HALMAZRENDSZEREK

Matematika MSc hallgatók számára

8. Előadás

Előadó: Hajnal Péter
Jegyzetelő: Hajnal Péter

2010. március 30.

Emlékeztető. Halmazrendszerek Kőnig-tulajdonsága

Az alábbiakban két alappéldát mutatunk Kőnig-tulajdonságú halmazrendszerre a gráfelméletből.

Menger tételei

Legyen G egy gráf két kitüntetett csüccsal s-sel és t-vel. A G-beli st utakhoz kétféleképpen is rendelhetünk egy-egy halmazt: (a) élhalmazuk, (b) belső pontjaik halmaza. Mindkét esetben ($\mathcal{M}_e(G,s,t)$, $\mathcal{M}_v(G,s,t)$) Kőnig-tulajdonságú halmazrendszert kapunk (lásd Diszkrét Matematika előadás). Irányított gráfokban irányított utakkal dolgozva ($\mathcal{M}_e(\vec{G},s,t)$, $\mathcal{M}_v(\vec{G},s,t)$) további két példát kapunk. Az így kapott négy állítás Menger nevezetes tételei.

A halmazrendszeres jelölésmód kikerülhető. Ebben (a gráfelméleti) nyelvezetben mondjuk ki a Menger-tételeket:

1. Tétel (Menger-tételek). *Legyen G egy irányítatlan, $\vec{G}$ egy irányított gráf két kitüntetett csúccsal: s-sel és t-vel.*

(i) (irányítatlan, éldiszjunkt változat)

$$\max_{\substack{\mathcal{P}_e \text{ éldiszjunkt} \\ st \text{ utak rendszere}}} |\mathcal{P}_e| = \min_{\substack{L\subset E(G):\ L \text{ minden } st \text{ út} \\ \text{élhalmazát metszi}}} |L|,$$

(ii) (irányítatlan, csúcsdiszjunkt változat)

$$\max_{\substack{\mathcal{P}_v \text{ közös belső pontok} \\ \text{nélküli } st \text{ utak rendszere}}} |\mathcal{P}_v| = \min_{\substack{L\subset V(G)-\{s,t\}:\ L \text{ minden } st \text{ út} \\ \text{csúcshalmazát metszi}}} |L|,$$

(iii) (irányított, éldiszjunkt változat)

$$\max_{\substack{\mathcal{P}_e \text{ éldiszjunkt} \\ st \text{ utak rendszere}}} |\mathcal{P}_e| = \min_{\substack{L\subset E(\vec{G}):\ L \text{ minden } st \text{ út} \\ \text{élhalmazát metszi}}} |L|,$$

(iv) (irányított, csúcsdiszjunkt változat)

$$\max_{\substack{\mathcal{P}_v \text{ közös belső pontok} \\ \text{nélküli } st \text{ utak rendszere}}} |\mathcal{P}_v| = \min_{\substack{L\subset V(G)-\{s,t\}:\ L \text{ minden } st \text{ út} \\ \text{csúcshalmazát metszi}}} |L|,$$

Lucchesi—Younger-tétel

Legyen $\vec{G}$ egy irányított gráf.

Definíció. $\vec{G}$ irányított vágásai által adott élhalmazok alkossák a $\mathcal{V}$ halmazrendszert.

Az alábbi tétel az egyszerűen kimondható mini-max tételek közül az egyik legkésőbb felfedezett.

2. Tétel (Lucchesi—Younger-tétel (1978)). *tetszőLeges $\vec{G}$ irányított gráfra $\mathcal{V}$ Kőnig-tulajdonságú.*

Bizonyítás. Indirekten bizonyítunk. Tegyük fel, hogy $\vec{G}$ egy ellenpélda minimális sok éllel. Legyen k az élidegen vágások maximális száma ($\nu(\mathcal{V}) = k$). Legyen $C_1, C_2, \ldots, C_k$ egy optimális éldiszjunkt vágásrendszer.

A $\tau(\mathcal{V}) \geq \nu(\mathcal{V})$ egyenlőtlenség nyilvánvaló. Így az ellenpéldaság azt jelenti, hogy az irányított vágások lefogásához legalább $k+1$ él szükséges.

