HALMAZRENDSZEREK

Matematika MSc hallgatók számára

3. Előadás

Előadó: Hajnal Péter
Jegyzetelő: Hajnal Péter

2010. február 16.

Emlékeztető. Sperner-rendszer. Részbenrendezett halmazok. Lánc, antilánc.

Sperner-rendszerek és részbenrendezett halmazok

Múlthéten észrevettük, hogy egy „kicsi” lánc fedés garantálja, hogy részbenrendezett halmazunkban nem lehet „túl nagy” antilánc. Hasonlóan egy „kicsi” antilánc fedés garantálja, hogy részbenrendezett halmazunkban nem lehet „túl nagy” lánc. Célunk annak belátása, hogy ezen észrevételen alapuló bizonyítási séma „teljes”.

1. Tétel. *Legyen $(P, \leq)$ egy részbenrendezett halmaz.*

(i)

$$\max_{L \text{ lánc}}(|L|) = \min_{A_1, A_2, \ldots, A_k \text{ antiláncfedés}} k$$

(ii) ***(Dilworth-tétel)***

$$\max_{A \text{ antilánc}}(|A|) = \min_{L_1, L_2, \ldots, L_k \text{ láncfedés}} k$$

A tétel második része okozza a valódi nehézséget. Ez a kombinatorika egyik alaptétele.

Bizonyítás. Mindkét állítás kettébontható bal és jobb oldala közötti két irányú egyenlőtlenség igazolására. Mint megjegyeztük mindkét esetben a maximalizálási feladat optimuma nyilvánvalóan kisebb a minimalizálásai feladaténál. A másik irányű egyenlőtlenségeket kell igazolnunk.

(i) Legyen $M = \max_{L \text{ lánc}}(|L|)$

Minden $x \in P$-hez rendeljük hozzá az x-et maximális elemként tartalmazó láncok között a legnagyobb méretét. (Jól definiált az érték, hiszen $\{x\}$ mindig egy x-et maximális elemként tartalmzó lánc.) A hozzárendelés értékkészlete $\{1, 2, \ldots, M\}$. Legyen A_i ($i = 1, 2, \ldots, M$) azon P-beli elemek halmaza, amikhez az i értéket rendeljük hozzá. Így M darab halmazzal fedjük le P-t. Ha belátjuk, hogy mindegyik A_i antilánc, akkor készen vagyunk. Ez indirekten könnyen adódik, ha $x < y$ és $x, y \in A_i$, akkor az $x \in A_i$-t bizonyító i elemű lánchoz y-t adva egy olyan $i+1$ elemű láncot kapunk, amely ellentmond az $y \in A_i$ feltevésnek.

(ii) Legyen $M = \max_{A \text{ antilánc}}(|A|)$ és $m = \min_{L_1, L_2, \ldots, L_k \text{ láncfedés}} k$.

$(P, \leq)$ alapján definiálunk egy B páros gráfot. Csúcshalmaza $\{\{p^+, p^-\} : p \in P\}$ kételemű halmazok diszjunkt uniója. A két színosztálya $F = \{p^+ : p \in P\}$ és $A = \{p^- : p \in P\}$. p^+ és q^- akkor és csak akkor van összekötve, ha $p > q$. Természetesen $A \equiv P \equiv F$. Értelmezhető egy $\pi : V(B) \to P$ vetítés, amelyre $p^+, p^- \mapsto p$.

Célunk, hogy belássuk $\nu(B) = |P| - m$ és $\tau(B) = |P| - M$. Ezek után már adódik az állítás Kőnig tételéből.

