HALMAZRENDSZEREK

Matematika MSc hallgatók számára

5. Előadás

Előadó: Hajnal Péter

Jegyzetelő: Hajnal Péter 2010. március 2.

Katona—Kruskal-tétel

A következőkben egy a Katona—Kruskal-tételhez szükséges definíciót ismertetünk.

Definíció. Legyen $\mathcal{H}$ k-uniform halmazrendszer V felett. Ekkor

$$\partial\mathcal{H} = \{R|\exists x \in E \in \mathcal{H} : R = E - \{x\}\}$$

a halmazrendszer *árnyéka.*

Definíció szerint az árnyék egy $k-1$-uniform halmazrendszer.

Világos, hogy $k|\mathcal{H}| \geq |\partial\mathcal{H}|$. Egyenlőség van, ha $\mathcal{H}$ élei diszjunktak. (Igazából akkor és csak akkor van egyenlőség, ha $\mathcal{H}$ élei között nincs két olyan, amelyek metszete $k-1$ elemű.)

Ugyanakkor az már nem triviális, hogy $|\mathcal{H}|$ elemszámú halmazrendszer árnyékának a minimális mérete mekkora. A fejezet végső célja ennek meghatározása.

Például ha $\mathcal{H} = \binom{R}{k}$ ahol $R \subseteq V$, akkor $\partial\mathcal{H} = \binom{R}{k-1}$ könnyen látható módon. Belátjuk, ha $\mathcal{H}$ élszáma ilyen speciális ($\binom{r}{k}$ alakú), akkor ez a példa minimális árnyékú lesz az ilyen élszámú k uniform halmazrendszerek közt. Az általános tétel kimondása azonban nem ilyen egyszerű.

Legyen $V = \{0, 1, 2, 3, ...\} = \mathbb{N}$ és tekintsük a $\mathcal{K} = \binom{V}{k}$, összes k elemű halmazok végtelen rendszerét. Ezen a rendszeren bevezethető egy ún. *antilexikografikus rendezés*, vagyis olyan rendezés, hogy ha $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_k\}$ és $B = \{b_1, b_2, \ldots, b_k\} \in \binom{V}{k}$ úgy, hogy $a_1 < a_2 < \ldots < a_k$ és $b_1 < b_2 < \ldots < b_k$, akkor $A <_{antilex} B$, ha vagy $a_k < b_k$ vagy $a_i < b_i$ valamely i-re és az i-nél nagyobb j indexekre $a_j = b_j$.

Így például $k = 3$ esetén $012 < 013 < 023 < 123 < 014 < 024 < 034 < 124 < 134 < 234 < 015 < \ldots$, ahol a halmazokat az elemeik rendezett listájaként kódoltuk. Ez egy ω_0 típusú rendezése $\binom{\mathbb{N}}{k}$-nak.

Az alábbi kérdés egy középiskolai feladatként is felfogható. Hány elem áll az $\{a_1, a_2, \ldots, a_k\}$ halmaz előtt a fenti sorban (feltesszük, hogy $a_1 < a_2 < \ldots < a_k$)?

A kérdés/feladat egyszerű. Azok a k-asok kerülnek elé, amik az összevetésben valahány hátsó komponens egyezése után kisebb elemet tartalmaznak. Ezeket a k-asokat csoportosíthatjuk aszerint, hogy melyeik elem döntött. Azok az előző k-asok, ahol az utolsó (legnagyobb) elem döntött azok pontosan $\{0, 1, 2, \ldots, a_k - 1\}$ k elemű részhalmazai. Ilyenből $\binom{a_k}{k}$ van. Azok az előző k-asok, ahol az utolsó előtti (nagyságban $k-1$-edik) elem döntött azok pontosan $\{0, 1, 2, \ldots, a_{k-1} - 1\}$ $k-1$ elemű részhalmazai az a_k elemmel kibővítve. Ilyenből $\binom{a_{k-1}}{k-1}$ van. Általában, ha egy k-as az i-edik (az egyes k-asok elemeinek nagyság szerinti rendezésében) elemek összehasonlítása miatt került a kérdeses k-as elé, akkor legkisebb i eleme

$\{0,1,2,\ldots,a_i-1\}$ egy i elemű részhalmaza az $\{a_{i+1},a_{i+2},\ldots,a_k\}$ halmazzal uniózva. Ez az összes előző elemekhez $\binom{a_i}{i}$ új darabot ad. Tehát a teljes válasz a kérdésre $\{a_1,a_2,\ldots,a_k\}$ előtt pontosan

$$\binom{a_k}{k}+\binom{a_{k-1}}{k-1}+\binom{a_{k-2}}{k-2}+\ldots+\binom{a_2}{2}+\binom{a_1}{1}$$

k-as áll.

