Gráfelmélet MSc hallgatók számára

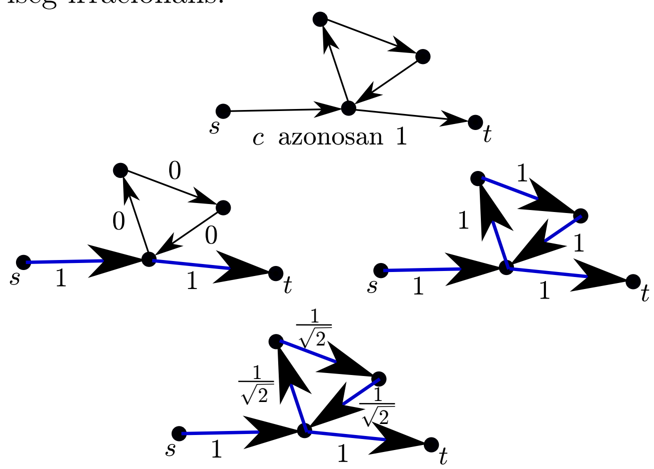
7. Előadás

Előadó: Hajnal Péter
Jegyzetelő: Hajnal Péter 2010. október 21.

1. A folyamok elméletének következményei

1. Következmény. *Legyen $(\vec{G}; s, t; c)$ egy hálózat, amely kapacitásfüggvénye minden élen egész értéket vesz fel, azaz $c : \mathbb{E}(\vec{G}) \to \mathbb{N}$. Ekkor van olyan optimális folyam, ami szintén minden élen egész értéket vesz fel, azaz $f : E(\vec{G}) \to \mathbb{N}$.*

Példa. Egy hálózat, amelyben minden él kapacitása egész. Két egész értékű optimális folyammal, és egy szintén optimális folyammal, amelyben bizonyos éleken folyó anyagmennyiség irracionális.



Bizonyítás. Alkalmazzuk a Ford—Fulkerson-algoritmust. A futás során sose lépünk ki az egész számok aritmetikájából. Speciálisan minden javításnál legalább 1-gyel nő aktuális folyamunk értéke. Így az algoritmus véges sok javítás után leáll úgy, hogy az egész számítás során minden kiszámított érték — így a kiszámolt optimális folyamban minden élen az ott folyó anyagmennyiség is — egész. ■

A következő speciális esetet kiemeljük:

2. Következmény. *Legyen $(\vec{G}; s, t; c)$ egy hálózat, amely kapacitásfüggvénye az azonosan 1 függvény. Ekkor van olyan $f : E(\vec{G}) \to \{0, 1\}$ folyam, amely optimális.*

Hogy ezen állítás következményeit kihasználjuk vizsgáljuk meg az $f : E(\vec{G}) \to \{0, 1\}$ folyamokat. Egy ilyen f függvény felfogható, mint egy F élhalmaz leírása: F pontosan azokat az e éleket tartalmazza, amelyeken f értéke 1. És fordítva is: minden F élhalmaz leírható egy $\chi_F : E(\vec{G}) \to \{0, 1\}$ függvénnyel. A továbbiakban f mindig egy $f : E(\vec{G}) \to \{0, 1\}$ függvényt ír le, és F a megfelelő élhalmaz.

3. Lemma. *f akkor és csak akkor folyam (a hálózatot lásd az előző következményben), ha F-re teljesül, hogy minden $x \in V(\vec{G}) - \{s, t\}$ csúcsba ugyanannyi F-él futbe, mint ahány kifut.*

Jelölés. Legyen $d_{\mathrm{F}}^{\mathrm{be}}(x)$ azon F-beli élek száma, amik x-be futnak be (az x csúcs F-befoka) és legyen $d_{\mathrm{F}}^{\mathrm{ki}}(x)$ azon F-beli élek száma, amik x-ből futnak ki (az x csúcs F-kifoka). Ezen jelöléssel a feltétel: minden forrástól és nyelőtől különböző x csúcsra $d_{\mathrm{F}}^{\mathrm{be}}(x) = d_{\mathrm{F}}^{\mathrm{ki}}(x)$.

Bizonyítás. Minden él kapacitása 1, továbbá az éleken 0 vagy 1 anyagmennyiség folyik. Azaz a kapacitás feltételekkel nincs probléma.

