HALMAZRENDSZEREK

Matematika MSc hallgatók számára

9. Előadás

Előadó: Hajnal Péter
Jegyzetelő: Hajnal Péter 2010. április 14.

Normális halmazrendszerek

Definíció. Egy $\mathcal{H}$ halmazrendszert *normálisnak* nevezünk, ha bármely részhalmazrendszere (belőle élelhagyással kapható halmazrendszerek) Kőnig-tulajdonságú.

Speciálisan $\mathcal{H}$ normalitása $\mathcal{H}$ Kőnig-tulajdonságát is magában foglalja.

A részhalmazrendszer egy szemlélete, hogy az élek egy 0-1-súlyozása. Ennek egy általánosítása az élek $\mathbb{N}$-súlyozása. Ha egy E él w súlyt kap, akkor E-t kicseréljük w darab élre, amelyek mindegyike E végpontjaira illeszkedik (E iker-példányai). Ezt párhuzamosan minden élre elvégezzük. A 0 súly élelhagyást, az 1 súly meghagyást jelent. Esetünkben az élek $\mathbb{N}$-súlyozása nem jelent általánosítást a 0-1-súlyozással szemben. A megkövetelt Kőnig-feltételben szereplő ν és τ paraméterek olyanok, hogy többszörösen szereplő élek ottlétére „nem érzékenyek". Azaz a részhalmazrendszerek ($\{0,1\}$-súlyozott példányok) helyett $\mathbb{N}$-súlyozott példányokra követeljük meg a Kőnig-tulajdonságot, akkor nyilván ekvivalens fogalmat kapunk.

Az alábbiakban a normalitás egy alternatív definícióját írjuk le.

1. Tétel. *A következők ekvivalensek:*

(i) $\mathcal{H}$ *normális,*

(ii) $\mathcal{H}$ *minden* $\mathcal{R}$ *részhalmazrendszerére* $\nu^*(\mathcal{R})$ *(és így a vele egyenlő* $\tau^*(\mathcal{R})$ *is) egész.*

Bizonyítás. $(i) \Rightarrow (ii)$ A $\nu(\mathcal{R}) \leq \nu^*(\mathcal{R}) = \tau^*(\mathcal{R}) \leq \tau(\mathcal{R})$ összefüggés és $\mathcal{R}$ Kőnig-tulajdonsága alapján $\nu^*(\mathcal{R}) = \nu(\mathcal{R})$, speciálisan $\nu^*(\mathcal{R})$ egész.

$(ii) \Rightarrow (i)$ Elegendő belátni, hogy $\mathcal{H}$ Kőnig-tulajdonságú. Ha ezt igazoljuk, akkor ez alapján a feltételt tudva $\mathcal{R}$ részhalmazrendszerekre kapjuk $\mathcal{R}$ Kőnig-tulajdonságát is. $\mathcal{H}$-ra ν és τ értékének egyenlősége az alábbi lemmából nyilvánaló.

2. Lemma. *(a)* $\tau(\mathcal{H}) = \tau^*(\mathcal{H})$,

(b) $\nu(\mathcal{H}) = \nu^*(\mathcal{H})$,

A lemma (a) részének bizonyításához indirekten tegyük fel, hogy $\mathcal{H}$ minimális élszámú ellenpélda.

Ekkor az ellenpéldaság miatt $\tau^*(\mathcal{H}) < \tau(\mathcal{H})$. Mindkét paraméter egész (τ^* azért, mert az (ii) feltételt feltesszük), ezért $\tau^*(\mathcal{H}) \leq \tau(\mathcal{H}) - 1$. Egy másik következménye az ellenpéldaságnak, ha veszünk egy optimális törtlefogást, akkor ebben kell lenni egy csúcsnak, amely súlya szigorúan 0 és 1 között van. Legyen v egy ilyen csúcs (a lefogás optimalitása miatt v-re illeszkedik él).

$\mathcal{H}$ minimalitása miatt $\tau^*(\mathcal{H}-v)=\tau(\mathcal{H}-v)$, ahol $\mathcal{H}-v$-t a v-re illeszkedő élek elhagyásával kapjuk $\mathcal{H}$-ból.