A fenti egyszerű gondolatmenet egyből adja a következő állítást. Az állítás indukcióval könnyen bizonyítható. De az alábbiakban felhívjuk a figyelmet, hogy az előző gondolatmenet egy teljes, korrekt bizonyítást is tartalmaz erre.

1. Lemma. *Rögzítsük a k pozitív egész számot. Legyen m egy tetszőleges természetes szám. Ekkor létezik egyetlen természetes számokból álló $a_1<a_2<\ldots<a_k$ szám k-as, amelyre*

$$m=\binom{a_k}{k}+\binom{a_{k-1}}{k-1}+\binom{a_{k-2}}{k-2}+\ldots+\binom{a_2}{2}+\binom{a_1}{1}.$$

Bizonyítás. Adott m esetén a szám k-asok fenti sorrendjéből vegyük az $m+1$-ediket, azaz azt, amelyik előtt m szám áll. Ennek a k-asnak elemei megfelelő a_i-ket adnak az előző gondolatmenete szerint.

Más szám k-as nem is lehet jó, hiszen az is a sorunkban áll, egy eltérő pozícióban. Azaz előtte nem m darab k-as áll. De ekkor újból az előző gondolatmenetre hivatkozva látható, hogy nem is lehet alternatív megoldás. ∎

Megjegyzés. A fenti tételhez hasonlóval már találkozhattunk. Például minden természetes szám egyértelműen írható fel, mint különböző természetes kitevős kettő hatványok összege. Ez a kettes számrendszert megalapozó észrevétel. A fenti tétel egy k-binom számrendszer alapjait alkotja meg.

Természetesen merül fel a szokásos számkódolás átírása, az alapműveletek elvégzése ha k-binom alakban adottak a számok. Mi nem érintjük ezeket a kérdéseket, csak néhány jelölést vezetünk be.

Jelölés. Ha $a_1<a_2<\ldots<a_k$ természetes számok k-asára

$$m=\binom{a_k}{k}+\binom{a_{k-1}}{k-1}+\binom{a_{k-2}}{k-2}+\ldots+\binom{a_2}{2}+\binom{a_1}{1},$$

akkor azt írjuk, hogy

$$m=\langle a_k,a_{k-1},\ldots,a_1\rangle_k=\langle a_k,a_{k-1},\ldots,a_1\rangle,$$

illetve

$$\lceil m\rceil^{(k)}=(a_k,a_{k-1},\ldots,a_1).$$

Definíció. Jelölje $\mathcal{KK}_m$ az antilexikografikus rendezés szerinti sor első m elemét. (A k paramétert fixnek tekintjük.)

Például, ha $m=\binom{n}{k}$, akkor $\mathcal{KK}_m=\binom{\{0,1,\ldots,n-1\}}{k}$.

2. Lemma.

$$|\partial\mathcal{KK}_m| = \binom{a_k}{k-1} + \binom{a_{k-1}}{k-2} + \binom{a_{k-2}}{k-3} + \ldots + \binom{a_2}{1} + \binom{a_1}{0}.$$

Bizonyítás. Tudjuk, hogy $\mathcal{KK}_m$ élei az $\{a_1, a_2, \ldots, a_k\}$ k-ast megelőző k-asok. Ezeket osztályoztuk is: $\{0, 1, 2, \ldots, a_k - 1\}$ k elemű részhalmazai, továbbá az a_k elemmel kibővítve a $\{0, 1, 2, \ldots, a_{k-1} - 1\}$ $k-1$ elemű részhalmazai és így tovább. Az első osztálybeli élek az árnyék a_k-t nem tartalmazó éleit adja (a többi osztályból eredő árnyékbeli ilyen $k-1$-esei már az első osztály árnyékából is jönnek!). Ilyen elem az árnyékban $\binom{a_k}{k-1}$ van. A második osztálybeli élek új hozzájárulása az árnyékhoz az a_k-t tartalmazó, de a_{k-1}-et nem tartalmazó $k-1$-esek lesznek. A későbbi osztályok ilyen hozzájárulása már a második osztályból is következik. Ez $\binom{a_{k-1}}{k-2}$ új elem az árnyékban. A gondolatmenetet folytatva kapjuk a lemma állítását. ■

