HALMAZRENDSZEREK

Matematika MSc hallgatók számára

4. Előadás

Előadó: Hajnal Péter

Jegyzetelő: Udvari Balázs 2010. február 23.

Napraforgók ($\triangle$ - rendszerek)

Definíció. $H_1, \ldots, H_s$ egy s *szirmú napraforgó* (vagy Δ-rendszer), ha minden $i \neq j$ esetén ($i, j \in \{1, \ldots, s\}$) $H_i \cap H_j = \bigcap_{k=1}^{s} H_k$. A $T = \bigcap_{k=1}^{s} H_k$ halmazt a napraforgó *tányérjának* nevezzük.

Így például s darab páronként diszjunkt halmaz rendszere s szirmú napraforgó.

A napraforgók témakörének az alapkérdése az, hogy ha adott egy k-uniform halmazrendszer, amiben nincs s szirmú napraforgó, akkor annak legfeljebb hány éle lehet?

Egy felső becslést ad a következő tétel.

1. Tétel (Erdős - Rado). *Legyen $\mathcal{H}$ k-uniform halmazrendszer, ami nem tartalmaz s szirmú napraforgót. Ekkor $|\mathcal{H}| \leq (s-1)^k k!$*

Bizonyítás. k szerinti teljes indukcióval bizonyítunk, mégpedig a tétel következő alakját: Ha $\mathcal{H}$ k-uniform és $|\mathcal{H}| > (s-1)^k k!$, akkor $\mathcal{H}$-ban van s szirmú napraforgó.

A $k = 1$ eset triviális, figyelembe véve, hogy egy 1-uniform halmazrendszer elemei diszjunkt egy-egy pontot tartalmazó élek és így bármelyik s él s szirmú napraforgót alkot.

Tegyük fel, hogy $(k-1)$-re igazoltuk az állítást. A k-ra való lépéshez szükség lesz a következő lemmára.

2. Lemma. *Legyen $\mathcal{H}$ k-uniform halmazrendszer és $t \in \{2, 3, \ldots\}$. Ekkor a következők valamelyike teljesül:*

(i) létezik t diszjunkt él,

(ii) van olyan $v \in V$, hogy v-n legalább $\frac{|\mathcal{H}|}{(t-1)k}$ él halad át.

A lemmából következik a tétel állítása. Alkalmazzuk $t = s$-re a lemmát. Ha *(i)* teljesül, akkor van s diszjunkt él, ami egy s szirmú napraforgót jelent. Ha *(ii)* teljesül, akkor legyen $\widetilde{\mathcal{H}} = \{E \backslash \{v\} : v \in E \in \mathcal{H}\}$. (Vagyis a v-t tartalmazó élekből kivesszük v-t.) Nyilvánvalóan $\widetilde{\mathcal{H}}$ $(k-1)$-uniform és

$$\widetilde{\mathcal{H}} \geq \frac{|\mathcal{H}|}{k(t-1)} > \frac{(s-1)^k k!}{k(s-1)} = (s-1)^{k-1}(k-1)!$$

Az indukciós feltevés alapján $\widetilde{\mathcal{H}}$-ban van s szirmú napraforgó, jelölje ezt $S_1, \ldots, S_s$. Ekkor $S_1 \cup \{v\}, \ldots, S_s \cup \{v\}$ s szirmú napraforgó $\mathcal{H}$-ban.

Már csak a lemmát kell bizonyítani.

Válasszunk maximális számú páronként diszjunkt élt (vagyis minden élnek legyen nemüres a metszete valamely kiválasztot éllel). Legyenek ezek $E_1, E_2, \ldots, E_\tau$.

Ha $\tau \geq t$, akkor következik *(i)*. Ha $\tau < t$, akkor legyen $A = \bigcup_{i=1}^{\tau} E_i$. Nyilván $|A| = \tau k$, így létezik olyan $\widehat{A} \supseteq A$, hogy $|\widehat{A}| = (t-1)k$. Legyen $v \in \widehat{A}$ olyan csúcs, amin maximális számú él halad át. A skatulyelv alapján ezen a v-n legalább $\frac{|\mathcal{H}|}{|\widehat{A}|}$ él halad át, tehát ekkor *(ii)* teljesül.

Ezzel a tétel bizonyítását befejeztük. ■

A tétel $s = 3$ esetén $2^k k!$-t ad felső becslésként az élek számára. Ez exponenciálisnál gyorsabb növekedésű becslés. A legjobb konstrukció exponenciális sok k-élt tartalmaz.

Konstrukció. Legyen $V = \{a_1, a_2, \ldots, a_k\} \dot\cup \{b_1, b_2, \ldots, b_k\}$. $\mathcal{H}$ tartalmazza azokat az éleket, amelyek minden $\{a_i, b_i\}$ $(i = 1, 2, \ldots, k)$ halmazt pontosan egy elemben metszenek. Könnyű látni, hogy $\mathcal{H}$ egy 2^k élű k uniform halmazrendszer.