Egy x csúcsba befutó anyagmennyiség éppen azon F-beli élek száma, amik x-be bevezetnek és egy x csúcsból kifutó anyagmennyiség éppen azon F-beli élek száma, amik x-ből kivezetnek. Így a megmaradási feltételek ekvivalensek a lemma gráfelméleti feltételeivel. ∎

4. Lemma. *Legyen F egy élhalmaz, amelyre minden forrástól és nyelőtől különböző x csúcs esetén $d_F^{be}(x) = d_F^{ki}(x)$ (azaz F egy f folyamot kódol). Ekkor F felírható $\dot\cup_i P_i \dot\bigcup \dot\cup_i Q_i \dot\bigcup \dot\cup_i C_i$ alakban, ahol a P_i halmazok egy-egy forrás-nyelő irányított út élhalmaza, a Q_i halmazok egy-egy nyelő-forrás irányított út élhalmaza, a C_i halmazok egy-egy irányított kör élhalmaza. (A jelölésben ott van az a feltétel, hogy az unió tagjai DISZJUNKT élhalmazok.)*

Bizonyítás. Az üres F élhalmazra igaz az állítás (ekkor uniónknak nulla tagja van, az üres unió kiadja $F = \emptyset$-et). Tegyük fel, ha F nem üres, akkor garantáltan találunk egy $J \subset F$ élhalmazt, ami vagy egy forrás-nyelő irányított út élhalmaza, vagy egy nyelő-forrás irányított út élhalmaza, vagy egy irányított kör élhalmaza. Azaz J „jó” a bizonyítandó dekompozíció egyik tagjának. Ekkor — igaz, hogy csak egy lehetséges tagot találtunk az unióhoz — készen vagyunk. Valóban: Könnyen ellenőrizhető, hogy $F - J$ is teljesíti (!) feltételünket és ha nem üres, akkor J' jó részhalmazt találunk, majd $F - J - J'$-ben is (amennyiben nem ürült ki)... Azaz a felbontás tagjai mohó módon nyerhetők.

A kiinduló J tagot szintén egy mohó algoritmus garantálja. Legyen e egy tetszőleges F-beli él. Ebből indulva előre és hátrafele is elindítható egy mohó vonalnövelés. Ha ebben lesz csúcsismétlés, akkor irányított kört találunk F-ben. Ha nem, akkor előre és visszafele sétálva is elakadunk. Elakadás a feltételek miatt csak a forrásban, illetve nyelőben történhet. Így az elakadásnál meglévő út forrás-nyelő vagy nyelő-forrás lesz. ∎

Megjegyzés. Természetesen a lemma megfordítása is igaz (talán természetesebb is mint maga a lemma): ha éldiszjunkt módon összeadunk st-utakat, ts-utakat és irányított köröket, cirkulációkat, akkor egy folyamot leíró élhalmazt kapunk. A lemma ennek megfordítása: egy folyamot leíró élhalmaz szétszedhető a fenti összetevőkre. A megfordítás bizonyítása egy egyszerű mohó algoritmus.

Ha a fenti dekompozícióban k darab st-út, ℓ darab ts-út szerepel, akkor a megfelelő f folyamra $\text{érték}(f) = k - \ell$. Speciálisan, ha f egy optimális folyam, akkor $\ell = 0$. Sőt optimalitás esetén F dekompozíciójából elhagyhatók az irányított körök (amennyiben szerepelnek). Így egy F_0 szintén optimális folyamot kódoló élhalmazt kapunk.

Nevezzünk egy élhalmazt *egyszerűnek*, ha van olyan dekompozíciója, amelyben nem szerepelnek irányított körök és ts-utak. A fenti megállapításainkat a következőképpen összegezhetjük.

