HALMAZRENDSZEREK

Matematika MSc hallgatók számára

10. Előadás

Előadó: Hajnal Péter
Jegyzetelő: Hajnal Péter 2010. április 20.

Halmazrendszerek színezése

Egy halmazrendszer csúcshalmazának színezése jó színezés, ha nem lesz monokromatikus él, azaz minden él tartalmaz két különböző színű csúcsot. $\chi(\mathcal{H})$ a $\mathcal{H}$ halmazrendszer jó színezéséhez szükséges színek minimális száma.

A színezések kérdését éppen csak érintjük. A 2-színezhetőségre vonatkozó alaptételeket ismertetjük (ekkor piros-kék színekkel dolgozunk). A 2-színezhetőség fogalmát végtelen halmazrendszerekre már Bernstein vizsgálta a XX. század elején. Kombinatorikus vizsgálatukat Erdős Pál kezdte meg, aki Berstein tiszteletére B-tulajdonságúaknak nevezte azon $\mathcal{H}$ halmazrendsereket, amelyekre $\chi(\mathcal{H}) \leq 2$.

Erdős Pál módszere

A következő tétel a Ramsey-számok alsó becslése mellett az egyik bevezető példája a valószínűségszámítási módszernek.

1. Tétel (Erdős Pál). *Legyen $\mathcal{H}$ egy k-uniform halmazrendszer. Ha $|\mathcal{H}| \leq 2^{k-1}$, akkor $\chi(\mathcal{H}) \leq 2$.*

Bizonyítás. Legyen c egy véletlen piros-kék színezése V-nek (az alaphalmaznak). Erre tekinthetünk úgy, mint a $2^{|V|}$ elemű összes színezést tartalmazó halmazból uniform eloszlással választott elem. Vagy tekinthetünk úgy, hogy minden csúcs függetlenül 1/2-1/2 valószínűséggel piros, illetve kék színt kap. (Egy fair érmét dobunk fel, az érmedobás kimenetele dönti el a színezést.)

Legyen P_E, K_E illetve M_E az az esemény, hogy az E él minden csúcsa piros, minden csúcsa kék illetve minden csúcsa ugyanazt a színt kapja (ez utóbbi esetben mondjuk azt, hogy E monokromatikus). Nyilván $\mathbb{P}[K_E] = \mathbb{P}[P_E] = 1/2^k$, és így

$$\mathbb{P}[M_E] = \mathbb{P}[P_E \dot\cup R_E] = \frac{1}{2^k} + \frac{1}{2^k} = \frac{2}{2^k} = \frac{1}{2^{k-1}}.$$

Legyen R az az esemény, hogy c nem jó színezés. Azaz $R = \cup_{E\in\mathcal{H}} M_E$. Ekkor

$$\mathbb{P}[R] = \mathbb{P}[\cup_{E\in\mathcal{H}} M_E] < \sum_{E\in\mathcal{H}} \mathbb{P}[M_E] = |\mathcal{H}| \cdot \frac{1}{2^{k-1}} \leq 1.$$

Az egyetlen szigorú egyenlőtlenség szorul csak magyarázatra. Ez viszont nyilvánvaló az alábbiakból: Az M_E események persze nem diszjunktak, a „minden piros szint kap” esemény egy pozitív valószínűségű esemény az összes M_E esemény metszetében.

A nem jó színezés valószínűsége 1-nél kisebb. Így szükségszerű, hogy legyen $\mathcal{H}$-nak jó színezése. (Tudjuk, hogy van ilyen, anélkül hogy láttunk volna egyet.) ■

Az élszám korlát határai

Majd látjuk, hogy a fenti tétel élesíthető. A következőkben az élesítesék határát szeretnénk kitapogatni. Milyen kevés k-elemű élből rakhatunk össze egy halmazrendszert úgy, hogy ne legyen 2-színezhető?

Egy jó konstrukció, ha egy legalább $2k-1$ elemű V halmaz összes k-asát vesszük. Tetszőleges piros-kék színezés esetén a nagyobb színosztály legalább k csúcsot tartalmaz, amelyben minde k-as él is egyben. Az élszám nagyságrendje 4^k (akkor, ha $|V| = 2k-1$).