Azt állítjuk, ogy $\mathcal{H}$ nem tartalmaz három szirmú napraforgót. Egy elképzelt napraforgó T tányérja minden élnek része, azaz minden $\{a_i, b_i\}$ $(i = 1, 2, \ldots, k)$ halmazt egy vagy nulla elemben metsz. Másrészt nem lehet k elemű, azaz kell lenni olyan i-nek, hogy T diszjunkt legyen $\{a_i, b_i\}$ halmaztól. Hogyan metsz a három szirom a $\{a_i, b_i\}$ halmazba? Diszjunktan kell metszeniük és persze egy eleműnek kell mindhárom metszetnek lenni. Az elképzelt napraforgó nem létezhet.

Vapnyik—Cservonyenkisz-dimenzió

Definíció. Legyen $\mathcal{H}$ halmazrendszer V felett, A pedig V egy részhalmaza. Ekkor legyen $Tr_A\mathcal{H} = \{E \cap A : E \in \mathcal{H}\}$ a $\mathcal{H}$ halmazrendszer A-ra vett *nyoma.*

Világos, hogy $Tr_A\mathcal{H} \subseteq \mathcal{P}(A)$. Abban az esetben, amikor $Tr_A\mathcal{H} = \mathcal{P}(A)$, azt mondjuk, hogy A *telített.* A $\mathcal{H}$ halmazrendszer *Vapnyik—Cservonyenkisz-dimenzióján* a $\dim_{VCs}\mathcal{H} = \max\{|A| : A \text{ telített}\}$ számot értjük.

3. Tétel (Vapnyik—Cservonyenkisz). *Legyen $\mathcal{H}$ halmazrendszer $[n] = \{1, 2, \ldots, n\}$ felett, t pedig pozitív egész úgy, hogy teljesüljön $\mathcal{H}$ elemszámára a $|\mathcal{H}| > 1 + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \ldots + \binom{n}{t-1}$ egyenlőtlenség. Ekkor $\dim_{VCs}\mathcal{H} \geq t$. Más szavakkal megfogalmazva létezik t elemű telített halmaz $\mathcal{H}$-ban.*

Még a tétel bizonyítása előtt vegyük észre, hogy a tételben megadott korlát éles. Tekintsük ugyanis azt a halmazrendszert, amelyre teljesül, hogy $\mathcal{H} = \{R \subseteq [n] : |R| < t\}$. Világos, hogy $|\mathcal{H}| = 1 + \binom{n}{1} + \ldots + \binom{n}{t-1}$, és ugyanakkor $\mathcal{H}$-ban nincs t elemű telített A halmaz, ehhez ugyanis $Tr_A\mathcal{H}$ definíciójára gondolva A-t tartalmazó él megléte szükséges feltétele A telítettségének, de $|A| = t$, így ez a feltétel nem teljesül.

A tételre két bizonyítást is adunk.

1. Bizonyítás. n szerinti teljes indukcióval dolgozunk.

$n = 1$-re triviálisan igaz a tétel állítása.

Felhasználva azt az ismert összefüggést, hogy $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$, adódik a feltételből:

$$|\mathcal{H}| > \left[\binom{n-1}{0} + \ldots + \binom{n}{t-2}\right] + \left[\binom{n-1}{0} + \ldots + \binom{n-1}{t-1}\right].$$

Jelölje L_1 és L_2 a két fenti szögletes zárójeles kifejezést.

Vezessük be a következő jelöléseket: $\mathcal{H}_1 = \{E \in \mathcal{H} : n \notin E, E \cup \{n\} \in \mathcal{H}\}$, $\mathcal{H}_2 = \mathcal{H} - \mathcal{H}_1$, és legyen $\widetilde{\mathcal{H}_2} = \{E \backslash \{n\} : E \in \mathcal{H}_{\in}\}$.

Világos, hogy $\mathcal{H}_1, \widetilde{\mathcal{H}_2}$ halmazrendszer $[n-1]$ felett. Mivel $\mathcal{H}_1$ és $\mathcal{H}_2$ diszjunkt és elemszámuk összege $|\mathcal{H}| > L_1 + L_2$, vagy *(i)* $|\mathcal{H}_1| > L_1$, vagy *(ii)* $|\mathcal{H}_2| = |\widetilde{\mathcal{H}_2}| > L_2$ teljesül.

Ha *(i)* igaz, akkor az indukciós feltevés alapján létezik $A \subseteq [n-1]$ $t-1$ elemű $\mathcal{H}_1$-re nézve telített halmaz. Nem nehéz látni (mivel $E \in \mathcal{H}_1$ esetén E és $E \cup \{n\}$ is él $\mathcal{H}$-ban), hogy $A \cup \{n\}$ ekkor telített lesz $\mathcal{H}$-ra nézve (és persze t elemű).