Ezek után már ki tudjuk mondani a Katona—Kruskal-tételt. két ekvivalens formában is leírjuk:

3. Tétel (Katona—Kruskal-tétel I. változat). *Legyen $\mathcal{H}$ egy k-uniform halmazrendszer m darab éllel. Ekkor $|\partial\mathcal{KK}_m| \le |\partial\mathcal{H}|$.*

4. Tétel (Katona—Kruskal-tétel II. változat). *Legyen $\mathcal{H}$ egy k-uniform halmazrendszer. Legyen*

$$|\mathcal{H}| = \binom{a_k}{k} + \binom{a_{k-1}}{k-1} + \binom{a_{k-2}}{k-2} + \ldots + \binom{a_2}{2} + \binom{a_1}{1}.$$

Ekkor

$$|\partial\mathcal{H}| \ge \binom{a_k}{k-1} + \binom{a_{k-1}}{k-2} + \binom{a_{k-2}}{k-3} + \ldots + \binom{a_2}{1} + \binom{a_1}{0}.$$

Mielőtt belátjuk a tételt bevezetünk egy új fogalmat.

Definíció. Legyen $i < j$ két természetes szám. Általában $S_{ij}(H)$ megmarad a H halmaznak kivéve, ha $j \in H$ és $i \notin H$, amikor is $S_{ij}(H) = H - \{j\} \cup \{i\}$.

S_{ij} az antilexikografikus sorrendben előretólja a H halmazt. Ez az előretolás operáció kiterjeszthető halmazrendszerekre is.

Definíció. Legyen $\mathcal{H}$ egy k-uniform halmazrendszer. Ha egy $E \in \mathcal{H}$ élre $S_{ij}(E)$ nem él $\mathcal{H}$-ban (speciálisan $E \ne S_{ij}(E)$), akkor cseréljük le E-t $S_{ij}(E)$-re (E továbbá már nem él). Más esetben E megmarad élnek.

A következő lemma egyszerűen ellenőrizhető.

5. Lemma. *$i < j$ két természetes szám (halmazrendszerünk alaphalmazának két eleme).*

(i) $|\mathcal{H}| = |S_{ij}\mathcal{H}|$,

(ii) $|\partial\mathcal{H}| \ge |\partial S_{ij}\mathcal{H}|$.

(ii)$^+$ $S_{ij}\partial\mathcal{H} \supset \partial S_{ij}\mathcal{H}$.

Ezekután lássuk a Katona—Kruskal-tétel második változatának bizonyítását.

Bizonyítás. Az előző lemma alapján elég olyan halmazrendszerekkel foglalkoznunk, ahol minden $i < j$ esetén $S_{ij}\mathcal{H} = \mathcal{H}$. Ilyen például $\mathcal{KK}_m$. Sajnos vannak mások is. Mit tudunk az ilyen halmazrendszerekről?

Legyen $\mathcal{H}_0$ az eredeti halmazrendszer azon élei, amik tartalmazzák 0-t. Legyen $\mathcal{H}_{\geq 1}$ az eredeti halmazrendszer azon élei, amik minden eleme legalább 1, azaz

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_0 \dot{\cup} \mathcal{H}_{\geq 1}.$$

$\partial\mathcal{H}$ tartalmazza $\mathcal{H}_0$ elemeiből a 0 kihagyásával kapott $\widetilde{\mathcal{H}_0}$ halmazrendszert. Illetve ennek árnyékának (ezek már $k-2$ elemű halmazok) elemeiből a 0 elemmel történő bővítessel nyert halmazokat. Erre a halmazrendszerre vezessük be a $\widehat{\partial\widetilde{\mathcal{H}_0}}$ jelölést. Eddig $\mathcal{H}_0$ nyomát írtuk le. Mi a helyzet $\mathcal{H}_{\geq 1}$ nyomával? Ez NEM ad új $k-1$-est $\mathcal{H}$ nyomához. Valóban, ha T egy $E \in \mathcal{H}_{\geq 1}$ élből keleltkezett a j elem elhagyásával, és nincs benne $\partial\mathcal{H}_0$-ban (azaz nem eleme $\widetilde{\mathcal{H}_0}$-nek), akkor $S_{0j}\mathcal{H}$ eltérő lenne $\mathcal{H}$-tól (éppen $S_{0j}(T \cup \{j\}$ miatt). Azaz

$$\partial\mathcal{H} = \widetilde{\mathcal{H}_0} \dot{\cup} \widehat{\partial\widetilde{\mathcal{H}_0}}.$$