5. Lemma. *Legyen $(\vec{G}; s, t; c)$ egy hálózat, amely kapacitásfüggvénye az azonosan 1 függvény. Ekkor van olyan optimális folyam, amely egy egyszerű élhalmazzal azonosított. A maximális folyamérték éppen az egyszerű dekompozícióban az st-utak száma.*

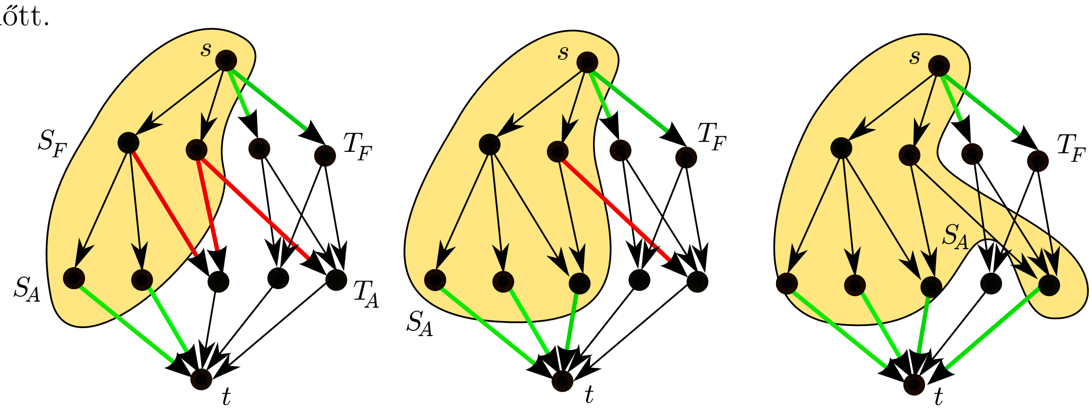
Ezekután könnyen kapjuk az alábbi fontos gráfelméleti következményeket.

6. Tétel (Kőnig-tétel). *Legyen G egy páros gráf. Ekkor $\nu(G) = \tau(G)$.*

Bizonyítás. A felső pontok fölé helyezzünk el forrást, amit az össze felső ponttal kössünk össze, majd az alsó pontok alá helyezzünk egy nyelőt, amit az összes alsó ponttal kössünk össze. Minden élt irányítsunk lefelé és minden él kapacitása legyen 1. Az így kapott hálózatra írjuk fel az MFMC-tételt.

A maximális folyamértéket egy egyszerű élhalmaz éldiszjunkt útjain keresztül érjük el. Ezek középső élei egy (a G gráfból eredő) párosítást alkotnak G-ben. Azaz $\max \text{érték}(f) = \nu(G)$.

A hálózatunk minimális vágáskapacitásának gráfelméleti leírásához vezessünk be egy fogalmat. Egy vágást nevezzünk egyszerűnek, ha élhalmaza nem tartalmaz olyan olyan forrásoldal felöl nyelőoldal felé haladó élt, ami G-ből ered. Legyen $\mathcal{V} = (S, T)$ egy vágás: $S = \{s\} \cup S_F \cup S_A$ és $T = T_F \cup T_A \cup \{t\}$ ($S_F = S \cap F$, $S_A = S \cap A$. $T_F = T \cap F$, $T_A = T \cap A$). $\mathcal{V}$ kapacitását egyszerűen a forrás oldalról a nyelő oldalra menő élek összeszámolásával nyerjük. Ha $\mathcal{V}$ egyszerű, akkor kapacitása $|S_A| + |T_F|$, másrészt $S_A \cup T_F$ lefogó ponthalmaz G-ben. (Ez megfordítható, G egy lefogó ponthalmazából egyszerű vágás nyerhető, amely kapacitása a lefogó ponthalmaz mérete.) Ha $\mathcal{V}$ nem egyszerű, akkor van egy $e = \vec{xy}$ él, amelyre $x \in S_F$ és $y \in T_A$. Ekkor legyen $\widetilde{S} = S - \{S_F\}$ és $\widetilde{T} - T \cup \{S_F\}$. $(\widetilde{S}, \widetilde{T})$ kapacitása (S, T) kapacitásához képest nem nőtt.