Ha *(ii)* igaz, akkor az indukciós feltevés szerint van $A \subseteq [n-1]$ t elemű $\widetilde{\mathcal{H}_2}$-re nézve telített halmaz. Ez definíció szerint azt jelenti, hogy minden $R \subseteq A$-hoz létezik $E \in \widetilde{\mathcal{H}_2}$, amire $E \cap A = R$. Viszont minden $E \in \widetilde{\mathcal{H}_2}$-hoz létezik egyértelműen egy $E_0 \in \mathcal{H}_2$: ez vagy E, vagy $E \cup \{n\}$. Mindkét esetben $E_0 \cap A = R$, vagyis A $\mathcal{H}$-ra nézve is telített. ■

2. Bizonyítás. Nevezzünk egy halmazrendszert *lefelé zártnak*, ha $E \in \mathcal{H}$ és $F \subseteq E$, akkor $F \in \mathcal{H}$ is teljesül.

Ha $\mathcal{H}$ lefelé zárt, akkor a tétel állítása egyszerűen következik: a feltételek miatt van $\mathcal{H}$-ban legalább t elemű él, ugyanakkor pedig a lefelé zártság miatt minden él telített.

Definiáljuk a következő S_i leképezést: $i \in V$, $E \in \mathcal{H}$-ra $S_iE = E \backslash \{i\}$ ha $E \backslash \{i\} \notin \mathcal{H}$ és $S_iE = E$ különben. Legyen továbbá $S_i\mathcal{H} = \{S_iE : E \in \mathcal{H}\}$.

Vegyük észre, hogy $|\mathcal{H}| = |S_i\mathcal{H}|$ a definícióból egyből következő módon. Nem nehéz látni azt sem, hogy ha $\mathcal{H}$ nem lefelé zárt, akkor van olyan i, hogy $S_i\mathcal{H} \neq \mathcal{H}$. (Ha nem lefelé zárt, akkor van olyan E és F, hogy $F \subset E$ és $E \in \mathcal{H}$ de $F \notin \mathcal{H}$. Ekkor tetszőleges $i \in E \backslash F$ megfelel.) A harmadik észrevételt külön lemmaként is kimondjuk.

4. Lemma. *$|Tr_A\mathcal{H}| \geq |Tr_AS_i\mathcal{H}|$ mindig teljesül.*

Ezen észrevételekből következik a tétel. Tetszőleges $\mathcal{H} = \mathcal{H}_1$-hez léteznek olyan $i_1, i_2, \ldots$ elemek, hogy $\mathcal{H}_k \neq \mathcal{H}_{k+1} = S_{i_k}\mathcal{H}_k$, vagyis iteráltan végrehajtjuk az S transzformációt úgy, hogy mindig változzon a halmazrendszerünk. Nyilván véges sok lépésben elakad a lánc, mert minden lépésben csökken az élek elemszámának az összege. Legyen az utolsó halmazrendszer $\mathcal{H}_s$. Ez az eddigiek szerint lefelé zárt, és éleinek a száma teljesíti a tétel feltételét. Így van benne t elemű él, A. Ekkor A telített $\mathcal{H}_s$-re nézve, nyoma $2^|A|$ elemű. A lemma alapján A $\mathcal{H}_1$-re vett nyoma is legalább ennyi elemű, azaz A telített.

Már csak a lemma bizonyítása van hátra. Ha $i \notin A$, akkor $Tr_A\mathcal{H} = Tr_AS_i\mathcal{H}$ nyilvánvalóan teljesül.

Ha $i \in A$, akkor A részhalmazait állítsuk $(R, R \cup \{i\})$ párokba, ahol $i \notin R$. Ha egy E él A-beli nyoma az egyik párba esik, akkor S_iE nyoma is ugyanehhez a párhoz tartozik.

Belátjuk, hogy minden pár hozzájárulása $Tr_A\mathcal{H}$-hoz legalább annyi, mint $Tr_AS_i\mathcal{H}$-hoz. Egyedül az jelenthet problémát, ha R és $R \cup \{i\}$ is benne van $Tr_AS_i\mathcal{H}$-ban, de $Tr_A\mathcal{H}$-ban csak az egyikük szerepel. Azonnal látszik, hogy ez utóbbi szükségképpen $R \cup \{i\}$. Azonban ha R nem szerepel $Tr_A\mathcal{H}$-ban, akkor minden olyan E él, amelyre $E \cap A = R \cup \{i\}$, feltétlenül $S_iE = E \backslash \{i\}$. Ez ellentmond annak, hogy $R \cup \{i\} \in Tr_A S_i \mathcal{H}$ és így a lemmát is igazoltuk, teljessé téve a bizonyítást. ■