Ennél jobb konstrukció is adható, ha egy kicsit nagyobb V esetén a fenti példát ügyesen „kiritkítjuk”.

Legyen $\mathcal{H}_0 = \binom{V}{k}$. Definiálunk egy $\mathcal{S}$ segéd-halmazrendszert: $\mathcal{H}_0$ élei alkotják az alaphalmazát. V minden piros-kék színezéséhez tartozik egy él: a monokromatikusan színezett $\mathcal{H}_0$-beli halmazok. $\mathcal{S}$-et azért definiáltuk, hogy lássuk ha $\mathcal{H}_0$ éleit elkezdjük eldobálni/ritkítani, akkor meddig mehetünk el, hogy a nem-2-színezhetősége megmaradjon. Nyilván egy lefogó halmaznak mindig meg kell maradni: V bármelyik 2-színezésénél legyen olyan k-as, ami egyszínű. Más feltétel nincs is. Milyen kicsi lehet $\mathcal{S}$ egy lefogó halmaza? „$\tau(\mathcal{S}) =?$”, pontosabban „$\tau(\mathcal{S}) \leq ?$”.

Igazából $\tau^*(\mathcal{S})$ felső becslése lesz egyszerű. A szokásos uniform súlyozással veszünk egy tört-lefogást. Ennek mérete felülről becsli a $\tau^*(\mathcal{S})$ paramétert. A közös súly persze $1/s(\mathcal{S})$, ahol s a legkisebb élméret-paraméter.

Könnyű igazolni, hogy a legkisebb él (V piros-kék színezésének) mérete (általa monokromatikusan színezett k-asok száma) akkor lesz a legkisebb, amikor annyira egyenletes a színelosztás, amennyire lehetséges (a piros és kék csúcsok száma is $\lfloor |V|/2 \rfloor$ és $\lceil |V|/2 \rceil$ közül kerül ki). Azaz $s(\mathcal{S}) \geq 2\binom{|V|/2}{k}$,

$$\tau^*(\mathcal{S}) \leq \binom{|V|}{k} \cdot \frac{1}{2\binom{|V|/2}{k}}.$$

Hol tartunk? Úgy tűnik a szerzett információk nem illenek össze: $\tau(\mathcal{S})$-t szeretnénk kicsinek tudni, de $\tau^*(\mathcal{S})$-ről ($\leq \tau(\mathcal{S})$) derült ez ki. Egy korábbi tételre kell emlékeznünk, hogy eddigi bizonyításrészeink összeálljanak.

Emlékeztető.

$$\frac{\tau_{\text{mohó}}}{\tau(\mathcal{H})} \leq \frac{\tau_{\text{mohó}}}{\tau^*(\mathcal{H})} \leq 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{\Delta(\mathcal{H})} \leq 1 + \ln \Delta(\mathcal{H}).$$

Az általános tételt $\mathcal{S}$-re alkalazva speciálisan kapjuk, hogy

$$\tau(\mathcal{S}) \leq (1 + \ln \Delta(\mathcal{S}))\tau^*(\mathcal{S}).$$

$\Delta(\mathcal{S})$ kiszámolása egyszerű feladat. Egy E csúcson azon élek haladnak, amik E-t egyszínűvé tevő színezésekhez tartoznak. Az ilyenek felsorolásához az E-n kívüli $|V|-k$ darab csúcs esetén kell eldöntenünk, hogy színük E közös színével megegyező vagy tőle különböző legyen. Speciálisan $\mathcal{S}$ reguláris és $\Delta(\mathcal{S}) = 2^{|V|-k}$.

Összegezve

$$\tau(\mathcal{S}) \leq (1 + \ln 2^{|V|-k}) \cdot \binom{|V|}{k} \cdot \frac{1}{2\binom{|V|/2}{k}}.$$

A $|V| = k^2$ választással élve kapjuk, hogy $\tau(\mathcal{S}) \leq 10k^2 \cdot 2^{k-1}$ (a számolást mellőzzük). A következő tétel összefoglalja eredményeinket.

