HALMAZRENDSZEREK

Matematika MSc hallgatók számára

7. Előadás

Előadó: Hajnal Péter

Jegyzetelő: Hajnal Péter 2010. március 16.

Emlékeztető. τ-kritikus halmazrendszer

Bollobás Béla tétele

1. Tétel (Bollobás-tétel). *Legyen $\mathcal{H}$ egy k-uniform τ-kritikus halmazrendszer, melyre $\tau(\mathcal{H}) = \ell + 1$. Ekkor*

$$|\mathcal{H}| \le \binom{k+\ell}{k}.$$

Először átfogalmazzuk a tételt. legyen $m = |\mathcal{H}|$ és $\mathcal{H} = \{E_1, E_2, \ldots, E_m\}$. A τ-kritikus tualjdonság miatta a $\mathcal{H} - E_i$ halmazrendszerek mindegyikének ($i = 1, 2, \ldots, m$) van ℓ elemű L_i lefogóhalmaza. Ez az L_i természetesen nem foghatja le az E_i élt. Így E_i és L_j akkor és csak akkor diszjunkt ha $i = j$.

2. Tétel (Bollobás-tétel). *Legyen $\mathcal{H} = \{E_1, E_2, \ldots, E_m\}$ egy k-uniform halmazrendszer és $\mathcal{L} = \{L_1, L_2, \ldots, L_m\}$ egy ℓ-uniform halmazrendszer, amelyre $E_i \cap L_j = \emptyset$ akkor és csak akkor, ha $i = j$. Ekkor*

$$m = |\mathcal{H}| \le \binom{k+\ell}{k}.$$

Bizonyítás. A LYM egyenlőtlenségnél és az Erdős—Ko—Rado-tételre Katona Gyula által adott bizonyításnál látott permutációs módszer mintájára dolgozunk.

Halmazrendszerünk alaphalmaza legyen V, egy n elemű halmaz. Legyen π egy bijekció V és $[n] = \{1, 2, \ldots, n\}$ között. Számoljuk meg azokat az (π, E, L) hármasokat, ahol $E \in \mathcal{H}$ és $L \in \mathcal{L}$ két él és $\pi(E)$ minden eleme kisebb mint $\pi(L)$ minden eleme (E megelőzi L-et).

Adott (E, L) párhoz hány számolandó π van? A két élnek diszjunktnak kell lenni, azaz valamely i-re $E = E_i$ és $L = L_i$. Ki kell választani $E_i \cup L_i$ helyét, az első k pozíció és E_i elemei közt bijekciót kell megadni, az utolsó ℓ pozíció és L_i elemei közt bijekciót kell megadni és a maradék $n - (k + \ell)$ elemet a maradék helyekkel kell megfeleltetni. Az i index m értéket vehet fel. A számolandó hármasok teljes száma:

$$m \cdot \binom{n}{k+\ell} k!\ell!(n - (k+\ell))!.$$

Egy adott π-re hány (E_i, L_i) pár lesz, ahol E_i képe megelőzi L_i képét? Azt állítjuk, ha ez megtörténik, akkor más E_j, L_j párra ez nem lehetséges. Valóban: E_j

metszi L_i-t, így képe metszi $pi(L_i)$-t. L_j metszi E_i-t, így képe metszi $\pi(E_i)$-t, ami megelőzi $\pi(L_i)$-t. E_j képe nem előzheti meg L_j-t. Egy π-hez legfeljebb egy élpár tartozhat. Az összes számolandó hármas LEGFELJEBB

$$n!.$$

A két gondolatmenet összevetése és aritmetikai rendezés adja a bizonyítandót. ■

A Bollobás-tételt két unifrom halmazrtendszerre mondtuk ki. Kimondható egy általánosítás két tetszőleges halmazrendszerre is, amely teljesen hasonló módon igazolható. Ennek kitalálását, a bizonyítás átalakítását az érdeklődő hallgatóra bízzuk.

Lovász László tétele

3. Tétel (Lovász-tétel). *Legyen $\mathcal{H} = \{E_1, E_2, \ldots, E_m\}$ egy k-uniform halmazrendszer és $\mathcal{L} = \{L_1, L_2, \ldots, L_m\}$ egy ℓ-uniform halmazrendszer, amelyre $E_i \cap L_j = \emptyset$, ha $i < j$ és $E_i \cap L_i = \emptyset$. Ekkor*

$$m = |\mathcal{H}| \leq \binom{k+\ell}{k}.$$

Azaz a Bollobás-tétel feltételei közül kihagytunk többet, mégis ugyanazt a következtetést vonjuk le. Ez a „hiányos” feltételrendszer teljesen új bizonyítási módszert kíván.

Bizonyítás. Halmazrendszerünk alaphalmaza legyen V. Minden csúcshoz rendeljünk egy $\mathbb{R}^{\ell+1}$-beli vektort úgy, hogy bármelyik ℓ darab csúcshoz rendelt ℓ darab vektor lineárisan független legyen. Ez könnyen megtehető, például $a \mapsto v_a = (1, i, i^2, \ldots, i^\ell)$ megfelelő hozzárendelés.