A v csúcs elhagyása τ értékét legfeljebb 1-gyel csökkenti ($\mathcal{H}-v$ optimális lefogó ponthalmazhoz v-t hozzáadva lefogjuk $\mathcal{H}$-t). τ^* értéke legalább v súlyával, w_v-vel esik (a megmaradt súlyozás lefogó lesz, összsúlya $\tau^*(\mathcal{H})-w_v$), azaz biztos csökken. $\tau^*(\mathcal{H})\leq\tau(\mathcal{H})-1$ és az, hogy a két oldal v elhagyása utáni változásait a fenti módon becsülhetjük, ellentmond annak, hogy $\mathcal{H}$ ellenpéldasága megszűnik. Ez az (a) részt igazolja.

A lemma (b) részének bizonyításához ugyanazt az utat követjük. Indirekten tegyük fel, hogy $\mathcal{H}$ minimális élszámú ellenpélda.

Ekkor az ellenpéldaság miatt $\nu(\mathcal{H})<\nu^*(\mathcal{H})$. Mivel mindkét paraméter egész (ν^* amiatt, hogy az (ii) tulajdonságot feltesszük), ezért $\nu(\mathcal{H})\leq\nu^*(\mathcal{H})-1$. Egy másik következménye az ellenpéldaságnak, ha veszünk egy optimális törtpárosítást, akkor ebben kell lenni egy élnek, amely súlya szigorúan 0 és 1 között van. Legyen E egy ilyen él, legyen w_E a súlya.

Az E él elhagyása ν-t nem növelheti, míg ν^* értékét legfeljebb w_E-vel csökkenti ($\mathcal{H}-E$ egy $\nu^*(\mathcal{H})-w_E$ összsúlyú törtpárosítását kapjuk, ha $\mathcal{H}$ optimális törtpárosításából kihagyjuk az ott w_E súllyal szereplő E élt). $\nu(\mathcal{H})\leq\nu^*(\mathcal{H})-1$ és az, hogy E elhagyása után az ellenpéldaság megszűnik, ellentmond ezeknek a becsléseknek. Ez a (b) részt igazolja. ■

Szép hipergráfok

Definíció. Egy $\mathcal{H}$ hipergráf v csúcsának fokszáma/foka a rá illeszkedő élek száma. $\Delta(\mathcal{H})$ a $\mathcal{H}$ hipergráf maximális fokszáma.

Definíció. Egy $\mathcal{H}$ hipergráf jó élszínezése k színnel egy $c:\mathcal{H}\to P=\{1,2,\ldots,k\}$ színezési leképezés, amelyre szomszédos/közös csúcsra illeszkedő élek különböző színt kapnak. $\chi_e(\mathcal{H})$ az a minimális k, amelyre $\mathcal{H}$-nak létezik jó élszínezése k színnel.

A fent definiált két paraméter között nyilvánvaló kapcsolat van:

$$\Delta(\mathcal{H})\leq\chi_e(\mathcal{H}),$$

hiszen a maximális fokú csúcsra illeszkedő élek mindegyikének különböző színt kell kapni egy jó élszínezésnél.

Definíció. A $\mathcal{H}$ hipergráf *szép*, ha $\Delta(\mathcal{R})=\chi_e(\mathcal{R})$, minden részhipergráfjára.

A szépség fogalma mögött szereplő hipergráf paraméterek (Δ és χ_e) különböznek a ν és τ paraméterektől. Élek többszörözésére érzékenyek. Ha egy élt helyettesítünk több iker-példánnyal, akkor Δ és χ_e változhat. Így, ha feltételrendszerünket részhipergráfok, azaz 0-1-súlyozott hipergráfok helyett minden $\mathbb{N}$-súlyozott hipergráfra megköveteljük, akkor első pillantásra egy erősebb feltételt kapunk.

Definíció. A $\mathcal{H}$ hipergráf *szép*$^+$, ha $\Delta(\mathcal{T})=\chi_e(\mathcal{T})$, a $\mathcal{H}$ minden $\mathbb{N}$-súlyozott $\mathcal{T}$ példányára.

