Diszkrét Matematika MSc hallgatók számára

9. Előadás

Előadó: Hajnal Péter
Jegyzetelő: Hajnal Péter 2010. november 11.

1. Párosítási tételek

Emlékeztető. M párosítás, ha $|V(M)| = 2|M|$ vagyis M nem-hurokélek végpont-diszjunkt halmaza.

Emlékeztető. Ha az M párosítás és $V(M) = V(G)$, akkor *teljes párosításról* beszélünk.

Emlékeztető. $\nu(G)$ a G-beli párosítások között a legnagyobb méret.

Ekkor $2\nu(G)$ a legtöbb csúcs, amit párosítani tudunk. $|V(G)| - 2\nu(G)$ a legkevesebb csúcs, ami kimarad egy párosításból.

Az alábbiakban a párosítási algoritmusokból kiolvasható párosítási tételeket tárgyaljuk. Feltételezzük a magyar módszer és az Edmonds-algoritmus ismeretét. Habár tételeink „fele” általában józan ésszel, az alapfogalmak ismeretében látható.

1.1. Páros gráfok

Emlékeztető. L csúcshalmaz lefogó ponthalmaz, ha minden élnek legalább az egyik végpontja L-be esik.

Emlékeztető. $\tau(G) = \max\{|L| : L \text{ lefogó}\}$.

1. Tétel (Kőnig-tétel). *Legyen G egy páros gráf. Ekkor*

$$\nu(G) = \tau(G).$$

Bizonyítás. Tetszőleges M párosításra és L lefogó ponthalmazra $|M| \leq |L|$. Speciálisan a legnagyobb párosításra és legkisebb lefogó ponthalmazra is teljesül: $\nu(G) \leq \tau(G)$.

Legyen M egy $\nu(G)$ méretű párosítás. Futassuk a magyar módszert. Természetesen az algoritmus nem találhat javító utat, sikertelen kereséssel végződik. A magyar módszer korrektségének második bizonyítása mutatta, hogy az eljárásunk mellékterméke egy L lefogó ponthalmaz, amely mérete M méretével egyezik. Így az optimális lefogó ponthalmaz mérete legfeljebb $|L| = |M|$. Tehát $\tau(G) \leq \nu(G)$. ∎

Emlékeztető. Legyen $S \subset A$. Legyen $\epsilon(S) = |S| - |N(S)|$. Azaz S elemszámának többlete szomszédainak számához képest (ami persze lehet negatív is).

Emlékeztető. $\delta_A(P) = |A| - |P|$ (nem párosított pontok száma A-ban).

2. Tétel (Kőnig-tétel). *Legyen G egy páros gráf. Ekkor*

$$\max\{\epsilon(S) : S \subset A\} = \min\{\delta_A(P) : P \textit{ párosítás}\}$$

Bizonyítás. Láttuk, hogy minden $S \subset A$ csúcshalmazra és P párosításra $\epsilon(S) \leq \delta_A(P)$. Azaz

$$\max\{\epsilon(S) : S \subset A\} \leq \min\{\delta_A(P) : P \text{ párosítás}\}$$

nyilvánvaló.

Legyen M egy $\nu(G)$ méretű párosítás. Futassuk a magyar módszert. Természetesen az algoritmus nem találhat javító utat, sikertelen kereséssel végződik. A magyar módszer korrektségének első bizonyítása mutatta, hogy az eljárásunk melléktermékeként adódó K halmazra (külső, azaz címkézett alsó csúcsok) $\epsilon(K) = \delta_A(M)$. Azaz

$$\max\{\epsilon(S) : S \subset A\} \geq \epsilon(K) = \delta_A(M) \geq \min\{\delta_A(P) : P \text{ párosítás}\}$$

■

Definíció. Alsó poontok egy S halmaza *Kőnig-akadály*, ha $\epsilon(S) > 0$, azaz S szomszédainak száma kisebb mint elemeinek száma.

3. Tétel (Kőnig—Hall-tétel). *Legyen G egy páros gráf. G-ben akkor és csak akkor van az összes alsó pontot párosító párosítás, ha nincs G-ben Kőnig-akadály.*

Bizonyítás. Ha G-ben van minden alsó pontot párosító párosítás, akkor G-ben nyilván nem lehet Kőnig-akadály.

Fordítva: G-ben nincs Kőnig-akadály. Ekkor vegyünk egy M optimális, $\nu(G)$ méretű párosítást. Futassuk a magyar módszert. Természetesen az algoritmus nem találhat javító utat, sikertelen kereséssel végződik. A magyar módszer korrektségének első bizonyítása mutatta, hogy az eljárásunk melléktermékeként adódó K halmazra (külső, azaz címkézett alsó csúcsok) $\epsilon(K) = \delta_A(M)$. Mivel feltételünk miatt K sem lehet Kőnig-akadály, ezért $\epsilon(K) \leq 0$. Azaz $\delta_A(M) \leq 0$. Azaz M párosítja az össze alsó pontot. ■

4. Tétel (Kőnig—Frobenius-tétel). *Legyen G egy páros gráf. G-ben akkor és csak akkor van teljes párosítás, ha $|A| = |F|$, továbbá nincs G-ben Kőnig-akadály.*

Bizonyítás. Ha G-ben van teljes párosítás, akkor nyilván $|A| = |F|$ és nincs Kőnig-akadály.

