HALMAZRENDSZEREK

Matematika MSc hallgatók számára

2. Előadás

Előadó: Hajnal Péter
Jegyzetelő: Ozsvárt László 2010. február 9.

Emlékeztető. Egy V feletti $\mathcal{S}$ halmazrendszer Steiner-rendszer, ha $\mathcal{S}$ 3-uniform, és bármely $x \neq y \in V$ elemekhez pontosan egy $T \in \mathcal{S}$ él van, melyre $x, y \in T$.

Steiner-rendszerek és kvázicsoportok (folytatás)

Emlékeztető. V felett akkor és csak akkor létezik Steiner-rendszer, ha V-n létezik kommutatív, idempotens, Steiner-tulajdonságú kvázicsoport.

A Steiner-rendszerek alaptétele alapján tudjuk, hogy milyen nagyságú V halmazon van kommutatív, idempotens, Steiner-tulajdonságú kvázicsoport. Ez az állítás ekvivalens a Steiner-rendszerek alaptételével. Ennél jóval egyserűbb az alábbi állítás.

1. Lemma. *V véges halaz esetén pontosan akkor létezik rajta kommutatív, idempotens, kvázicsoport-művelet, ha $|V|$ páratlan.*

Bizonyítás. Először is írjuk fel egy egy V-n értelmezett $+$ tetszőleges művelet művelettáblázatát, és vizsgáljuk meg hogy a fenti tulajdonságok miként olvashatóak le a táblázatból!
Észrevétel: $(V, +)$ pontosan akkor kvázicsoport, ha a táblázat minden sorában és oszlopában egyszer fordul elő minden elem. (Az ilyen táblázatokat Euler után *Latinnégyzeteknek* nevezzük.)

Pontosan akkor kommutatív a művelet, ha a táblázat szimmetrikus a főátlójára.

Ha idempotens a művelet, akkor a táblázat átlójában V elemei pontosan egyszer fordulnak elő. Amennyiben az átlón V elemei pontosan egyszer fordulnak elő, akkor a műveletitáblája sorainak nevét átdefiniálhatjuk úgy, hogy idempotens legyen. Ez a változtatás nem fogja a kommutatív/kvázicsoport-művelet tulajdonságokat megváltoztatni.

Most tegyük fel, hogy V-n létezik a lemmában leírt művelet. A kvázicsoport-művelet tulajdonság miatt bármely $a \in V$-re pontosan $|V|$ db a van a táblázatban. A kommutativitás miatt a főátlót nem tekintve páros sok a lesz a táblázatban. A főátlón viszont pontosan egyszer fordul elő, az idempotencia miatt. Így páratlan sok a van a táblázatban.

Legyen $|V| = 2k + 1$. Ekkor a $\mathbb{Z}_{2k+1}$ mint additív csoport összeadási táblázata jó lesz, csak arra kell ügyelni, hogy a táblázat sorainak/oszlopainak nevét aszerint kell megválasztani, hogy mi szerepel táblázat főátlójában, AZAZ nem standard módon lesz a tábla értelmezve. ■

2. Feladat. *Legyen V egy $\mathcal{S}$ Steiner-rendszer alaphalmaza. Legyen $\widehat{V} = V \dot{\cup} \{1\}$. Legyen $x, y \in \widehat{V}$. Definiáljuk az $x \circ y$ szorzatot a következőképpen:*

- *x, ha $y = 1$, illetve y, ha $x = 1$,*
- *z, ha $\{x, y, z\} \in \mathcal{S}$,*
- *1, ha $x = y$.*

Algebrai azonosságokkal axiómatizáljuk az így kapott struktúraosztályt.

Steiner-rendszerek rekurzív leírásai

3. Tétel. *Amennyiben léteznek v_1, v_2 pontú Steiner-rendszerek, akkor létezik $v_1 \cdot v_2$ pontú is.*

Bizonyítás. Két bizonyítást is ismertetünk.

I. Bizonyítás. Tudjuk, hogy a H-n pontosan akkor létezik kommutatív, idempotens, Steiner-tulajdonságú műveletet, ha létezik H-n Steiner-rendszer. Ha H_1, H_2 olyan halmazok, amelyeken létezik ilyen művelet, akkor a $H_1 \times H_2$ halmazon a komponensenkénti szorzás is ilyen művelet lesz (ez könnyen belátható), így létezik rajta Steiner-rendszer.