Ezek után k-ra vonatkozó teljes indukcióval bizonyítunk, amin belül élszámra vonatkozó indukciót végzünk. Tudjuk, hogy

$$\begin{aligned}|\mathcal{H}_0| + |\mathcal{H}_{\geq 1}| = |\mathcal{H}| = &\tbinom{a_k}{k} + \tbinom{a_{k-1}}{k-1} + \tbinom{a_{k-2}}{k-2} + \ldots + \tbinom{a_2}{2} + \tbinom{a_1}{1} = \\ = &\tbinom{a_k-1}{k} + \tbinom{a_{k-1}-1}{k-1} + \tbinom{a_{k-2}-1}{k-2} + \ldots + \tbinom{a_2-1}{2} + \tbinom{a_1-1}{1} + \\ &\tbinom{a_k-1}{k-1} + \tbinom{a_{k-1}-1}{k-2} + \tbinom{a_{k-2}-1}{k-3} + \ldots + \tbinom{a_2-1}{1} + \tbinom{a_1-1}{0}.\end{aligned}$$

Két esetet különböztetünk meg.

1. eset: Ha $|\mathcal{H}_0| \geq \tbinom{a_k-1}{k-1} + \tbinom{a_{k-1}-1}{k-2} + \tbinom{a_{k-2}-1}{k-3} + \ldots + \tbinom{a_2-1}{1} + \tbinom{a_1-1}{0}$, akkor ugyanez az egyenlőtlenség érvényes a $\widetilde{\mathcal{H}_0}$ $k-1$ uniform halmazrendszer élszámára.

Mielőtt továbbhaladnánk vegyük észre, hogy a fenti élszámbecslés nem $k-1$-binom számrendszerben van megadva. Legyen $m = \tbinom{a_k-1}{k-1} + \tbinom{a_{k-1}-1}{k-2} + \tbinom{a_{k-2}-1}{k-3} + \ldots + \tbinom{a_2-1}{1} = \langle a_k-1, a_{k-1}-1, \ldots, a_2-1\rangle_{k-1}$. Ha $a_1 = 0$, akkor ez megadja a fenti becslést. Ha azonban $a_1 \geq 1$ (és így $a_2 \geq 2$), akkor a fenti becslés $m+1 = \langle b_k, b_{k-1}, \ldots, b_2\rangle_{k-1}$. A két esetet külön kezeljük. Csak a technikailag nehezebb második esetet számoljuk végig. Indukció alapján

$$|\partial\widetilde{\mathcal{H}_0}| \geq \binom{b_k}{k-2} + \binom{b_{k-1}}{k-3} + \binom{b_{k-2}}{k-4} + \ldots + \binom{b_2}{0}.$$

Természetesen a bal oldal egyben $\widehat{\partial\widetilde{\mathcal{H}_0}}$ élszáma is és így

$$\begin{aligned}|\partial\mathcal{H}| = |\widetilde{\mathcal{H}_0}| + |\widehat{\partial\widetilde{\mathcal{H}_0}}| \geq\ &\tbinom{b_k}{k-1} + \tbinom{b_{k-1}}{k-2} + \tbinom{b_{k-2}}{k-3} + \ldots + \tbinom{b_2}{1} + \\ &\tbinom{b_k}{k-2} + \tbinom{b_{k-1}}{k-3} + \tbinom{b_{k-2}}{k-4} + \ldots + \tbinom{b_2}{0} = \\ =\ &\tbinom{b_k+1}{k-1} + \tbinom{b_{k-1}+1}{k-2} + \tbinom{b_{k-2}+1}{k-3} + \ldots + \tbinom{b_2+1}{1} \geq \\ \geq\ &\tbinom{a_k}{k-1} + \tbinom{a_{k-1}}{k-2} + \tbinom{a_{k-2}}{k-3} + \ldots + \tbinom{a_2}{1} + 1 \\ =\ &\tbinom{a_k}{k-1} + \tbinom{a_{k-1}}{k-2} + \tbinom{a_{k-2}}{k-3} + \ldots + \tbinom{a_2}{1} + \tbinom{a_1}{0}.\end{aligned}$$