Fordítva: A Kőnig-akadály hiánya miatt van olyan M párosítás, amely az összes alsó pontot párosítja. Így $|F|$ darab felső csúcs is párosított. $|A| = |F|$ miatt az összes felső csúcs is párosított, azaz M teljes párosítás. ■

1.2. Általános gráfok

Emlékeztető. $R \subset V(G)$ esetén $\beta(R) = c_1(G - R) - |R|$.

Emlékeztető. $A \subset V(G)$ eg Tutte-akadály, ha $\beta(T) > 0$.

5. Tétel (Tutte-tétel). *G-ben akkor és csak akkor van teljes párosítás, ha G-ben nincs Tutte-akadály.*

Bizonyítás. Ha G-ben van teljes párosítás, akkor nyilván nem lehet benne Tutte-akadály.

Fordítva: Tegyük fel, hogy G-ben nincs Tutte-akadály. Legyen M egy optimális párosítás. Futtassuk az Edmonds-algoritmust. Természetesen nem találhat javító utat, sikertelen kereséssel áll le. A futás melléktermékeként a végső (esetleg többszörösen zsugorított) gráfban a belső pontok B halmaza olyan, hogy az eredeti G gráfban $\beta(B) = \delta(M)$. Feltételünk szerint B sem lehet Tutte-akadály: $\beta(B) \leq 0$. Így $\delta(M) \leq 0$, azaz M teljes párosítás. ■

6. Tétel (Berge-formula). *Tetszőleges G gráfra*

$$\max\{\beta(R) : R \subset V(G)\} = \min\{\delta(P) : P \textit{ párosítás}\}.$$

Bizonyítás. Legyen $R \subset V(G)$ tetszőleges csúcshalmaz és P tetszőleges párosítás. Nyilván $\beta(R) \leq \delta(P)$. Ezt a legnagyobb β paraméterrel rendelkező csúcshalmazra és a legkevesebb csúcsot párosítatlanul hagyó P párosításra alkalmazva kapjuk, hogy

$$\max\{\beta(R) : R \subset V(G)\} \leq \min\{\delta(P) : P \text{ párosítás}\}.$$

Fordítva: Legyen M egy optimális párosítás. Futtassuk az Edmonds-algoritmust. Természetesen nem találhat javító utat, sikertelen kereséssel áll le. A futás melléktermékeként a végső (esetleg többszörösen zsugorított) gráfban a belső pontok B halmaza olyan, hogy az eredeti G gráfban $\beta(B) = \delta(M)$.

$$\max\{\beta(R) : R \subset V(G)\} \geq \beta(B) = \delta(M) \geq \min\{\delta(P) : P \text{ párosítás}\}.$$

■

7. Tétel (Petersen-tétel). *Legyen G egy 3-reguláris, kétszeresen élösszefüggő gráf. Ekkor G-ben van teljes párosítás.*

Bizonyítás. Elég ellenőrizni, hogy G-ben nincs Tutte-akadály.

$T = \emptyset$ nem lehet Tutte-akadály. Valóban: Egy 3-reguláris gráf fokainak összege (mint minden gráfé) páros, azaz a 3-as fokok összegben a tagok száma páros. Azaz G pontjainak száma páros. G minden komponense 3-reguláris, azaz minden komponense páros pontszámú. $0 = c_1(G) = c_1(G - \emptyset) \geq 0 = |\emptyset|$.

Ha T nem üres, akkor készítsük el a következő páros segédgráfot: Egyik színosztályát (A) T csúcsai alkotják, másik színosztályát (F) $G - T$ páratlan pontszámú komponensei alkotják. Élei a T-ből induló $G - T$ egy páratlan pontszámú komponense felé haladó $e = tc$ élek adják. e illeszkedik a $t \in T = A$ csúcsra és a c csúcs komponensét reprezentáló F-beli csúcsra.

Belátjuk, hogy A minden csúcsára legfeljebb három él illeszkedik, míg F minden csúcsára legalább három él illeszkedik. Ebből a segédgráf éleit kétféleképpen számolva (A-beli fokok összege, illetve F-beli fokok összege) kapjuk, hogy $|A| \geq |F|$. Azaz T valóban nem Tutte-akadály.

Az, hogy A minden csúcsára legfeljebb három él illeszkedik egyszerűen adódik abból, hogy G 3-reguláris. Az, hogy F minden csúcsára legalább két él illeszkedik egyszerűen adódik abból, hogy G kétszeresen élösszefüggő. Az, hogy F minden csúcsára igaz, hogy nem indulhat belőle pontosan két él (általában páros sok él), az a fokok vizsgálatából adódik. A megfelelő $G-T$-beli komponensen belül összegezve a fokokat egyrészt páratlan sok 3-ast kell összeadnunk (így páratlan számhoz jutunk), másrészt a komponensen belüli éleket duplán, a komponensből T felé haladó éleket (ezek adják a segédgráfunk megfelelő F-beli csúcsára illeszkedő éleket) egyszeresen számoljuk. ■