I. FÁZIS: Gráfunk átalakítása. C_1 éleit sorban osszuk fel egy ponttal két (az eredeti irányba mutató) irányított élre. Csak arra vigyázzunk, hogy az éldiszjunkt vágások száma k maradjon (csökkenni nem csökkenhet, tehát a növekedést kerüljük el). Valamikor elakadunk (C_1 összes éléenek felosztása $k+1$ éldiszjunkt vágáshoz vezetne). Legyen $\widetilde{G}$ a gráf, amelynél elakadtunk és e egy éle, amit nem tudtunk felosztani. Legyen $\widetilde{G}^+$ az a gráf, amit $\widetilde{G}$-ből kapunk az e él felosztásával. $\widetilde{G}^+$-ben lesz $k+1$ éldiszjunkt irányított vágás. Ezek a vágások $\widetilde{G}$-ben is ott vannak, csak nem lesznek (nem lehetnek) éldiszjunktak: az egyetlen hiba, hogy e két vágásban is szerepel.

$\vec{G}$ ellenpélda voltának minimalitása miatt $\vec{G} - e$ irányított vágásainak élhalmazai Kőnig-tulajdonságúak. Mivel $\tau(\mathcal{V}) \geq k+1$, ezért $\vec{G} - e$ irányított vágásainak élhalmazai lefogásához legalább k él kell. Így a Kőnig-tulajdonság miatt $\vec{G} - e$-ben van k éldiszjunkt vágás. Ezek a vágások is $\widetilde{G}$-be vetíthetők: éldiszjunktságuk megmarad, e-t nem tartalmazzák.

Összegezzük $\widetilde{G}$ tulajdonságait:

(E) $\widetilde{G}$ is ellenpélda: Konstrukciója alatt vigyáztunk arra, hogy $\nu(\mathcal{V}) = k$ megmaradjon. Közben $\tau \geq k+1$ automatikusan megmaradt.

(V) $\widetilde{G}$-ben található $2k+1$ irányított vágás, hogy minden él legfeljebb két vágásban szerepeljen. (Lásd a két lépésben megadott $(k+1)+k$ vágást.)

Felhívjuk a figyelmet, hogy a kezdetben feltett minimalitást már nem tudjuk, nem használjuk (nem használhatjuk).

II. FÁZIS: Vágásrendszerünk átalakítása. A következő lépésben a fenti vágásrendszert alakítjuk át (gráfunk marad $\widetilde{G}$).

Definíció. Egy C irányított vágás induló oldala legyen $A(C)$, érkező oldala legyen $Z(C)$. C, C' keresztezőek, ha $A(C) \cap A(C')$, $A(C) \cap Z(C')$, $Z(C) \cap A(C')$, $Z(C) \cap A(C')$ négy darab metszet mindegyike nem-üres.

Két (C, C') kereszteződő irányított vágást könnyű két nem-kereszteződővé alakítani úgy, hogy közben élhalmazuk (multiplicitással számolva) ne nőjön. Ehhez legyen $\widetilde{C}$ azaz irányított vágás, amelyre $A(\widetilde{C}) = A(C) \cap A(C')$ (ez korrekt definíció!). Továbbá legyen $\widetilde{C}'$ azaz irányított vágás, amelyre $A(\widetilde{C}') = A(C) \cup A(C')$ (ez korrekt definíció!).

Ha vágásrendszerünk nem páronként nem-kereszteződő, akkor ismételgessük kereszteződő vágások fenti átalakítását. Könnyű ellenőrizni, hogy $\sum |A(C)|^2$ szigorúan monoton nő. Átalakítássorzatunknak el kell akadnia. Ez a következő tulajdonságokat adja.

(E) $\widetilde{G}$ ellenpélda.

(V^+) $\widetilde{G}$-ben található $2k + 1$ darab páronként nem-kereszteződő irányított vágás, hogy minden él legfeljebb két vágásban szerepeljen.