A második bizonyítás előtt kimondunk egy definíciót:

Definíció. Egy G gráf $K_{a_1, a_2, \dots, a_t}$ t-részes teljes gráf, ha $V(G) = A_1 \dot\cup A_2 \dot\cup \dots \dot\cup A_t$, ahol A_i-k páronként diszjunktak, $|A_i| = a_i$, és $E(G) = \{\{x, y\} : x \in A_i, y \in A_j, i \neq j\}$.

II. Bizonyítás. A $v_1 \cdot v_2$ csúcsú G teljes gráf éleit fogjuk háromszögekbe osztályozni. Bontsuk fel G csúcsait v_2 db v_1 elemű csúcshalmazba. Ezeken a csúcshalmazokon belül az éleket külön-külön háromszögekbe tudjuk osztályozni, így elég maradék éleket, azaz G-nek $K_{\underbrace{v_1, v_1, \dots, v_1}_{v_2 \times}}$ részgráfján szintén háromszögekbe osztályozni az éleket. Az összes ilyen v_1 csúcsú osztályt legyen $\{O_x\}_{x \in V_2}$, ahol V_2 egy v_2 elemű $\mathcal{S}_2$ Steiner-rendszer alaphalmaza. Ezek után mindegyik O_x osztályon belül adjunk a csúcsoknak indexet: $x_0, x_1, x_2, \dots, x_{v_1 - 1}$. Ha az O_x és O_y osztályból választunk egy-egy elemet, akkor a harmadik csúcs abban az O_z osztályban lesz, amire x, y, z hármast alkot $\mathcal{S}_2$-ben. Ha az első kettő elemnek i, j volt az indexe, akkor a harmadiknak az a k szám lesz az indexe, melyre: $i + j + k \equiv 0 \pmod{v_1}$. Az ezeket a csúcsokat összekötő élek egy osztályba kerülnek. A definíciójából adódóan ez egy jó osztályozása lesz G éleinek, így létezik $v_1 \cdot v_2$ csúcsú Steiner-rendszer. ■

Kiemeljük, hogy a fenti bizonyítás során beláttuk az alábbi álítást.

4. Lemma. $K_{\underbrace{a, a, \dots, a}_{v \times}}$ *élei háromszögekbe osztályozhatók, ha létezik v csúcsú Steiner-rendszer.*

5. Állítás. *Ha létezik v_1, v_2 pontú Steiner-rendszer, akkor létezik létezik v ponton is, ahol*

(a) $v = v_1 \cdot (v_2 - 1) + 1$,

(b) $v = v_1 \cdot (v_2 - 3) + 3$.

Bizonyítás. (a) Vegyünk egy v_2 csúcsú $\mathcal{S})2$ Steiner-rendszert v_1 darab példányát úgy, hogy bármely kettő példány egy adott a csúcsban metszi egymást. Ekkor összesen $(v_1 \cdot (v_2 - 1) + 1$ csúcsunk van. A v_2 elemű csúcshalmazokon belül az éleket $\mathcal{S}_2$ szerint definiáljuk. Vegyük észre, hogy az összes olyan élt magkaptuk, melyekben a szerepelhet, és most már csak olyan élek lehetnek a halmazrendszerben, amelyek v_2 elemű csúcshalmazok között mennek. Most hagyjuk el az a csúcsot, így kapunk v_1 db $v_2 - 1$ elemű diszjunkt csúcshalmazt. Az előző lemma miatt az ezeket a csúcshalamzokat összekötő keresztéleket háromszögekbe osztályozhatjuk.

Így sikerült a halmazrendszerben menő gráféleket háromszögekbe osztályozni, így létezik $(v_1 \cdot (v_2 - 1) + 1)$ elemű Steiner-rendszer.

(b) Vegyünk egy v_2 csúcsú $\mathcal{S})2$ Steiner-rendszert v_1 darab példányát úgy, hogy bármely kettő példány egy adott T élben/csúcshármasban metszi egymást. Ekkor összesen $(v_1 \cdot (v_2 - 3) + 3$ csúcsunk van. T három csúcsa mindegyik más csúccsal együtt pontosan egy hármasban szerepel. A konstrukció befejezése ugyanaz mint előbb. ∎

6. Feladat. *Legyen $\mathcal{S}_1$ és $\mathcal{S}_2$ két Steiner-rendszer v_1, illetve v_2 ponton. Konstruáljunk $(v_1 - 1)(v_2 - 1)/2 + 1$ ponton Steiner-rendszert.*