2. Tétel. *Van olyan $10k^2 \cdot 2^{k-1}$-nál nem több élű k-uniform halmazrendszer, ami nem 2-színezhető.*

Pluhár András tétele

A fenti eredmény nem túl sok helyet ad Erdős alaptételének javítására. Technikailag igen igényes módszerekkel (15 évvel az Erdős eredmény után) Beck József mégis javította az eredményt: $\alpha\sqrt[3]{n} \cdot 2^{n-1}$ él esetén tudta garantálni a 2-színezhetőséget. A jelenlegi legjobb eredmény $\beta\sqrt{\frac{n}{\log n}} \cdot 2^{n-1}$ él esetén állít 2-színezhetőséget. Mi egy későbbi, gyengébb becslés esetén (de Erdős tételénél jóval több él jelenléte mellett) bizonyítjuk a 2-színezhetőséget. A bizonyítás egyszerűsége vetélkedik az eredeti Erdős színezésével. Lényege egy teljesen új fajta véletlen színezés.

3. Tétel (Pluhár András tétele). *Legyen $\mathcal{H}$ egy k-uniform halmazrendszer. Ha $|\mathcal{H}| \leq 10\sqrt[4]{k} \cdot 2^{k-1}$, akkor $\chi(\mathcal{H}) \leq 2$.*

Bizonyítás. Legyen π a C alaphalmaz egy véletlen sorrendje (a $|V|!$ darab összes sorbaállításának halmazán egy uniform eloszlású valószínűségszámítási változó).

Legyen c a következő színezés: Minden E él első csúcsa kapja a piros színt. Az ezekután még színezetlen csúcsok lesznek a kék színű pontok. Tehát c alapjában egy véletlen színezés, de π választása után már determinisztikusan meghatározott.

Ismét legyen R az az esemény, hogy c nem jó színezés. Ekkor van egy olyan E él, aminek elemei ugyanazt a színt kapják. Természetesen ez csak a piros szín lehet. Ekkor az E él π szerinti utolsó z csúcsa is piros. Így lennie kell F élnek, ami π szerinti első csúcsa z. Tehát lennie kell olyan E és F élpárnak, hogy egyetlen közös csúcsuk legyen ($|E \cup F| = 2k-1$) és π szerint $E-F$ minden csúcsa megelőzze $F-E$ minden csúcsát. Legyen $S_{E,F}$ ez az esemény. A fentiek összefoglalása, hogy $R \subset \cup_{E,F\in\mathcal{H}\times\mathcal{H}} S_{E,F}$.

A hátralévő részben az $S_{E,F}$ esemény valószínűségét becsüljük. Ha $|E \cap F| \neq 1$, akkor 0 valószínűségű eseményről van szó. Ha $E \cap F = \{x\}$, akkor vegyük észre, hogy a π véletlen sorrendből kiemelve $E \cup F$ elemeit, ezek $(2k-1)!$-féle sorbaállítása egyformán valószínű.

Ezek után $S_{E,F}$ azt jelenti, hogy az $E \cup F$-beli elemek sorrendjében az első $k-1$ darab elem $E-\{x\}$ elemei valahogy sorbaállítva, az utolsó $k-1$ darab elem $F-\{x\}$ elemei valahogy sorbaállítva. Így

$$\mathbb{P}[S_{E,F}] = \frac{(k-1)!(k-1)!}{(2k-1)!}.$$

Összefoglalva

$$\mathbb{P}[R] \leq \mathbb{P}[\cup_{E,F\in\mathcal{H}\times\mathcal{H}} S_{E,F}] \leq |\mathcal{H}|^2 \cdot \frac{(k-1)!(k-1)!}{(2k-1)!}.$$

Az állítás abból adódik, hogy feltételünk mellett R valószínűsége 1-nél kisebbnek adódik. Ez a Stirling-formula alkalmazásával könnyen ellenőrizhető. ■

Események függetlensége

Legyen $(\Omega, \mathcal{A}, p)$ valúszínűségszámítási tér. Az E és F események akkor és csak akkor függetlenek, ha $\mathbb{P}[E \cap F] = \mathbb{P}[E]\mathbb{P}[F]$.