De az egyszerűséget „elrontó" élek száma csökkent. Ezen átrendezés ismételgetésével egy optimális vágásból egy optimális egyszerű vágás nyerhető. Ez a tény bizonyítja, hogy a minimális vágáskapacitás éppen $\tau(G)$. ■

7. Tétel (Menger-tétel). *Legyen $\vec{G}$ egy irányított gráf, két különböző kitüntetett csúccsal: s-sel és t-vel. Ekkor*

$$\max\{k : P_1, P_2, \ldots, P_k \text{ éldiszjunkt } \vec{st}\text{-utak}\} =$$
$$= \min\{|F| : F \subset E(\vec{G}), \vec{G} - F\text{-ben nincs } \vec{st} \text{ út}\}$$

Bizonyítás. $\vec{G}$ minden élének adjunk 1 kapacitást. Az így nyert hálózatra írjuk fel az MFMC-tételt. Belátjuk, hogy az MFMC-tétel egyenlő bal és jobb oldalának értéke éppen a bizonyítandó egyenlőség bal és jobb oldala. Azaz tételünk álítása igaz.

A maximális folyamérték egyenlő lesz a bizonyítandó egyenlőség bal oldalával (lásd korábbi érvelések).

A bizonyítandó egyenlőség jobb oldalában szereplő F-ek közül azokat, amik úgy álnak elő, hogy egy st-vágás forrás oldala felöl a nyelő oldal felé haladó élek halmaza, azokat nevezzük egyszerűnek. nyilván minden ott szereplő F tartalmaz egyszerű F-et. Így elég egyszerű F-ekre vizsgálni a minimumot. Ebből adódik, hogy a minimum értéke éppen a hálózatunk minimális vágáskapacitása. ■

A tétel minden probléma nélkül kimondható irányítatlan gráfokra is. Sőt, igaz is marad:

8. Tétel (Menger-tétel, irányítatlan változat). *Legyen G egy gráf, két különböző kitüntetett csúccsal: s-sel és t-vel. Ekkor*

$$\max\{k : P_1, P_2, \ldots, P_k \text{ éldiszjunkt } st\text{-utak}\} =$$
$$= \min\{|F| : F \subset E(G), G - F\text{-ben nincs } st \text{ út}\}$$

Bizonyítás. Legyen $\vec{G}$ az a gráf, amelyet G-ből úgy kapunk, hogy minden $e = xy$ élét helyettesítjük két éllel: egy $\vec{xy}$ és egy $\vec{yx}$ éllel (azaz az e él oda-vissza irányított két példányával). Írjuk fel az MFMC-tételt.

A maximális folyamérték kombinatorikus leírásánal kell egy kissé óvatosnak lennünk. Vegyünk egy $f : E(\vec{G}) \to \{0, 1\}$ optimális folyamot és az ezt leíró F élhalmazt. Ez egyszerűvé tehető egy mohó algoritmussal. Ezt úgy alkalmazzuk, hogy az oda-vissza menó élpárokat (kettő hosszú irányított köröket) dobjuk el F-ből. Ha ezek elfogytak, akkor fejezzük be az egyszerűvé tételt. Legyen F_0 a kapott élhalmaz. (ebben minden eredeti élnak maximumsm egy példánya szerepel). F_0 éldiszjunkt $\vec{st}$-utak élhalmazainak uniója. Ezek G-ben megfelelnek st-utak élhalmazainak. Ezek előzetes előkészületeink miatt éldiszjunkt utak lesznek G-ben. (Az előkészületek nélkül ezt nem tudnánk.) Azaz a maximális folyamérték éppen a bizonyítandó egyenlóség bal olddala.

A további része a bizonyításnak teljesen analóg az irányított esettel. ■

9. Tétel (Menger-tétel, csúcs-változat). *Legyen $\vec{G}$ egy irányított gráf, két különböző kitüntetett csúccsal: s-sel és t-vel. tegyük fel, hogy gráfunkban nincs $\vec{st}$ él. Ekkor*

$$\max\{k : P_1, P_2, \ldots, P_k \text{ páronként közös belső pont nélküli } \vec{st}\text{-utak}\} =$$
$$= \min\{|U| : U \subset V(\vec{G}) - \{s, t\}, \vec{G} - U\text{-ben nincs } \vec{st} \text{ út}\}$$

Bizonyítás. Legyen $\vec{G}'$ az a gráf amely $\vec{G}$-ből nyerünk a következő módon: Legyen $V(\vec{G}') = \{s, t\} \cup \{x_{\text{be}}, x_{\text{ki}} : x \in V(\vec{G}) - \{s, t\}\}$. Minden $e = \vec{xy} \in E(\vec{G})$ élnek feleljen meg egy $e' = \overrightarrow{x_{\text{ki}} y_{\text{be}}}$ él (legyen $s_{\text{ki}} = s_{\text{be}} = s$ és $t_{\text{ki}} = t_{\text{be}} = t$). $E(\vec{G}')$ élhalmazt alkossák ezek az élek és az $\{\overrightarrow{x_{\text{be}} x_{\text{ki}}} : x \in V(\vec{G}) - \{s, t\}\}$ élek.