A látszat azonban csal, a két fogalom megegyezik

3. Tétel. *Egy $\mathcal{H}$ hipergráf akkor és csak akkor szép, ha szép$^+$.*

Bizonyítás. $\mathcal{H}$ $\mathbb{N}$-súlyozott példányai között ott vannak a részhipergráfok is. Tehát a szép$^+$ tulajdonságból nyilvánvaló a szépség.

Fordítva, legyen $\mathcal{H}$ egy szép hipergráf. Tegyük fel, hogy állításunkra van ellenpélda. Legyen $\mathcal{T}$ egy minimális élű ellenpélda (azaz az ellenpéldák között $\mathcal{T}$-re lesz a súlyok összege minimális). Nyilván az ellenpéldaság és paramétereink egész értékűsége miatt $\Delta(\mathcal{T}) \leq \chi_e(\mathcal{T}) - 1$.

Feltételünk azt állítja, hogy 0-1-súlyozások között nincs ellenpélda, így $\mathcal{T}$-ben van olyan $E \in \mathcal{H}$, amely mellett E' iker-példánya is ott van $\mathcal{T}$-ben.

$\mathcal{T} - E$-nek $\mathcal{T}$-nél kevesebb éle van és $\mathcal{H}$ egy $\mathbb{N}$-súlyozása. Tehát nem lehet ellenpélda: $\Delta(\mathcal{T} - E) = \chi_e(\mathcal{T} - E)$. Könnyen látható, hogy egy él elhagyása után Δ és χ_e értéke is vagy marad vagy 1-gyel csökken. Így az ellenpéldaság egyetlen módon szűnhet meg: $\Delta(\mathcal{T} - E) = \Delta(\mathcal{T}) = \chi_e(\mathcal{T} - E) = \chi_e(\mathcal{T}) - 1$.

Vegyük $\mathcal{H} - E$ egy optimális élszínezését. Ez $\chi_e(\mathcal{T} - E) = \Delta(\mathcal{T} - E) = \Delta(\mathcal{T})$ színt használ. Legyen $\mathcal{C}$ az a színosztály (ezt pirosnak nevezzük), ami E'-t tartalmazza. $\mathcal{H} - \mathcal{C}$-nek $\mathcal{T}$-nél kevesebb éle van és $\mathcal{H}$ egy $\mathbb{N}$-súlyozása. Tehát nem lehet ellenpélda: $\Delta(\mathcal{T} - \mathcal{C}) = \chi_e(\mathcal{T} - \mathcal{C})$. Könnyen látható, hogy páronként diszjunkt élek elhagyása után Δ és χ_e értéke is vagy marad vagy 1-gyel csökken. Így az ellenpéldaság egyetlen módon szűnhet meg: $\Delta(\mathcal{T} - \mathcal{C}) = \Delta(\mathcal{T}) = \chi_e(\mathcal{T} - \mathcal{C}) = \chi_e(\mathcal{T}) - 1$.

Végül vizsgáljuk $\mathcal{T} - E - \mathcal{C}$-t. Ennek Δ paramétere sem tér el $\Delta(\mathcal{T})$-től: $\mathcal{C}$ éleinek elhagyása (köztük E' elhagyása) nem csökkentette, azaz van olyan $\Delta(\mathcal{T})$ fokú csúcs, ami megmaradt maximális fokúnak a piros élek elhagyása után. Ha E-t is elhagyjuk, akkor ennek foka továbbra is $\Delta(\mathcal{T})$ lesz (most csak E-n belül, azaz E'-n belül változnak a fokok). Az élkromatikus szám viszont 2-t esik $\chi_e(\mathcal{T})$-hez képest: E elhagyása után 1-et esik, míg utána a maradék egy optimális színezésében hagyjuk el az összes piros élt, azaz az élkormatikus szám újból 1-gyel csökken. Így $\Delta(\mathcal{T} - E - \mathcal{C}) \neq \chi_e(\mathcal{T} - E - \mathcal{C})$.