A függetlenség feltétele ekvivalens a következő három egyenlőség mindegyikével: $\mathbb{P}[\overline{E} \cap F] = \mathbb{P}[\overline{E}]\mathbb{P}[F]$, $\mathbb{P}[E \cap \overline{F}] = \mathbb{P}[E]\mathbb{P}[\overline{F}]$, $\mathbb{P}[\overline{E} \cap \overline{F}] = \mathbb{P}[\overline{E}]\mathbb{P}[\overline{F}]$.

Ha $\mathbb{P}[F] \neq 0$ és ismerjük a feltételes valószínűség fogalmát, akkor a függetlenség egy másik megfogalmazása, hogy $\mathbb{P}[E|F] = \mathbb{P}[E]$. Azaz E-nek F-re vonatkozó feltételes valószínűsége megegyezik E valószínűségével. Azaz az F eseményről való információ nem befolyásolja az E bekövetkezésének valószínűségét.

A fogalom könnyen általánosítható események rendszerének függetlenségére.

Definíció. Legyen $\{E_i\}_{i \in I}$ események egy rendszere. Ez egy független eseményrendszer, ha

$$\mathbb{P}[\cap E_i^{\epsilon_i}] = \prod_{i \in I} \mathbb{P}[E_i^{\epsilon_i}],$$

minden $(\epsilon_i)_{i \in I} \in \{-1, 1\}^I$ esetén, ahol $E^{-1} = \overline{E}$ és $E^1 = E$.

A függetlenség egy irányított változata különösen fontos.

Definíció. Egy E esemény független az $\{F_i\}_{i \in I}$ események egy rendszerétől, ha

$$\mathbb{P}[E \cap (\cap F_i^{\epsilon_i})] = \mathbb{P}[E] \cdot \mathbb{P}[\cap F_i^{\epsilon_i}],$$

minden $(\epsilon_i)_{i \in I} \in \{-1, 1\}^I$ esetén, ahol $F^{-1} = \overline{F}$ és $F^1 = F$.

Nagyon fontos, hogy lássuk egy esemény rendszer függetlensége sokkal erősebb feltétel, mint a páronkénti függetlenség.

Példa. Legyen $\mathbb{F}$ egy véges test. Ha alkalmas $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$ elemekre az $\ell : \mathbb{F} \to \mathbb{F}$ minden $x \in \mathbb{F}$-hez $\alpha \cdot x + \beta$-t rendeli, akkor azt mondjuk, hogy ℓ lineáris függvény. Legyen $\mathcal{L}$ a lineáris függvégyek $|\mathbb{F}|^2$ elemű halmaza. Legyen λ egy uniform eloszlású véletlen elem $\mathcal{L}$-ből. Legyen $E_{a \mapsto A}$ az az esemény, hogy $\lambda(a) = A$. Vegyük az $E_{0 \mapsto 0}$, $E_{1 \mapsto 0}$ és $E_{2 \mapsto 0}$ eseményeket. Könnyű látni, hogy bármelyik kettő közülük független. A három esemény azonban nem alkot független eseményrendszert.

Az előző példa könnyen kiterjeszthető magasabb fokú polinomokra is. Mi csak a másodfokú polinom esetét vizsgáljuk.

Példa. Legyen $\mathbb{F}$ egy véges test. Ha alkalmas $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{F}$ elemekre az $q : \mathbb{F} \to \mathbb{F}$ minden $x \in \mathbb{F}$-hez $\alpha \cdot x^2 + \beta \cdot x + \gamma$-t rendeli, akkor azt mondjuk, hogy q kvadratikus függvény. Legyen $\mathcal{Q}$ a kvadratikus függvégyek $|\mathbb{F}|^3$ elemű halmaza (feltesszük, hogy $\mathbb{F}$ karakterisztikája nem 2). Legyen ξ egy uniform eloszlású véletlen elem $\mathcal{Q}$-ből. Legyen $F_{a \mapsto A}$ az az esemény, hogy $\xi(a) = A$. Vegyük az $(F_{i \mapsto 0})_{i \in \mathbb{F}}$ eseményeket. Könnyű látni, hogy bármelyik három közülük független. Viszont bármelyik négy esemény már nem alkot független eseményrendszert.