$\nu(B) = |P| - m$: Vegyünk egy M párosítást B-ben. Ekkor minden $uv \in E(B)$-nek lesz egy vetülete P-ben: $\pi(u)\pi(v)$. Ez egy él (nem hurokél) a P ponthalmazon. Könnyű látni, hogy $\{\pi(u)\pi(v) : uv \in M\}$ egy olyan gráf lesz, amelyben minden csúcs foka $0, 1$ vagy 2. Azt is egyszerű látni, hogy a párosítás vetülete nem tartalmazhat kört. Így P a vetület-utak uniója (az izolált pontokat 0 hosszú útnak véve). Ezek az utak ponthalmazai P egy láncfedésének felelnek meg. A láncok száma az utak száma, a párosítás vetületének komponens száma, ami egy erdő esetén a csúcsszámból levonva az élszámot: $|P| - |M|$. A gondolatmenet megfordítható: egy ℓ láncból álló láncfedés megfelel P egy útpartíciójának (az út élei a láncban való egymás utániságnak felelnek meg). Az út élei felemelhetők egy $|P| - \ell$ élű párosítássá. A két gondolatmenet adja a bizonyítandó egyenlőséget.

$\tau(B) = |P| - M$: Minden $R \subset V(B)$ meghatározza P egy felosztását négy részre $P = P^+(R) \dot\cup P^-(R) \dot\cup P^\pm(R) \dot\cup P^0(R)$ úgy, hogy $R = \{p^- : p \in P^+(R)\} \dot\cup \{p^+ : p \in P^-(R)\} \dot\cup \{p^-, p^+ : p \in P^\pm(R)\}$.

Legyen L egy lefogó ponthalmaza B-nek. Ekkor $P^0(L)$ egy antilánc $(P, \leq)$-ben. Így speciálisan $|L| \geq |P| - M$. Gondolatmenetünk ismét megfordítható: Legyen A egy antilánc. Definiálunk egy L ponthalmazt B-ben az alábbi módon: $P^+(L) := \{p | \exists a \in A : a < p\}$, $P^-(L) := \{p | \exists a \in A : p < a\}$, $P^0(L) := A$, $P^\pm(L) := \emptyset$. Könnyű ellenőrizni, hogy $|P| - |A|$ elemszámú lefogóhalmazt definiáltunk Az oda-vissza gondolatmenet adja a második megígért egyenlőséget és így a tételt. ■

Perfekt gráfok

Dilworth-tétel egy gráfelméleti megfogalmazását nézzük. A $(P, \leq)$ részbenrendezett halmaznak megfeleltetünk egy G_P összehasonlíthatósági gráfot. Ennek az egyszerú gráfnak a csücshalmaza P és két csúcs akkor és csak akkor összekötött, ha összehasonlíthatók.

A fent bevezetett részbenrendezett halmazokkal kapcsolatos optimalizálási kérdések szoros kapcsolatban vannak gráfelméleti optimalizálási feladatokkal.

Észrevétel.

- $\max_{L \text{ lánc}}(|L|) = \omega(G_P)$,
- $\min_{A_1, A_2, \ldots, A_k} = \chi(G_P)$,
- $\max_{A \text{ antilánc}}(|A|) = \alpha(G_P) = \omega(\overline{G_P})$,
- $\min_{L_1, L_2, \ldots, L_k} = \chi(\overline{G_P})$

Az előző tétel kapcsolatai vezetnek el a következő gráfelméleti fogalomhoz:

Definíció. Egy G gráf perfekt, ha minden F feszített részére (csak csúcselhagyásokkal nyerhető részgráfjára) $\omega(F) = \chi(F)$.

A korábban bebizonyított tétel ekvivalense a következő:

2. Tétel. *Legyen G_P egy $(P, \leq)$ egy részben rendezett halmaz összehasonlíthatósági gráfja. Ekkor*

(i) *G_P perfekt,*

(ii) *$\overline{G_P}$ perfekt.*

Megemlítünk két következményt.

Észrevétel. A páros gráfok összehasonlíthatósági gráfok. Ha a csúcshalmazon $x < y$ akkor és csak akkor teljesül, ha x alsó, y felső és x, y szomszédos, akkor a kapott részbenrendezett halmaz összehasonlíthatósági gráfja G.