III. FÁZIS: Az ellentmondás. Vágásrendszerünkből a következő irányított $\vec{S}$ segédgráfot konstruáljuk: $V(\vec{S}) = \{C_1, C_2, \ldots, C_{2k}, C_{2k+1}\}$, C_i és C_j közt akkor és csak akkor vezet él, ha a két vágásnak van közös éle. Ez az él C_i-ből C_j-be vezet, ha $A(C_i) \subset A(C_j)$.

Belátjuk, hogy $\vec{S}$ páros gráf. Ebből következik, hogy van benne $k + 1$ elemű független ponthalmaz. De ez ellentmondás, mert $\widetilde{G}$-ben nincs $k + 1$ közös él nélküli irányított vágás.

Állítás: $\vec{S}$ páros gráf.

Valóban: tegyük fel, hogy van benne páratlan hosszú kör (nem szükségszerűen irányított). Ebben kell lenni két csatlakozó élnek: feltehető, hogy $C_{2k+1}C_1$ és C_1C_2. Ekkor $A(C_{2k+1}) \subset A(C_1) \subset A(C_2)$. Lesz egy olyan i, hogy $A(C_1) \subset A(C_i)$, de $A(C_{i+1}) \subset A(C_1)$. Ekkor a C_i és C_{i+1} közös éle C_1-ben is él. Ez azonban ellentmond $(\mathrm{V})^+$-nak. Az ellentmondás bizonyítja az állítást és így lezárja a bizonyítást. ■

A tétel egy következményét is ismertetjük. előtte azonban lássunk egy példát egy nem szükségszerűen Kőnig-tulajdonságú halmazrendszerre.

Definíció. Legyen $\vec{G}$ egy irányított gráf. Legyen $\mathcal{C}_e$ az irányított körök élhalmazai.

Példa. Legyen az alapgráfunk $K_{3,3}$, a három-ház-három-kút gráf. Vegyük egy teljes párosítását és éleit irányítsuk felfelé (a házak felé), a többi él irányítása mutasson lefelé (a kutak felé).

Ekkor minden kör legalább két felfelé irányított élt tartalmaz. Azaz az irányított körök között nincs két éldiszjunkt (összesen három él van felfelé iranyítva): $\nu(\mathcal{C}_e) = 1$. Másrészt bármely élét vesszük gráfunknak lesz azt elkerülő irányított kör: $\tau(\mathcal{C}_e) \geq 2$. Igazából egyenlőség áll fenn: Két felfelé mutató él lefogja az összes irányított kört.

A $K_{3,3}$, gráf síkgráfokban nem fordul elő. A három-ház-három-kút gráf megjelenése nem véletlen.

3. Következmény. *Legyen $\vec{G}$ egy síkgráf irányítása. Ekkor $\mathcal{C}_e$ Kőnig-tulajdonságú.*

Bizonyítás. Legyen G szépen (élgörbék átmetszése nélkül) lerajzolva a síkra. Vegyük a $\vec{G}^*$ irányított duálist, ahol az alapgráf a szokásos duális, míg irányítása olyan, hogy eszerint tekintve a duális él balról jobbra messe át (az ő irányítását követve).

Az eredeti és duális gráfok élhalmaza megfeleltetett. Így a $\vec{G}$-re alapozott $\mathcal{C}_e$ halmazrendszernek megfelel egy $\vec{\mathcal{C}}_e^*$ halmazrendszernek ($E(\vec{G}^*)$ felett). Ez majdnem a $\vec{G}^*$ gráf $\mathcal{V}$ halmazrendszere lesz. G köreiből csak a $\vec{G}^*$ gráf minimális (tartalmazásra nézve) vágásai erednek.

Ez azonban nem zavaró. Egy halmazrendszer akkor és csak akkor Kőnig-tulajdonságú, ha tartalmazásra nézve minimális élei is Kőnig-tulajdonságúak. Így Lucchesi—Younger-tétel alapján a $\vec{\mathcal{C}}_e^*$ halmazrendszer Kőnig-tulajdonságú és így a (vele izomorf) $\mathcal{C}_e$ halmazrendszer is. ■