Ezekután minden L_i halmazt feleltessünk meg egy $\mathbb{R}^{\ell+1}$-beli nem-nulla $\vec{\lambda}_i$ vektorral úgy, hogy bármelyik L_i-beli elem vektorára merőleges legyen. Azaz L_i vektora az elemi által kifeszített hipersík ($\langle v_a : a \in L_i \rangle$) egyik normálisvektora.

Most minden E_i élhez egy $\mathbb{R}[x_0, x_1, \ldots, x_\ell]$-beli polinomot rendelünk a következőképpen: $E_i \mapsto p_i(x_0, x_1, \ldots, x_\ell) := \prod_{a \in E_i} v_a \cdot (x_0, x_1, \ldots, x_\ell)$.

Vegyük azt a mátrixot, amely i-edik sorában a j-edik pozíciójában a p_j polinomot értékeljük ki úgy, hogy változónak $\vec{\lambda}_i$ komponenseit adjuk értékként. Erre a mátrixra mint kiértékelési mátrixra hivatkozunk.

p_i definíciójában szerepelő faktorok $v_a \cdot \vec{x}$ tényezők, ahol $a \in E_i$, azaz egyik v_a sem merőleges $\vec{\lambda}_i$-re ($\vec{\lambda}_i$ csak $v_b : b \in L_i$ vektorokra merőleges és E_i, L_i diszjunkt). A kiértékelési mátrix főátlóján nem-nulla elemek állnak. Ugyanez a logika adja, hogy a főátló feletti elemek 0-k. Azaz mátrixunk alsó trianguláris mátrix, nemnulla elemekkel a főátlón. Azaz nem elfajuló mátrix. Ebből következik, hogy az oszlopaival azonosított polinomok lineárisan függetlenek az

$$\langle x_0^{i_0} x_1^{i_1} \cdot \ldots \cdot x_\ell^{i_\ell} : i_0 + i_1 + \ldots + i_\ell = k \rangle$$

vektortérben, amely dimenziójáról könnyen látható, hogy $\binom{k+\ell}{k}$. Ez adja a bizonyítandót. ■

Kőnig-tulajdonság

Definíció. Egy $\mathcal{H}$ halmazrendszert Kőnig-tulajdonságúnak nevezünk, ha $\nu(\mathcal{H}) = \tau(\mathcal{H})$.

Az elnevezés onnan ered, hogy az alappéldát Kőnig dénes egy gráfelméleti alaptétele adja. Ha G páros gráf, akkor Kőnig-tulajdonságú.

Emlékeztetőnek megemlítjük a páros gráfok két jellemzését.

4. Tétel. *Legyen G egy gráf. A következők ekvivalensek:*

(i) G páros,

(ii) G pont-él illeszkedési mátrixa totálisan unimoduláris,

(iii) G nem tartalmaz páratlan hosszú kört.

Megemlítjük, hogy egy mátrix totálisan unimoduláris, ha minden négyzetes almátrixának determinánsa $\{-1, 0, 1\}$-beli érték.

Ha újabb példákat keresünk Kőnig-tulajdonságú halmazrendszerekre, akkor természetes a párosság fogalmát kiterjeszteni gráfokról halmazrendszerekre/hipergráfokra. A feladat nem olyan egyszerű. Sokféle lehetőség felmerül. Mi csak a fenti karakterizációban rejlő lehetőségeket merítjük ki egy kissé.

Hiper-páros halmazrendszerek

Két lehetőséget említünk, ahogy a páros hipergráfok fogalmaz bevezethető.

Az elsőt csak vázoljuk:

Definíció. Egy halmazrendszer totálisan unimoduláris, ha pont-él illeszkedési mátrixa totálisan unimoduláris.

5. Tétel. *Legyen $\mathcal{H}$ egy halmazrendszer. A következők ekvivalensek*

(i) $\mathcal{H}$ totálisan uinimoduláris,

(ii) $\mathcal{H}$ minden nyomának van tökéletes piros-kék színezése, azaz minden $R \subset V$ esetén a $Tr_R(\mathcal{H})$ halmazrendszer alaphalmaza piros-kék színezhető úgy, hogy minden E élben a két színű csúcsok számát megadó számpár $(\lfloor |E|/2 \rfloor, \lceil |E|/2 \rceil)$ legyen.

6. Tétel. *Ha $\mathcal{H}$ egy totalisan unimoduláris halmazrendszer, akkor Kőnig-tulajdonságú.*

$\star \qquad \star \qquad \star$

Definíció. Legyen $\mathcal{H}$ egy halmazrendszer. Egy kör egy

$$C : v_0, E_1, v_1, E_2, v_2, \ldots, v_{\ell-1}, E_\ell, v_\ell = v_0$$

sorozat, ahol a v_i csúcsok különbözőek és $v_{i-1}, v_i \in E_i$ (az indexaritmetika modulo n aritmetika). $V(C) = \{v_0, v_1, \ldots, v_{\ell-1}\}$, ℓ a kör hossza.

Gráfokkal ellentétben halmazrendszerbeli körök lehetnek nagyon össze-visszák.