Ez ellentmondás, ami az állítást igazolja. ■

Jó hipergráfok

Az eddig vizsgált paramétereink között egy másik nyilvánvaló összefüggést emelünk ki:

$$\chi_e(\mathcal{H}) \cdot \nu(\mathcal{H}) \geq |\mathcal{H}|,$$

hiszen egy optimális jó élszínezés a $|\mathcal{H}|$ darab élt $\chi_e(\mathcal{H})$ darab legfeljebb $\nu(\mathcal{H})$ élt tartalmazó osztályba sorolja.

Definíció. Egy $\mathcal{H}$ hipergráf jó, ha minden $\mathcal{R}$ részhipergráfjára $\Delta(\mathcal{R}) \cdot \nu(\mathcal{R}) \geq |\mathcal{R}|$.

A jóság fogalma nyilvánvaló kapcsolatban van a szépséggel: szép hipergráfok egyben jók is. Valóban, szépség esetén a kiinduló nyilvánvaló összefüggésben χ_e értéke Δ értékével helyettesíthető.

Ismét kiterjeszthető a feltételrendszer a $\mathcal{H}$-ból éltöbbszörözéssel kapott hipergráfokra is.

Definíció. A $\mathcal{H}$ hipergráf *jó*$^+$, ha $\Delta(\mathcal{T}) \cdot \nu(\mathcal{T}) \geq |\mathcal{T}|$, a $\mathcal{H}$ minden $\mathbb{N}$-súlyozott $\mathcal{T}$ példányára.

Ismét igaz a látszólag általánosabb tulajdonság ekvivalenciája az alapfogalommal.

4. Tétel. *Egy hipergráf akkor és csak akkor jó, ha jó$^+$.*

Ennek igazolását későbbre halasztjuk.

Az ekvivalencia

A fő eredmény, hogy az eddig bevezetett fogalmak mindegyike ekvivalens.

5. Tétel. *A következők ekvivalensek:*

(i) $\mathcal{H}$ *normális,*

(ii) $\mathcal{H}$ *szép/szép$^+$,*

(iii) $\mathcal{H}$ *jó$^+$.*

Bizonyítás. $(ii) \Rightarrow (iii)$ A korábbi gondolatmenetekből nyilvánvaló.

$(iii) \Rightarrow (i)$ Elég azt igazolni, hogy $\nu^*(\mathcal{H})$ egész. Azt könnyű látni, hogy $\nu^*(\mathcal{H})$, illetve a mögötte lévő optimális élsúlyozás racionális értékű. Legyen $w_E = n_E/N$ az E él súlya egy optimális tört-párosításban, ahol a súlyok n_E számlálói és N közösnevezőjük természetes szám (N persze pozitív).

Legyen $\mathcal{T}$ az a hipergráf, amit $\mathcal{H}$-ból úgy kapunk, hogy minden E élt n_E-szerezünk. Nyilván

$$|\mathcal{T}| = \sum_{E\in\mathcal{H}} n_E = N \cdot \sum_{E\in\mathcal{H}} \frac{n_E}{N} = N\nu^*(\mathcal{H}).$$

Egy v csúcs foka $\mathcal{T}$-ben $\sum_{E:v\in E} n_E$. Mivel $\{n_E/N\}_{E\in\mathcal{T}}$ egy tört párosítás, ezért $\sum_{E:v\in E} n_E/N \leq 1$. Így $d_{\mathcal{T}}(v) \leq N$, speciálisan $\Delta(\mathcal{T}) \leq N$.

Továbbá $\nu(\mathcal{T}) \leq \nu(\mathcal{H})$, hiszen párosítások keresésénel a többszörös élek nem segítenek.

Feltételünk $\mathcal{T}$-ről megkívánja a jóságban előírt egyenlőtlenségetséget, amit összegezhetünk a korábbi ismereteinkkel:

$$N \cdot \nu(\mathcal{H}) \geq \Delta(\mathcal{T})\nu(\mathcal{T}) \geq |\mathcal{T}| = N \cdot \nu^*(\mathcal{H}).$$

Ebből adódik $\nu(\mathcal{H}) \geq \nu^*(\mathcal{H})$. Ez ν és ν^* nyilvánvaló viszonyával együtt adja egyenlőségüket és így ν^* értékének egész mivoltát.