A következő példa nagyon standard az alkalmazásokban.

Példa. Legyenek $(\xi_i)_{i \in I}$ független valószínűségiváltozók. Legyen $\mathcal{H}$ egy halmazrendszer I felett. Legyen egy E él esetén F_E egy esemény, ami csak a $(\xi_i)_{i \in E}$ valószínűségiváltozóktól függ. Ekkor F_E független esemény az $(F_D : E \cap D = \emptyset)$ események rendszerétől.

Lovász lokális lemma

Legyen $(E_v)_{v\in V}$ események egy rendszere. Ha az eseményeink függetlenek, akkor $\mathbb{P}[\cap_{v\in V}\overline{E_v}] = \prod_{v\in V}\mathbb{P}[\overline{E_v}]$. Ha mindegyik esemény nem 0 valószínűségű, akkor a fenti valószínűség pozitív. Ha eseményeink nem függetlenek, akkor $\cap_{v\in V}\overline{E_v}$ valószínűségének becslése nem ilyen egyszerű.

Definíció. Legyen $(E_v)_{v\in V}$ események egy rendszere. G egy egyszerű gráf a V halmazon (csúcsokat és eseményeket azonosítottnak vesszük). Azt mondjuk, hogy G az eseményrendszer függőségi gráfja, ha minden $v \in V$ esetén E_v független $(E_u)_{u,v \text{ nem szomszédos}}$ rendszertől.

Általában a függőségi gráf nem egyértelmű. A teljes gráf mindig függőségi gráf. Persze minél kisebb függőségi gráfot mutatunk fel, annál jobban írjuk le eseményrendszerünket. A páronként függő események összekötésével nyert éleknek minden függőségi gráfban ott kell lenni. Általában azonban a fenti élek nem adnak ki egy függőségi gráfot.

Példa. Legyenek $(\xi_i)_{i\in I}$ független valószínűségiváltozók. Legyen $\mathcal{H}$ egy halmazrendszer I felett. Legyen egy E él esetén F_E egy esemény, ami csak a $(\xi_i)_{i\in E}$ valószínűségiváltozóktól függ. $\mathcal{H}$ élein a „közös ponttal rendelkezik” relációval definiált gráf az eseményrendszer egy függőségi gráfja.

4. Tétel (Lovász lokális lemmája). *Legyen $(E_v)_{v\in V}$ események egy rendszere G függőségi gráffal. Tegyük fel, hogy $\mathbb{P}[E_v] \le \frac{1}{4\Delta(G)}$ minden $v \in V$ esetén. Ekkor*

$$\mathbb{P}[\overline{\cup_{v\in V}E_v}] > 0.$$

Bizonyítás. A következő állításpárt igazoljuk az $(E_v)_{v\in V}$ eseményrendszer egy $\mathcal{E}$ részhalmazára és egy E elemére, ami nem $\mathcal{E}$-beli.

$$\begin{cases} \mathbb{P}[\overline{\cup\mathcal{E}}] > 0, & (S(\mathcal{E})) \\ \mathbb{P}[E|\overline{\cup\mathcal{E}}] \le \frac{1}{2\Delta(G)}, & (T(\mathcal{E},E)) \end{cases}$$

S-et a teljes eseményrendszerre felírva kapjuk az állítást.

A két állításrendszert $|\mathcal{E}|$ szerinti indukcióval igazoljuk. A $|\mathcal{E}| = 0$ eset nyilvánvaló. Könnyű látni, hogy $T(\mathcal{E}, E)$-ból következik $S(\mathcal{E} \cup \{E\})$. Így „$S$ bizonyítása T előtt jár”. Ez azért is jó, mert T értelmezéséhez S-re szükség van. Így csak T bizonyítása marad hátra.