7. Feladat. *Legyen $\mathcal{S}_1$ és $\mathcal{S}_2$ két Steiner-rendszer v_1, illetve v_2 ponton. Konstruáljunk $(v_1 + 1)(v_2 + 1) - 1$ ponton Steiner-rendszert.*

Steiner-rendszerek alaptételének bizonyítása

8. Állítás. $v \equiv 1, 6\,(mod\ 6) \Rightarrow$ *létezik v pontú Steiner-rendszer.*

Bizonyítás. Indirekt teljes indukcióval bizonyítjuk az állítást

Amennyiben nem igaz az állítás, akkor létezik egy minimális v elemszámú halmaz, hogy $v \equiv 1, 3\,(\text{mod } 6)$, amelyen nincs Steiner-rendszer.

A v alapján két csoportra bonthatjuk a feladatot:

- $v = 6k + 3$: Erre korábban láttunk elemi konstruckiót, ami bármely k esetén működik.
- $v = 6k + 1$: Legyen $6k + 1 = 3 \cdot 2^l \cdot s + 1$, ahol s páratlan. $2^l \neq 6 \cdot m$, így $2^l \equiv 2, 4(\text{mod } 6)$. Így 2^l alapján is esetekre bontunk:
  - $2^l = 6 \cdot m + 2$: $v_1 := 2^l + 1$, $v_2 := 3 \cdot s$. Ilyenkor léteznek v_1, v_2 pontú Steiner-rendszerek, és $v_2 \cdot (v_1 - 1) + 1 = v$ miatt v elemű is.
  - $2^l = 6 \cdot m + 4$: $v_1 := 2^l \cdot s + 1\, v_2 := 3$. Ebben az esetben a fentihez hasonlóan létezik Steiner-rendszer.

∎

Sperner-rendszerek és Sperner-tétel

Definíció. $\mathcal{S}$ Sperner-rendszer V $(n := |V|)$ felett, ha bármely $E, E' \in \mathcal{S}$-re $E \not\subset E'$.

A témakör fő kérdése: Mekkora lehet V felett a legnagyobb elemszámú Sperner-rendszer?

Példa. Bármely $0 \le k \le n$ esetén $S = \binom{V}{k} = \{R \subset V : |R| = k\}$ Sperner-rendszer. Ennek $\binom{n}{k}$ eleme van. $k = [n/2]$ esetén kapjuk a legnagyobb elemszámú rendszert.

9. Tétel (Sperner-tétel). *A V feletti Sperner-rendszerek maximális elemszáma $\binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor}$.*

A tétel központi jelentőségű. Két bizonyítást is adunk rá.

I. Bizonyítás:

Szükséges van egy lemmára, amihez bevezetünk egy fogalmat:

Definíció. Legyen $\mathcal{H}$ egy n elemű V feletti halamzrendszer. Ekkor $\mathcal{H}$ f-vektora az a $(f_0, f_1, \dots, f_n)$ vektor, amely f_i komponense megmondja, hogy hány i elemű él szerepel $\mathcal{H}$-ban.

A lemma Sperner-rendszerek f-vektoráról állít egy fontos egyenlőtlenséget:

10. Lemma. *(LYM-egyenlőtlenség) Legyen S egy Sperner-rendszer V felett. Ekkor f-vektorára*

$$\sum_{i=0}^{|V|} \frac{f_i}{\binom{n}{i}} \le 1.$$

Megjegyzés. A lemma elnevezése onnan ered, hogy Lubell, Yamamoto és Meshalkin bizonyította egymástól függetelnül. Neveik kezdőbetűiből állították össze a hivatkozást. Gyakran Bollobás Béla nevét is a lemmához fűzik, aki egy rokon állítást igazolt hasonló módszerrel.

Bizonyítás. (LYM-egyenlőtlenség) Legyen π egy tetszőleges $V \to [n]$ bijekció, és $E \in S$ tetszőleges elem. Számoljuk össze azon (π, E) párokat, melyekre $\pi(E)$ $[n]$-nek egy kezdőszelete.

Ha minden egyes $E \in S$-hoz megszámoljuk az összes jó π sorbarendezést, akkor azt kapjuk, hogy $\sum_{E \in S} |E|! \cdot (n - |E|)!$ ilyen pár van.

Legyen most π tetszőleges sorbarendezés. Mivel a tartalmazás reláció teljes rendezés $[n]$ kezdőszeletein, ezért ha $\pi(E_1), \pi(E_2)$ kezdőszelete $[n]$-nek, akkor $E_1 \subset E_2$ vagy $E_2 \subset E_1$. Így ha π sorbarendezés, akkor legfeljebb egy E halmaz esetén lehet $\pi(E)$ kezdőszelete $[n]$-nek.