Definíció. Egy C kör (lásd előző definíció) szelid E_i élére $E_i \cap V(C) = \{v_{i-1}, v_i\}$.

Definíció. Egy halmazrendszer hiper-páros, ha minden szelid köre páratlan hosszú.

7. Tétel. *Egy hiper-páros halmazrendszer Kőnig-tulajdonságú.*

Bizonyítás. Először egy lemmát bizonyítunk.

8. Lemma. *ha $\mathcal{H}$ egy hiper-páros halmazrendszer, akkor csúcsai kiszínezhetők piros és kék színnel úgy, hogy minden legalább kételemű él tartalmazzon piros és kék pontot is.*

A lemma bizonyításához vegyük ki $\mathcal{H}$ kételemű éleit. Ezek alkossák a $G_{\mathcal{H}}$ egyszerű gráfot. A páratlan hosszú szelíd kör hiánya miatt $G_{\mathcal{H}}$ nem tartalmazhat pártalan hosszú kört, azaz páros gráf.

Ha $G_{\mathcal{H}}$ összefüggő, akkor meghatározza a csúcsok egy két színezését, ami a lemmát bizonyítja. valóban. Ha lenne, mondjuk csak piros csücsot tartalmazó, monokromatiksu él, akkor $G_{\mathcal{H}}$-ban két legközelebbi pontját összekötő $G_{\mathcal{H}}$-beli út élei és ő maga egy páratlan hosszú szelíd kört adna.

Ha $G_{\mathcal{H}}$ nem összefüggő, akkor indukcióval élünk (az indukció elindulása könnyen ellenőrizhető). Vágjuk ketté V-t, hogy kételemű élt ne vágjunk szét (feltevésünk szerint ez megtehető). Vegyük a két részben $\mathcal{H}$ nyomát (ezekre feltételünk öröklődik, azaz ezek sem tartalmaznak páratlan hosszú szelíd kört, hiper-párosak) és színezzük ki piros-kékkel az indukciós feltevés alapján. Minden olyan él, amire feltételünk van (legalább két csúcsot tartalmaz) valamelyik nyomban legalább kételemű, azaz az indukciós feltétel miatt már ott tartalmaz piros és kék csúcsot is.

A lemma bizonyítása után rátérünk a tétel állítására. Ez a következő lemmából következik.

9. Lemma. *Ha $\mathcal{K}$ hiper-páros és τ-kritikus, akkor élei diszjunktak.*

Ebből a lemmából adódik az állítás, hiszen $\mathcal{H}$ tartalmaz egy $\mathcal{K}$ τ-kritikus részhalmazrendsert, ami nyilván megmarad hiper-párosnak. Lemmánk alapján $\mathcal{K}$ élei diszjunktak. Speciálisan $\nu(\mathcal{K}) = \tau(\mathcal{K})$. Összefoglalva

$$\tau(\mathcal{H}) \geq \nu(\mathcal{H}) \geq \nu(\mathcal{K}) = \tau(\mathcal{K}) = \tau(\mathcal{H}),$$

Ami adja $\mathcal{H}$-ra a τ és ν paraméter egyenlőséget, a Kőnig-tulajdonságot.

Már csak az utóbbi lemma bizonyítása van hátra. Ez szinte egybeesik a páros τ-kritikus gráfok jellemzésével (ami egyben Kőnig-tételének egy változata).

Indirekten tegyük fel, hogy $\mathcal{K}$-nak van két metsző éle: $x \in E \cap F$, $E, F \in \mathcal{K}$. Legyen L_E és L_F a $\mathcal{K} - E$ és $\mathcal{K} - F$ halmazrendszerek egy optimális lefogó ponthalmaza $t = \tau(\mathcal{K}) - 1$ ponttal. Ebből a két halmazból összerakunk két részből egy $\widetilde{L}$ halmazt

a) $L_E \cap L_F$,

b) Vegyük $\mathcal{H}$ nyomát $L_E \Delta L_F \cup \{x\}$-ben Ez is egy hiper-páros halmazrendszer. Így piros-kék színezhető úgy, hogy minden legalább kételemű él tartalmazzon mindkét színű csúcsot. A második hozzájárulás $\widetilde{L}$ halmazhoz a kisebb színosztály lesz. (Könnyű látni, hogy a nyomot páratlan sok ponton vettük.)

Belátjuk, hogy $\widetilde{L}$ legfeljebb t pontot tartalmaz és lefogja $\mathcal{K}$-t. Ez ellentmondás.

Az elemszámra vonatkozó állítás egyszerűen látható. A lefogás ellenőrzésénél az $L_E \cap L_F$-et metsző éleket el is hagyhatjuk. A maradék élek között mindegyik metszi az $L_E \Delta L_F \cup \{x\}$ halmazt (E-re és F-re x biztosítja ezt, a többi élre pedig L_E és L_F lefogó mivolta). Azon élek, amelyek $L_E \Delta L_F \cup \{x\}$-t legalább két csúcsban metszik szintén nem problémásak: a nyomban piros és kék színű elemük is van (bármelyik színosztályt választottuk $\widetilde{L}$-be a lefogás teljesül). Ezekután viszont minden élre tudjuk a lefogás tényét (miért?). ■