris térben van, így lineárisan független rendszerünk elemszáma ($|\mathcal{H}|$) legfeljebb a fenti tér dimenziója $\binom{|V|}{s} + \binom{|V|}{s-1} + \ldots + \binom{|V|}{1} + \binom{|V|}{0}$ (lásd az őt leíró generátorhalmaz méretét). Éppen a bizonyítandót kaptuk. ■

k-uniform esetben egy kicsit többet is állíthatunk. Felső becslésünk vszint nem szükségszerűen éles, az Erdős—Ko—Rado-tétel feltételei mellett kevesebbet állít, mint ami állítható.

6. Tétel (Ray-Chaudhuri—Wilson-tétel). *Legyen $\mathcal{H}$ egy k-uniform halmazrendszer. Tegyük fel, hogy a metszetméretek mindegyike az $M = \{\mu_1, \mu_2, \dots, m_s\} \subset \{0, 1, 2, \dots, k-1\}$ halmazbeli. Ekkor*

$$|\mathcal{H}| \leq \binom{|V|}{s}$$

Bizonyítás. Legyen $\widehat{M}$ egy négyzetes mátrix, amely első $|\mathcal{H}|$ sora/oszlopa az élekkel (továbbiakban régi sorok/oszlopok), a többi (továbbiakban új sorok/oszlopok) a V csúcshalmaz legfeljebb $s-1$ elemű részhalmazával van indexelve (mérete $(|\mathcal{H}| + \binom{|V|}{s-1} + \ldots + \binom{|V|}{0}) \times (|\mathcal{H}| + \binom{|V|}{s-1} + \ldots + \binom{|V|}{0}))$. Mindkét blokkban elemszám szerinti csökkenő sorrendben vesszük a sorokat/oszlopokat. A sorokat azonosítsuk a megfelelő csúcshalmaz karakterisztikus vektorával. Egy F él-oszlop ugyanazzal a $p_F^{multilin}$ polinommal legyen azonosítva, míg egy R legfeljebb $s-1$ elemű csúcshalmaz oszlopa a $p_R = (\sum_{i=1}^n x_i - k) \prod_{i \in R} x_i$ polinommal azonosított (illetve ennek multilinearizáltjával). $\widehat{M}$ a kiértékelési mátrix lesz, ($\widehat{M}$ bal felső sarkában ott van az előző tétel M mátrixa).

Azt állítjuk $\widehat{M}$ is felső trianguláris mátrix nem-nulla elemekkel. A régi sorok új oszlopnak a pozíciójában a $\sum_{i=1}^n x_i - k$ faktor miatt nulla értékűek lesznek. Ha egy E új sornak vesszük későbbi F-nek ($|E| \geq |F|$) megfelelő új oszlop pozíciójában álló elemét, akkor $\prod_{i \in F} x_i$ miatt lesz 0 a mátrixelem. A főátlóbeli elemek nem-nulla mivoltának ellenőrzését az olvasóra bízzuk.

Ismét kapjuk a mátrixunk nem-elfajulóságát, az oszlopokhoz rendelet polinomok lineáris függetlenségét. Számuk most $|\mathcal{H}| + \binom{|V|}{s-1} + \ldots + \binom{|V|}{0})$. Viszont ugyanabban a térben vannak mint korábban, így akkori felső becslésünk érvényes lesz. Rendezés után a tétel következik. ■

Moduláris tételek

Az algebrailag képzett olvasó érezheti, hogy kevés helyen használtuk, hogy valós számtest felett dolgozunk. Más testek felett is kimondhatunk hasonló tételeket. Különösen fontosak a véges tetsetkre vonatkozó tételek.

Csak megjegyzésekben vázoljuk, hogy hogyan kell korábbi bizonyításainkat módosítanunk.

7. Tétel (Deza—Frankl—Singhi-tétel). *Legyen $\mathcal{H}$ egy halmazrendszer. Legyen p egy prímszám. Tegyük fel, hogy a metszetméretek mindegyikét modulo p véve (a $\{0, 1, 2, \dots, p-1\}$ standard teljes maradékrendszerrel dolgozva) az $M = \{\mu_1, \mu_2, \dots, m_s\} \subset \{0, 1, 2, \dots, p-1\}$ halmazbeli értéket kapunk. Továbbá feltesszük, hogy az élméretek modulo p értéke nem esik M-be. Ekkor*

$$|\mathcal{H}| \leq \binom{|V|}{s} + \binom{|V|}{s-1} + \binom{|V|}{s-2} + \ldots + \binom{|V|}{1} + \binom{|V|}{0}.$$

Megjegyzés. Természetesen a korábbi gondolatmenetet követjük, de az $\mathbb{F}_p$ test felett dolgozunk.

Most minden F oszlop esetén dolgozhatunk a $p_F = \prod_{m \in M}(\chi_F \cdot x - m)$ polinommal. Az élméretekre vonatkozó (nem modulários esethez viszonyítva új) feltételt azért tettük, hogy a főátlón garantáltan nem nulla értékek legyenek. Korábbi trükkünk (sorok/oszlopok ügyes rendezése, polinomjaink trükkös definíciója) nem is működne a moduláris esetben.

8. Tétel (Frankl—Wilson-tétel). *Legyen $\mathcal{H}$ egy k-uniform halmazrendszer. Legyen p egy prímszám. Tegyük fel, hogy a metszetméretek mindegyikét modulo p véve (a $\{0, 1, 2, \ldots, p-1\}$ standard teljes maradékrendszerrel véve) az $M = \{\mu_1, \mu_2, \ldots, m_s\} \subset \{0, 1, 2, \ldots, p-1\}$ halmazbeli. Mindegyik élmérte modulo p véve $k \in \{0, 1, 2, \ldots, p-1\}$ értéket kapunk, ami nem eleme M-nek. Továbbá $k \notin \{0, 1, 2, \ldots, s-1\}$. Ekkor*

$$|\mathcal{H}| \leq \binom{|V|}{s}$$

Megjegyzés. Az előző tétel mátrixát kell ugyanúgy kiterjeszteni, mint korábban. Az új sorokban lenne probléma a főátló feletti értékekkel, ha a $k \notin \{0, 1, 2, \ldots, s-1\}$ feltételt nem tettük volna. Így nincs probléma.