Az előzővel összevetve:

$$\sum_{E \in S} |E|! \cdot (n - |E|)! \le n!$$

Mindkét oldalt $n!$-sal osztva kapjuk a lemma állítását. ■

Sperner-tétel bizonyítása a LYM egyenlőtlenségből.

$$1 \ge \sum_{i=0}^{|V|} \frac{f_i}{\binom{n}{i}} \ge \sum_{i=0}^{|V|} \frac{f_i}{\binom{n}{[n/2]}} = \frac{|\mathcal{S}|}{\binom{n}{[n/2]}}$$

II. Bizonyítás Sperner-tételre

A tétel második bizonyításához bevezetünk néhány új fogalmat:

Definíció. Legyen $(P, \le)$ részbenrendezett halmaz. Ekkor $L \subset P$ lánc, ha L bármely két eleme összehasonlítható.

Definíció. Legyen $(P, \leq)$ részbenrendezett halmaz. Ekkor $A \subset P$ antilánc, ha A elemei páronként nem összehasonlíthatók.

Észrevétel. A $(\mathcal{P}(V), \subset)$ feletti antiláncok pontosan a V feletti Sperner-rendszerekkel egyeznek meg.

Észrevétel. Bármely L láncra és A antiláncra $|P \cap A| \leq 1$.

11. Következmény. *Amennyiben adott $L_1, L_2, ..., L_k$ láncok, melyek lefedik P-t, akkor bármely P feletti antilánc legfeljebb k elemű lehet.*

12. Következmény.

$$\max_{A \text{ antilánc}} (|A|) \leq \min_{L_1, L_2, \ldots, L_k \text{ láncfedés}} k$$

Célunk a következő lemma igazolása, amiből korábbi észrevételeink alapján Sperner tétele következik.

13. Lemma. *$(\mathcal{P}(V), \subset)$-en létezik $\binom{n}{[n/2]}$ láncot tartalmazó lefedés.*

Az alábbi fogalmat azért vezetjük be, hogy a céllemmánál erősebb, de a teljes indukciós bizonyíta'shoz jobban illeszkedő változatot mondjunk ki.

Definíció. $\mathcal{L} \subset \mathcal{P}(V)$, $\mathcal{L} = L_1 \subset L_2 \subset ... \subset L_t$ szimmetrikus lánc, ha van olyan i, hogy $|L_1| = i, |L_2| = i+1, \ldots, |L_t| = |V| - i$.

14. Lemma. *$(\mathcal{P}(V), \subset)$-nak létezik diszjunk szimmetrikus láncokkal való fedése.*

Megjegyzés. A szimmetrikusság miatt minden láncban szerepel egy $[n/2]$ elemszámú halmaz. Így a felhasznált láncok száma szükségszerűen $\binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor}$.

Lemma bizonyítása. $|V| = 1$ esetén triviálisan teljesül az állítás.

Legyen $|V| > 1$, ekkor:

$V = V_0 \dot\cup \{u\}$, ahol V_0-ról már tudjuk hogy létezik ilyen fedés.

$\mathcal{P}(V) = \mathcal{P}(V_0) \dot\cup \{R \subset V : u \in R\}$

Legyen $\mathcal{P}(V_0) = \mathcal{L}_1 \dot\cup \mathcal{L}_2 \dot\cup ... \dot\cup \mathcal{L}_k$. Ekkor az $\mathcal{L}_t = L_1 \subset L_2 \subset \ldots \subset L_j$ láncból az alábbi láncok keletkeznek:

$\mathcal{L}'_t = L_1 \cup \{u\} \subset L_2 \cup \{u\} \subset \ldots \subset L_{j-1} \cup \{u\}$, valamint $\mathcal{L}''_t = L_1 \subset L_2 \subset \ldots \subset L_j \cup \{u\}$.

Látható, hogy ezek szimmetrikusak, így a tétel állítását igazolják.

Ebből adódik a lemma és így a Sperner-tétel is.

Megjegyzés. Úgy tűnik mintha induktív/rekurzív konstrukciónk közben láncaink száma mindig megduplázódott volna. Pedig a láncok száma nem kettő hatványként növekszik, számuk $\binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor}$. A látszólagos ellentmondás feloldása, hogy $\mathcal{L}'_i$ lehet üres is.