$(i) \Rightarrow (ii)$ Az ekvivalencia bezáródásának igazolásához trükkös módot választunk. Egy $\mathcal{H}$ halmazrendszerhez egy $\mathcal{H}^*$ halmazrendszert rendelünk az alábbi módon. $\mathcal{H}^*$ csúcsait $\mathcal{H}$ párosításai adják. $\mathcal{H}$ minden élének megfelel egy E^* él $\mathcal{H}^*$-ban: ami azon párosításokat tartalmazza, amikben ott van E.

A két halmazrendszer közötti rokonság paramétereik között is jelentkezik.

$\mathcal{H}^*$ egy $\mathcal{M}$ csúcsának foka $|\mathcal{M}|$. Azaz $\Delta(\mathcal{H}^*) = \nu(\mathcal{H})$.

$\mathcal{H}^*$ egy lefogó ponthalmaza párosítás halmaz $\mathcal{H}$-ban, amely minden élt lefed. A megfelelő két minimalizálási probléma optimuma ugyanaz, $\tau(\mathcal{H}^*) = \chi_e(\mathcal{H})$.

Legyen v egy csúcs $\mathcal{H}$-ban. Legyen $E_1, E_2, \ldots, E_d$ a v csúcsra illeszkedő élek teljes listája (d a v csúcs foka). Ekkor $E_1^*, E_2^*, \ldots, E_d^*$ diszjunkt élek $\mathcal{H}^*$-ban. Megfordítva, ha $E_1^*, E_2^*, \ldots, E_d^*$ páronként diszjunktak, akkor $E_1, E_2, \ldots, E_d$ páronként metszőek. A továbbiakhoz óvatosnak kell lenni. Ha $\mathcal{H}$ normális, akkor a páronként metszés esetén (ebben a részben ν értéke 1) az éleknek van közös pontja (τ értékének is 1-nek kell lenni a Kőnig-tulajdonság miatt). Így normális $\mathcal{H}$ esetén $\Delta(\mathcal{H}) = \nu(\mathcal{H}^*)$.

Ugyanez a gondolatmenet mutatja, hogy ha $\mathcal{H}$-ban veszünk egy k elemű lefogó ponthalmazt, akkor ennek elemeihez a rajtuk átmenő élek halmazai $\mathcal{H}^*$-ban párosításoknak felelnek meg, amelyek az összes élt magukban foglalják. Ez megfordítva is igaz ($\mathcal{H}$ normális), így a megfelelő két minimalizálási probléma optimuma egybeesik, $\tau(\mathcal{H}) = \chi_e(\mathcal{H}^*)$.

Összefoglalva, ha $\mathcal{H}$ normális, akkor $\Delta(\mathcal{H}^*) = \chi_e(\mathcal{H}^*)$ és ez öröklődik $\mathcal{H}^*$-ból élelhagyással kapható részekre. Azaz $\mathcal{H}^*$ szép/szép$^+$. Ebből tudjuk ((ii)$\Rightarrow$(i)-t már bizonyítottuk), hogy $\mathcal{H}^*$ normális. A fentiek alapján $\mathcal{H}$ szépsége adódik. ■

A teljes ekvialencia leírását a korábban megígért tétel fejezi be:

6. Tétel. *Egy hipergráf akkor és csak akkor jó, ha jó$^+$.*

Bizonyítás. A jó$^+$ tulajdonságból természetesen következik a jóság.

Fordítva, tegyük fel, hogy állításunkra van ellenpélda. Legyen $\mathcal{H}$ egy minimális élszámú ellenpélda. Az ellenpéldaság miatt $\mathcal{H}$ alkalmas $\mathbb{N}$-súlyozásával kapott hipergráf megsérti a jó$^+$ feltételét. Legyen $\mathcal{T}$ egy minimális élszámú $\mathbb{N}$-súlyozás, amire

$$\Delta(\mathcal{T}) \cdot \nu(\mathcal{T}) < |\mathcal{T}|.$$

Természetesen tudjuk, hogy $\mathcal{H}$ valamelyik E élének legalább 2 a súlya $\mathcal{T}$-ben. Azaz $\mathcal{T}$-ben E mellett ott van E' egy iker-példánya.