3. Következmény. *A páros gráfok és komplementereik perfektek.*

A páros gráfok perfektsége egyszerűen adódik a definíciókból. Komplementerének perfektsége viszont ekvivalens a Kőnig-tétellel. A fentiekből igazából kiolvasható a Kőnig-tétel, Dilworth-tétel ekvivalenciája. Ami persze formálisan nyilvánvaló, hiszen két igaz tételről van szó. Ahogy az ekvivalenciát bizonyítottuk, az azonban „csak” öteletes „nyelvi csűrés-csavarás” volt.

A második következményhez szükséges lesz egy új fogalomra.

Definíció. Vegyünk egy e egyenest. Legyen $\mathcal{I}$ intervallumok (összefüggő ponthalmazok) egy rendszere. $M_{\mathcal{I}}$ legyen ennek az intervallumrendszernek a metszet gráfja, ami az az egyszerű gráf, amely a csúcsai $\mathcal{I}$ elemei és két csücs akkor és csak akkor összekötött, ha metszik egymást.

Egy G gráf intervallumgráf, ha alkalmas $\mathcal{I}$ intervallumrendszerre $G \simeq G_{\mathcal{I}}$.

Megjegyzezzük, hogy az intervallumainkról nem tettünk fel semmit. Ha csak zárt intervallumokra szorítkozunk ugyanehhez az intervallumgráf fogalomhoz jutunk. Hasonloán, ha nyiltságot követelünk meg. (Miért?)

Észrevétel. Legyen G egy intervallum gráf. Ekkor $\overline{G}$ egy összehasonlíthatósági gráf. Valóban legyen $G \simeq G_{\mathcal{I}}$. $\mathcal{I}$ elemeit rendezhetjük az alábbi módon: $I, J \in \mathcal{I}$ esetén legyen $I < J$, akkor és csak akkor, ha I minden pontja J előtt van (e-t irányított egyenesnek, vagy számegyenesnek gondolva).

A részbenrendezés összehasonlíthatósági gráfja $\overline{G_{\mathcal{I}}}$.

4. Következmény. *Az intervallumgráfok és az intervallumgráfok komplementerei perfektek.*

Talán feltűnő, hogy példáink komplementerpárokban jönnek. Ezek (és további példák) vezették el C. Berge-t a következő sejtés kimondására: G akkor és csak akkor perfekt, ha $\overline{G}$ is az. A sejtést igazolták. Egy bizonyítással találkozni fogunk a halmazrendszerek további vizsgálata során.

Metsző halmazrendszerek

Definíció. Egy halmazrendszert metszőnek nevezünk, ha bámely két éle metszi egymást.

Azaz egy halmazrendszer metsző, ha tiltjuk a diszjunkt élpárokat.

Az alap extremális kérdés, hogy milyen sok éle lehet egy n elemű ponthalmaz feletti metsző halmazrendszernek. Mint kiderül, egy középiskolás veresnyfeladat szintű problémáról van szó.

Példa. Legyen $x \in V$. $\mathcal{H}$ alkossa az összes x-et tartalmzó halmazt. $\mathcal{H}$ nyilván metsző és $|\mathcal{H}| = 2^{|V|-1} = 2^{n-1}$.

Példa. Legyen V egy n elemű halmaz, ahol n páratlan, $n = 2k + 1$. $\mathcal{H}$ alkossa az összes legalább $k + 1$ elemű halmazt. $\mathcal{H}$ nyilván metsző és $|\mathcal{H}| = 2^{|V|-1} = 2^{n-1}$.

Hasonló példa adható, ha az alaphalmaz pontszáma páros és a pontosan $|V|/2$ elemű halmazok által alkotott komplementer párok mindegyikéből csak egyiket rakjuk $\mathcal{H}$-ba, a több mint $|V|/2$ elemű halmazok mellé.

A fenti két példa extremális.

Észrevétel. Egy n elemű V halmaz feletti metsző halmazrendszerek legfelejbb 2^{n-1} élt tartalmaznak.