Írjuk fel az MFMC-tételt $\vec{G}'$ gráfra. A kapott két egyenlőség két oldaláról lássuk be, hogy a bizonyítandó egyenlőség egy-egy oldalával egyenlők. A részletek kidolgozását az érdeklődő hallgatókra bízzuk. ■

10. Tétel (Menger-tétel, irányítatlan csúcs-változat). *Legyen $\vec{G}$ egy gráf, két különböző kitüntetett csúccsal: s-sel és t-vel. Tegyük fel, hogy gráfunkban s és t nem szomszédos. Ekkor*

$$\max\{k : P_1, P_2, \ldots, P_k \text{ páronként közös belső pont nélküli } st\text{-utak}\} =$$
$$= \min\{|U| : U \subset V(G) - \{s,t\}, \vec{G} - U\text{-ben nincs } st \text{ út}\}$$

Bizonyítás. Az előző bizonyítások ötleteinek természetes kombinálásával kapható. ■

Definíció. Legyen G egy gráf.

$$\kappa_e(G; s, t) = \max\{k : P_1, P_2, \ldots, P_k \text{ éldiszjunkt } st\text{-utak}\},$$

$$\kappa(G; s, t) = \max\{k : P_1, P_2, \ldots, P_k \text{ páronként közös belső csúcs nélküli } st\text{-utak}\}.$$

11. Következmény. *Adott G gráf s és t kitüntetett csúcsokkal. Ekkor $\kappa_e(G; s, t)$ és $\kappa(G; s, t)$ hatékonyan kiszámolható.*

Bizonyítás. A fentiekben mindkét mennyiség egy-egy alkalmasan választott hálózatban folyamokkal kapcsolatos optimalizálási feladat megoldása. Mindkét feladat a Ford—Fulkerson-algoritmus egy hatékony implementálásával meghatározható. ■

Definíció. Legyen k egy pozitív egész.

Egy G gráf k-szorosan élösszefüggő, ha élhalmaza tetszőleges k-nál kisebb elemű részének elhagyásával összefüggő gráfhoz jutunk. (Speciálisan G összefüggő.)

Egy G gráf k-szorosan összefüggő, ha csúcshalmaza tetszőleges k-nál kisebb elemű részének elhagyásával összefüggő gráfhoz jutunk (speciálisan G összefüggő), továbbá G-nek több mint k csúcsa van.

Megjegyzés. G akkor és csak akkor egyszeresen élösszefüggő ha G összefüggő. G egyszeresen összefüggősége azt jelenti, hogy G összefüggő és legalább két csúcsa van.

Legyenek $k < \ell$ pozitív egész számok és G ℓ-szeresen élösszefüggő (ℓ-szeresen összefüggő) gráf. Ekkor G eyben k-szorosan élösszefüggő (k-szorosan összefüggő) is.

12. Lemma. *Legyen G egy gráf, $e \in E(G)$ és $v \in V(G)$. Továbbá k legalább 2, egész szám.*

(i) Ha G k-szorosan élösszefüggő, akkor $G - e$ $k - 1$-szeresen összefüggő.

(ii) Ha G k-szorosan élösszefüggő, akkor $G - v$ tetszőlegesen sok komponenst tartalmazhat.

(iii) Ha G k-szorosan összefüggő, akkor $G - v$ $k - 1$-szeresen összefüggő.

(iv) Ha G k-szorosan élösszefüggő, akkor $G - e$ $k - 1$-szeresen összefüggő.

Bizonyítás. (i) és (iii) a definícióból adódik.

(ii)-höz sok nagy méretű teljes gráf egy kozös csúcs menti összeragasztásása megfelelő bizonyító példát ad.

(iv) Legyen $e = xy$. Ha e hurokél, akkor az állítás nyilvánvaló (ekkor $G - e$ él-, illetve csúcsösszefüggősége ugyanaz marad mint G-é).