$\mathcal{T}$ ellenpéldasága minimális, így $\mathcal{T} - E$ már nem ellenpélda

$$\Delta(\mathcal{T} - E) \cdot \nu(\mathcal{T} - E) \geq |\mathcal{T} - E| = |\mathcal{T}| - 1.$$

$\mathcal{T}$ ellenpéldaságát mutató egyenlőtlenség csak úgy csaphatott át, ha $\Delta(\mathcal{T}) \cdot \nu(\mathcal{T}) = |\mathcal{T}| - 1$, továbbá $\Delta(\mathcal{T} - E) = \Delta(\mathcal{T})$, $\nu(\mathcal{T} - E) = \nu(\mathcal{T})$. Például E végpontjain kívül van $\Delta(\mathcal{T})$ fokú csúcs.

Legyen $\mathcal{E}$ az összes E-vel párhuzamos él (végponthalmazuk azonos E-ével), például $E, E' \in \mathcal{E}$. $\mathcal{T} - \mathcal{E}$ a $\mathcal{H} - E$ éleinek többszörözésével keletkezhet. $\mathcal{H}$-t is egy minimális ellenpéldaságra alapozva választottuk. Tehát $\mathcal{H} - E$-ről már tudjuk az állításunkat. Speciálisan $\mathcal{T} - \mathcal{E}$ jó$^+$, így szép is. Azaz $\chi_e(\mathcal{T} - \mathcal{E}) = \Delta(\mathcal{T} - \mathcal{E}) = \Delta(\mathcal{T})$. Színezzük ki $\mathcal{T} - \mathcal{E}$-t optimálisan. A legkisebb színosztály mérete nem nagyobb, mint az átlagos mérete, azaz legfeljebb

$$\frac{|\mathcal{T} - \mathcal{E}|}{\Delta(\mathcal{T})} \leq \frac{|\mathcal{T}| - 2}{\Delta(\mathcal{T})} < \frac{|\mathcal{T}| - 1}{\Delta(\mathcal{T})} = \nu(\mathcal{T}).$$

Legyen $\mathcal{C}$ egy ilyen színosztály. Mondjuk legyenek ezek a piros élek.

Vizsgáljuk a $\mathcal{T} - E - \mathcal{C}$ hipergráfot. Az élszám $\mathcal{T}$-hez képest legfeljebb $\nu(\mathcal{T})$-vel csökken. A maximális foknak csökkenni kell: E elhagyása nem csökkenti, tehát ekkor az összes maximális fokú csúcs E-n kívül van. Ezek foka $\mathcal{C}$ elhagyásával csökken, hiszen minden $\Delta(\mathcal{T} - \mathcal{E}) = \Delta(\mathcal{T})$ fokú csúcsra az optimális élszínezés minden színű éle — speciálisan piros is — illeszkedik.

Ha a $\Delta(\mathcal{T}) \cdot \nu(\mathcal{T}) < |\mathcal{T}|$ egyenlőtlenség ($\mathcal{T}$ ellenpéldasága) változását nézzük, ahogy a $\mathcal{T} - E - \mathcal{C}$ hipergráfra térünk át, azt látjuk, hogy $\mathcal{T} - E - \mathcal{C}$-nek is ellenpéldának kell maradni. Ez ellentmondás, ami az állítást igazolja. ■

Perfekt gráfok

A hipergráfokra vonatkozó fogalmakat és összefüggéseket az alábbi gráfelméleti alkalmazás motiválta.

Definíció. Legyen G egy gráf. $\mathcal{F}_G$ legyen az a halmazrendszer, amely U ponthalmazát G független ponthalmazai adják, míg élei $\{E_x : x \in V(G)\}$, ahol $E_x = \{F \in U : x \in U\}$.

A gráf és a halmazrendszer paraméterei között egyszerű összefüggések állapíthatók meg. Ezt foglalja össze az alábbi észrevétel:

Észrevétel. Legyen G egy gráf és $\mathcal{F}_G$ a hozzárendelt halmazrendszer. Ekkor

(i) $\Delta(\mathcal{F}_G) = \alpha(G)$,

(ii) $\nu(\mathcal{F}_G) = \omega(G)$,

(iii) $\chi_e(\mathcal{F}_G) = \chi(\overline{G})$,

(iv) $\tau(\mathcal{F}_G) = \chi(G)$.