Valóban: V 2^n darab részhalmazát 2^{n-1} darab komplementer halmazpárra oszthatjuk. Ezek mindegyikéből legfeljebb egyet tartalmazhat metsző halmazrendszerünk.

Jóval nehezebb kérdést kapunk, ha k uniform halmazrendserekkel dolgozunk. $k > |V|/2$ esetben itt sem lesz gond: az összes k-as metsző rendszert alkot. $k \leq |V|/2$ esetben azonban egy alaptétel válaszolja meg kérdésünket.

5. Tétel (Erdős—Ko—Rado-tétel). *Legyen $k \leq n/2$. Legyen $\mathcal{H}$ egy metsző halmazrendszer egy n elemű V csúcshalmaz felett. Ekkor*

$$|\mathcal{H}| \leq \binom{n-1}{k-1}$$

Becslésünk a lehető legjobb, amit egy x elemet tartalmazó összes k elemű halmaz mutat.

(Katona Gyula bizonyítása). Először egy módosított feladatot vizsgálunk: K-t alkossa egy kör n pontja. Ezen pontok között van egy óra mutató járása szerinti rákövetkezés, ami pontjaink egy $v_0, v_1, \ldots, v_{n-1}$ sorrendjét eredményezi, ahol az indexek aritmetikája modulo n értendő. $I \subset K = \{v_0, v_1, \ldots, v_{n-1}\}$ esetén azt mondjuk, hogy I az $[a, z]$ ív, ha I tartalmazza a-t és rákövetkezőit, z-ig bezárólag, azaz létezik $i \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$ és $\ell \in \{1, \ldots, n\}$, hogy $I = \{v_i, v_{i+1}, \ldots, v_{\ell-1}\}$. $\ell = |I|$ az I ív hossza. Hány k hosszú ív választható ki úgy, hogy metsző rendszert alkossanak?

Erre a kérdésre a válasz egyszerűbb mint a tételbeli kérdésre: k ív kiválasztható (például $[a_1, a_k], [a_2, a_k], \ldots, [a_k, a_{2k-1}]$), több nem. Valóban: Ha $I = [a_i, \ldots, a_{i+k-1}]$ egy ív rendszerünkből, akkor a többi ívünk mindegyike metszi I-t. Az I-t metsző íveink $k - 1$ komplementerpárba oszthatók: egy tipikus pár az a_j-ben végződő és

a_{j+1}-ben kezdődő két ív. (Itt használjuk, hogy $2k \leq n$.) Így valóban nem lehet $1+(k-1)$-nél több ívünk.

Ezen észrevételt a LYM egyenlőtlenség bizonyításához hasonló ötlettel (úgy nevezett permutációs módszer) alkalmazzuk a tételbeli állításra:

Legyen $\mathcal{H}$ egy k-uniform metsző halmazrendszer. Legyen π egy bijekció V ($\mathcal{H}$ alaphalmaza) és az előző körszerűen rendezett K halmaz között. Számoljuk össze azon (π, E) párokat, ahol $E \in \mathcal{H}$ és $\pi(E)$ egy ív. Az összeszámolást kétféleképpen végezzük el.

Először adott E-hez nézzük meg hányféleképpen választható olyan π, hogy a megfelelő pár számolandó legyen. Egyszerű látni, hogy $\pi(E)$ egy k hosszú ív, amire n lehetőség van. Ennek lerögzítés után $k! \cdot (n-k)!$ darab jó bijekció lesz. Az összes pár számára

$$\sum_{E \in \mathcal{H}} n \cdot k!(n-k)! = |\mathcal{H}| n \cdot k!(n-k)!$$

adódik.

Másodszor adott π-hez nézzük meg hány él vezet összeszámolandó párhoz. Itt lesz hasznos a korábbi egyszerűsítés. Az alapján legfeljebb k-t kapunk. Azaz az összes pár számára LEGFELJEBB

$$kn!$$

adódik.

A kétféle válasz összevetése — rendezés után — adja a tételt. ■