Csak az utolsó előtti egyenlőség szorul magyarázatra. Ennek értelme ha $\langle a_k - 1, a_{k-1} - 1, \ldots, a_2 - 1\rangle_{k-1} + 1 = \langle b_k, b_{k-1}, \ldots, b_2\rangle_{k-1}$, akkor $\langle b_k + 1, b_{k-1} + 1, \ldots, b_2 +$

$1\rangle_{k-1} \geq \langle a_k, a_{k-1}, \ldots, a_2\rangle_{k-1} + 1$. Azaz, ha az antilexikografikus sorrendben $(a_k - 1, a_{k-1}-1, \ldots, a_2-1)$ rákövetkezője $(b_k, b_{k-1}, \ldots, b_2)$, akkor $(b_k+1, b_{k-1}+1, \ldots, b_2+1)$ később következik mint $(a_k, a_{k-1}, \ldots, a_2)$. Ez könnyen ellenőrizhető.

2. eset: Ha $|\mathcal{H}_0| < \binom{a_k-1}{k-1} + \binom{a_{k-1}-1}{k-2} + \binom{a_{k-2}-1}{k-3} + \ldots + \binom{a_2-1}{1} + \binom{a_1-1}{0}$, akkor $|\mathcal{H}_{\geq 1}| > \binom{a_k-1}{k} + \binom{a_{k-1}-1}{k-1} + \binom{a_{k-2}-1}{k-2} + \ldots + \binom{a_2-1}{2} + \binom{a_1-1}{1}$.

Az indukciót alkalmazva ($\mathcal{H}_{\geq 1}$ élszáma kisebb mint $\mathcal{H}$-é)

$$\begin{aligned}\binom{a_k-1}{k-1} + \binom{a_{k-1}-1}{k-2} + \binom{a_{k-2}-1}{k-3} + \ldots + \binom{a_2-1}{1} + \binom{a_1-1}{0} \leq\ & |\partial\mathcal{H}_{\geq 1}| \leq \\ \leq\ & |\widetilde{\mathcal{H}_0}| = |\mathcal{H}_0|.\end{aligned}$$

Azaz visszajutottunk az 1. eset alkalmazhatóságához, ami a bizonyítást teljessé teszi. ■

Alap optimalizálási feladatok

A gráfelméletben megismert optimalizálási feladatok többsége probléma nélkül kiterjeszthető hipergráfokra.

Definíció. Egy $\mathcal{H}$ halmazrendszer $L \subset V$ ponthalmazát lefogó ponthalmaznak nevezzük, ha minden éle metszi L-et. A lefogó ponthalmazok minimális méretét $\tau(\mathcal{H})$-val jelöljük.

Definíció. Egy $\mathcal{H}$ halmazrendszer $\mathcal{M} \subset \mathcal{H}$ élhalmazát párosításnak vagy független élhalmaznak nevezzük, ha elemei páronként diszjunktak. A a független élhalmazok maximális méretét $\nu(\mathcal{H})$-val jelöljük.

Megjegyzés. Ha $\emptyset \in \mathcal{H}$, akkor nincs lefogó ponthalmazunk. Ekkor τ értékét ∞-nek definájuk. Párosítások esetén nincs értelme élekrendszeréről beszélni, azaz egy élt többszörösen is $\mathcal{M}$-be rakni. Kivéve, ha $\emptyset \in \mathcal{H}$. Ekkor az üresélet tetszőLeges muktiplicitással véve párosítást kapunk. Ebben az esetben is szokás a $\nu(\mathcal{H}) = \infty$ megállapodás.

Természetesen, ha L egy lefogó ponthalmaz és $\mathcal{M}$ egy független élhalmaz, akkor $|L| \geq |\mathcal{M}|$. Így $\tau(\mathcal{H}) \geq \nu(\mathcal{H})$.

Érdemes a lefogó ponthalmaz és független élhalmaz következő relaxiációját bevezetni:

Definíció. Egy $\mathcal{H}$ halmazrendszer csúcsainak $(w_v)_{v \in V}$ súlyozása tört-lefogás, ha minden csúcs súlya nemnegatív és tetszőleges élre az ebbe eső csúcsok súlyainak összege legalább 1. Egy tört-lefogás mérete az összes csúcs súlyának összege.

Ha L egy lefogó csúcshalmaz, akkor L pontjainak 1, az L-en kívül eső pontoknak 0 súlyt adva egy tört-lefogást kapunk, amely mérete $|L|$.