Bizonyítás. $\mathcal{F}_G$-ben egy F csúcs foka nyilvánvalóan $|F|$. Speciálisan $\Delta(\mathcal{F}_G) = \alpha(G)$.

E_x és E_y akkor és csak akkor diszjunkt, ha x és y összekötött G-ben. Valóban, ha x és y nem szomszédos, akkor $\{x, y\} \in E_x \cap E_y$. Ha viszont x és y összekötött, akkor egyetlen független halmaz sem tartalmazhatja mindkettőt, E_x és E_y diszjunkt.

Így G-ben a maximális páronként összekötött ponthalmaz mérete megegyezik $\mathcal{F}_G$ maximális páronként diszjunkt élhalmazának méretével, $\omega(G) = \nu(\mathcal{F}_G)$.

Ha $V(G)$-t klikkekbe osztályozzuk, akkor $\mathcal{F}_G$ éleit párosításokba osztályozzuk. Így az ehhez szükséges minimális osztályszám közös: $\chi(\overline{G}) = \chi_e(\mathcal{F}_G)$.

$\mathcal{F}_G$ egy lefogó ponthalmazában lévő csúcsok G-ben olyan független ponthalmazoknak felelnek meg, amelyek teljes $V(G)$-t lefedik. Így a megfelelő két minimalizálási probléma optimuma ugyanaz: $\tau(\mathcal{F}_G) = \chi(G)$. ■

A következő gráfelméleti fogalom összekapcsolódik (a fenti észrevételen keresztül) a normális hipergráfok fogalmával.

Definíció. G gráf akkor és csak akkor perfekt, ha G minden R feszített részgráfjára $\chi(F) = \omega(F)$.

G feszített részgráfjait G-ből csúcsok elhagyásával kapjuk. Az ilyen részgráfokhoz rendelt halmazrendszerek $\mathcal{F}_G$-ből élek elhagyásával kaphatók (G csúcsai felelnek meg $\mathcal{F}_G$ éleinek). A kapcsolat megfordítható. Ezekután észrevételünk nyilvánvaló következményét fogalmazhatjuk meg a perfektség fogalmának segíségével:

7. Következmény. *(i) G akkor és csak akkor perfekt, ha $\mathcal{F}_G$ normális,*

(ii) $\overline{G}$ akkor és csak akkor perfekt, ha $\mathcal{F}_G$ szép.

Egyből adódik az alábbi központi gráfelmélet tétel:

8. Tétel (Lovász László, gyenge perfekt gráf tétel). *G akkor és csak akkor perfekt, ha $\overline{G}$ perfekt.*

⋆ ⋆ ⋆

A fenti mély tétel nevében lévő gyenge jelző magyarázatához a tétel történetét kell megnéznünk.

A perfektség fogalma Berge francia gráfelmélész nevéhez fűződik (1960 körül). Ő két fontos sejtést mondott ki a perfekt gráfokkal kapcsolatban:

Sejtés (Gyenge perfekt gráf sejtés). Egy gráf akkor és csak akkor perfekt, ha komplementere is az.

Sejtés (Erős perfekt gráf sejtés). Egy gráf akkor és csak akkor perfekt, ha nem tartalmaz legalább öt hosszú pártalan hosszú kört, vagy ezek komplementerét feszített részgráfként.

Természetesen ezen álítások sejtésként való hivatkozása mára már elavult.

Nyilván az erős perfekt gráf sejtésből következik a gyenge (ezért a jelzők). A gyenge sejtés is igen nehéz volt. Körülbelül tíz évig volt az érdeklődés kereszttűzében, amikor Lovász László 1972-ben bebizonyította.

Az erős sejtés is igazolódott: Maria Chudnovsky, Neil Robertson, Paul Seymour, Robin Thomas bizonyította. Bizonyításuk korábbi technikailag nehéz eredményekre támaszkodik és önmagában is igen összetett. 2002-es bejelentésük után 2006-ban jelent meg 178 oldalas cikkük.