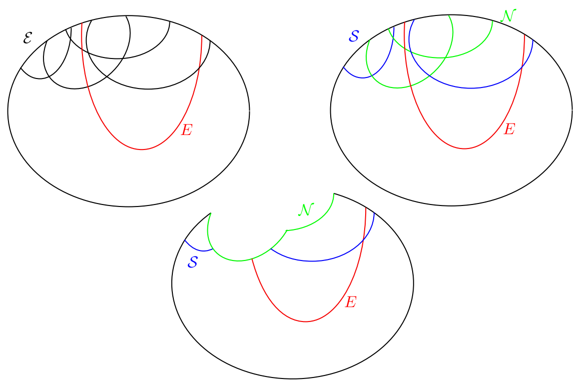
$\mathcal{E}$-t bontsuk két részre: E szomszédai (G-ben): $\mathcal{S}$ és E nem szomszédai: $\mathcal{N}$. Ha a szomszédok halmaz üres, akkor E független $\mathcal{E}$-től és a bizonyítandónál jobb becslést ad $\mathbb{P}[E]$. A továbbiakban feltesszük, hogy $\mathcal{E}$-ban van E-nek G-beli szomszédja, azaz $|\mathcal{N}| < |\mathcal{E}|$.

A függetlenség alapján

$$\mathbb{P}[E|\overline{\cup\mathcal{N}}] = \mathbb{P}[E] \le \frac{1}{4\Delta(G)}.$$

Azaz $\overline{\cup\mathcal{N}}$ halmazból az E esemény $1/4\Delta(G)$-nyi résznél nem többet harap ki.

Nekünk azonban a $\overline{\cup\mathcal{E}} = \overline{\cup\mathcal{N}} - \cup\mathcal{S}$-hez kell viszonyítanunk. $\mathcal{S}$-nek legfeljebb $\Delta(G)$ darab eleme van. Indukció szerint mindegyik legfeljebb $1/2\Delta(G)$-nyi részét



1. ábra. $\mathcal{E}$ és E, $\mathcal{E}$ kategorizálása, az $\overline{\cup\mathcal{N}}$ univerzum

harapja ki a $\overline{\cup\mathcal{N}}$ halmaznak. Így $\overline{\cup\mathcal{N}} - \cup\mathcal{S}$ még legalább fele az eredeti $\overline{\cup\mathcal{N}}$ halmaznak. Így

$$\mathbb{P}[E|\overline{\cup\mathcal{E}}] \leq 2 \cdot \mathbb{P}[E|\overline{\cup\mathcal{N}}].$$

Ebből adódik az állítás. ■

A lemma megszületését a következő alkalmazás motiválta.

5. Tétel (Erdős—Lovász-tétel). *Legyen $\mathcal{H}$ egy k-uniform halmazrendszer. Tegyük fel, hogy minden élet legfeljebb 2^{k-3} másik metsz. Ekkor $\chi(\mathcal{H}) \leq 2$.*

Bizonyítás. Az Erdős módszer szerint színezünk. Minden csúcs egymástól függetlenül, 1/2-1/2 valószínűséggel piros, illetve kék színt kap. Legyen M_E az az esemény, hogy „E monokromatikus". Célunk annak belátása, hogy $\mathbb{P}(\cup_{E\in\mathcal{H}} M_E) < 1$.

Az $(M_E)_{E\in\mathcal{H}}$ eseményrendszernek $\mathcal{H}$ halmazrendszer G él-metszet-gráfja (a csúcsok az éleknek felelnek meg, szomsédság a nem-üres metszet) egy függőségi gráfja. Feltételeink szerint $\Delta(G) \leq 2^{k-3}$, azaz $\mathbb{P}[M_E] = \frac{1}{2^{k-1}} \leq \frac{1}{4\Delta(G)}$.

Tehát a Lovász Lokális Lemma feltételei teljesülnek. A lemma következtetése bizonyítja a tételt. ■