Definíció. Egy $\mathcal{H}$ halmazrendszer éleinek $(\omega_E)_{E \in \mathcal{H}}$ súlyozása tört-párosítás, ha minden él súlya nemnegatív és tetszőleges csúcsra az ezen átmenő élek súlyainak összege legfeljebb 1. Egy tört-párosítás mérete az összes él súlyának összege.

Ha $\mathcal{M}$ egy párosítás, akkor $\mathcal{M}$ éleinek 1, az $\mathcal{M}$-en kívül eső éleknek 0 súlyt adva egy tört-párosítást kapunk, amely mérete $|\mathcal{M}|$.

A megfelelő optimalizálási problémák optimuma természetes paraméterek.

Definíció. Legyen $\mathcal{H}$ egy halmazrendszer. Ekkor $\tau^*(\mathcal{H})$ a legkisebb méret a törtlefogások között és $\nu^*(\mathcal{H})$ a legnagyobb méret a tört-párosítások között.

Megjegyzés. A legkisebb/legnagyobb jelző magyarázatra szorul, hiszen a súlyok valós értékeket vehetnek fel. két optimalizálási feladat feltételeit felírva két lineáris programozási feladatot kapunk:

$$(L)\quad \begin{cases} w_v \geq 0, & v \in V \\ \sum_{v:v\in E} w_v \geq 1, & E \in \mathcal{H} \end{cases}$$
$$\sum_{v:v\in V} w_v \to \min,$$

$$(P)\quad \begin{cases} \omega_E \geq 0, & E \in \mathcal{H} \\ \sum_{E:v\in E} \omega_E \leq 1, & v \in V \end{cases}$$
$$\sum_{E:E\in\mathcal{H}} \omega_E \to \max.$$

Ha $\emptyset \in \mathcal{H}$, akkor (L)-nek nincs lehetséges megoldása és (P)-nek tetszőlegesen nagy értéket felvehet a célfüggvénye (igazából az üresélnek megfelelő változó értéke lehet tetszőleges nen-negatív érték, nem szerepel egyetlen egy csúcsra vonatkozó feltételben sem). Ha azonban $\emptyset \notin \mathcal{H}$, akkor (P) lehetséges megoldásainak halmaza kompakt és célfüggvénye folytonos. (L) lehetséges megoldásainak halmaza kompakttá tehető, hisz 1-nél nagyobb súlyt nem érdemes egyik csúcsnak sem hagyni. Így a $w_v \leq 1$ $(v \in V)$ feltételrendszert (L)-hez adva az optimum nem változik, de a lehetséges megoldások halmaza kompakttá válik. A minimum és maximum felvétele abból következik, hogy kompakt halmazon értelmezett folytonos függvény mindig felveszi minumumát, maximumát.

6. Lemma. *Tetszőleges $\mathcal{H}$ halmazrendszerre*

$$\nu(\mathcal{H}) \leq \nu^*(\mathcal{H}) = \tau^*(\mathcal{H}) \leq \tau(\mathcal{H}).$$

Bizonyítás. A $\nu(\mathcal{H}) \leq \nu^*(\mathcal{H}) \leq \tau^*(\mathcal{H}) \leq \tau(\mathcal{H})$. egyenlőtlenségsorozatból csak a középső szorul magyarázatra. Ehhez legyen $(w_v)_{v\in V}$ egy optimális tört-lefogás ($\sum_{v\in V} w_v = \tau^*(\mathcal{H})$), és $(\omega_E)_{E\in\mathcal{H}}$ egy optimális tört-párosítás ($\sum_{E\in\mathcal{H}} \omega_E = \nu^*(\mathcal{H})$). Ekkor

$$\begin{aligned} \nu^*(\mathcal{H}) = \sum_{E\in\mathcal{H}} \omega_E &\leq \sum_{E\in\mathcal{H}} \left(\sum_{v\in E} w_v\right) \omega_E = \sum_{v,E:v\in E} w_v \omega_E = \\ &= \sum_{v\in V} \left(\sum_{E:v\in E} \omega_E\right) w_v \leq \sum_{v\in V} w_v = \tau^*(\mathcal{H}) \end{aligned}$$

A bizonyított egyenlőtlenség igazából egyenlőség. Ehhez feltehető $\emptyset \notin \mathcal{H}$. A két oldalt mint egy lineáris programozási feladatot tekintjük. A két oldal az (L) és (P) duális feladatoknak felel meg. Így a dualitás tétel alapján a két optimum megegyezik (létezésük garantált). ∎