Ha $x \neq y$, akkor tudjuk, hogy $G-x$ és $G-y$ $k-1$-szeresen összefüggő. Legyen U egy tetszőleges $k-1$-nél kevesebb csúcsot tartalmazó csúcshalmaz. (Célunk annak belátása, hogy $G-e-U$ összefüggő.) $G-x-U$ és $G-y-U$ is összefüggő, legalább két csúcsú, közös csúccsal rendelkező gráfok. (Itt használjuk technikai feltételünket, hogy k-szorosan összefüggő gráfunk pontszáma kellően nagy). Így ha $G-x-U$ és $G-y-U$ gráfokat összeragasztjuk közös csúcsaik mentén, akkor összefüggo: gráfhoz jutunk. A kapott gráf éppen $G-e-U$. ■

Ezek után nézzük meg a többszörös élösszefüggőség egy alternatív leírását.

13. Tétel. *A következők ekvivalensek*

(i) G k-szorosan élösszefüggő,

(ii) G bármely két csúcsa között létezik k éldiszjunkt út.

Bizonyítás. $(ii) \Leftarrow (i)$ nyilvánvaló. valóban, ha lehagyunk k-nál kevesebb elt, akkor a maradék gráfban tetszőleges x és y csúcs között lesz út. Sőt az (ii) feltétel által garantált k út közül legalább egy magmarad az élelhagyas után (egy él maxuimum egy utat ronthat el).

$(i) \Leftarrow (ii)$ Menger tételének irányítatlan változatából adódik. Valóban, (i) garantálja, hogy tetszőleges x és y csúcsokra

$$\min\{|F| : F \subset E(G), G-F\text{-ben nincs } xy \text{ út}\} \geq k.$$

Így Menger-tétele adja (ii)-t. ■

Hasonló jellemzés adható a k-szorosan összefüggő gráfokra is.

14. Tétel. *A következők ekvivalensek*

(i) G k-szorosan összefüggő,

(ii) G bármely két csúcsa között létezik k páronként közös belső pont nélküli út, továbbá csúcsainak száma több mint k.

Bizonyítás. $(ii) \Leftarrow (i)$ nyilvánvaló, akárcsak előbb.

$(i) \Leftarrow (ii)$ Menger tételének irányítatlan csúcs-változatából adódik. Azonban egy kicsit technikásabbnak kell lennünk, hiszen a megfelelő Menger-tétel egyik feltétele, hogy a két kitüntetett csúcs ne legyen összekötve.

Legyen x és y két tetszőleges pont. erre igazoljuk (ii)-t. Legyen I az xy élek halmaza (ezek párhuzamos élek). Ha $s = |I|$ legalább k, akkor nincs mit bizonyítani. $s < k$ esetén hagyjuk el G-ből I eleit (a kapott G' gráfban x és y nem szomszédos. Másrészt tudjuk, hogy $G-I$ $k-s$-szeresen összefüggő. Azaz

$$\min\{|U| : U \subset V(G) - \{x, y\}\} \leq k-s.$$

Így G'-re Menger tételének csúcs-változatából tudjuk hogy van $k-s$ páronként közös beló pont nélküli xy út, ami összeségét az I elemeinek megfelelő egy hosszu utakkal kibővítve kapjuk az állítást. ■

Definíció. Legyen G egy gráf.

$$\kappa_e(G) = \begin{cases} \max\{k : G\ k\text{-szorosan élösszefüggő}\} & G \text{ összefüggő,} \\ 0 & \text{különben,} \end{cases}$$

a G gráf élösszefüggőségi paramétere.

$$\kappa(G) = \begin{cases} \max\{k : G\ k\text{-szorosan összefüggő}\} & G \text{ 1-összefüggő,} \\ 0 & \text{különben,} \end{cases}$$

a G gráf élösszefüggőségi paramétere.

Megjegyzés. Nyilván $\kappa_e(G) = \min\{\kappa_e(G; u, v) : u, v \in V(G)\}$ és $\kappa(G) = \min\{\kappa(G; u, v) : u, v \in V(G)\}$.

15. Következmény. *Adott egy G gráf. Ekkor összefüggőségi és élösszefüggőségi paramétere is hatékonyan kiszámolható.*