Gráfelmélet MSc hallgatók számára

6. Előadás

Előadó: Hajnal Péter
Jegyzetelő: London András 2010. október 14.

1. Gráfok magasabb fokú összefüggése

Definíció. Legyen k egy pozitív egész. G gráf *k-szorosan élösszefüggő* (k élöf), ha tetszőleges k-nál kisebb elemszámú élhalmazát elhagyva a kapott gráf összefüggő lesz. Formulával

$$\forall F \subseteq E(G) : |F| < k \Rightarrow G - F \ \text{ összefüggő}.$$

A feltételnek teljesülni kell $F = \emptyset$ esetén is, azaz alapgráfunk összefüggő. Az összefüggőségnek meg kell maradnia, ha valódi élelhagyás történik.

Definíció. Egy G gráf *k-szorosan (pont)összefüggő* (k öf), ha tetszőleges k-nál kisebb elemszámú csúcshalmazát elhagyva a kapott gráf összefüggő és $|V(S)| > k$. Formálisan

$$(\forall U \subseteq V(G) \quad |U| < k \Rightarrow G - U \ \text{ összefüggő}) \text{ és } (|V(S)| > k).$$

A pontszámra adott technikai feltétel szerepe, hogy a gráf elegendően nagy legyen: a csúcsok elhagyása után is legalább két pont maradjon.

Példa. A fák nem kétszeresen élösszefüggőek, ha van élük. A körök kétszeresen összefüggőek (ha legalább három csúcsuk van), és így kétszeresen élösszefüggőek is, de nem háromszorosan összefüggőek. A $k+1$ ponttú gráfok közül csak a teljes gráf k-összefüggő.

Megjegyzés. A következő diagram a különböző összefüggőségi fogalmak viszonyait foglalja össze. Azon gráfosztályok között, amelyek tartalmazása nem vezethető le a diagramból nincs is tartalmazás.

$$\begin{array}{cccccccccc}
1\text{öf} & \Leftarrow & 2\text{öf} & \Leftarrow & 3\text{öf} & \Leftarrow & \dots & \Leftarrow & k\text{öf} & \Leftarrow \\
\begin{smallmatrix}\Updownarrow\\ \text{öf}\\ \Uparrow\end{smallmatrix} & & \Big\Downarrow & & \Big\Downarrow & & & & \Big\Downarrow & \\
1\text{élöf} & \Leftarrow & 2\text{élöf} & \Leftarrow & 3\text{élöf} & \Leftarrow & \dots & \Leftarrow & k\text{élöf} & \Leftarrow
\end{array}$$

Az 1-szeres összefüggőség és összefüggőség között csupán árnyalatnyi a különbség. Az 1-szeres összefüggőség felteszi, hogy legalább két csúcsunk van. Tehát az összefüggő, de nem 1-szeresen összefüggő gráfok pontosan az egy pontú gráfok.

A vízszintes sorokban levő kapcsolatok a definíciók alapján nyilvánvalóak. A függőleges nyilakkal jelölt kapcsolatok egy kicsit nehezebbek, az alábbi lemmából következnek.

1. Lemma. *Legyen e egy G gráf tetszőleges éle és v egy tetszőleges pontja. Legyen $k \geq 2$.*

(a) *Ha G k-szorosan élösszefüggő, akkor $G-e$ $(k-1)$-szeresen élösszefüggő.*

(b) *Ha G k-szorosan összefüggő, akkor $G-v$ $(k-1)$-szeresen összefüggő.*

(c) *Ha G k-szorosan élösszefüggő, akkor $G-v$-nek tetszőleges számú komponense lehet.*

(d) *Ha G k-szorosan összefüggő, akkor $G-e$ $(k-1)$-szeresen összefüggő.*

Célunk, hogy belássuk a többszörösen összefüggő gráfok következő jellemzését.

2. Tétel. *(i) Egy G gráf akkor és csak akkor k-szorosan élösszefüggő, ha tetszőleges két pontja között létezik k darab páronként éldiszjunkt út.*

(ii) Egy G gráf akkor és csak akkor k-szorosan összefüggő, ha tetszőleges két pontja között létezik k darab út, amelyek belső pontjainak halmaza páronként diszjunktak (Útjaink pontfüggetlenek), továbbá $|V(G)| > k$.

A két állítás egy-egy iránya egyszerű: a megfelelő utak létezése garantálja a megfelelő összefüggőséget. Valóban: Tegyük fel, hogy a gráfunk megfelelő ritkítása után nem összefüggő gráfot kapunk, azaz két maradék pont között — x és y — nem lesz út. A feltételt x és y-ra alkalmazva a garantált útrendszer mindegyikét megszüntette a ritkítás. Az utak függetlensége miatt ez nem lehet.

A nehéz irányok bizonyításához azonban előbb a folyamok elméletének alapjaival kell megismerkednünk.

2. Folyamok

Legyen $\vec{G}$ irányított gráf, $s, t \in V(G)$ két kijelölt csúcs és $c : E(G) \to \mathbb{R}^+$ függvény. Ekkor $(\vec{G}, s, t, c)$ négyesét *hálózatnak* nevezzük, ahol s pontot *forrásnak*, t pontot *nyelőnek*, c-t pedig *kapacitásfüggvénynek* nevezzük.

Megjegyzés. Hálózatok sok gyakorlati probléma absztrakciójához hasznosak. Például egy város vízvezetékhálózata írható így le, ahol a kapacitásfüggvény a csövek terhelhetőségét (például átmérő) adja meg. Egy úthálózat is modellezhető így. Egy él kapacitása a megfelelő útszakasz szélességével arányos.

Egy $f : E(S) \to R$ függvényt *folyamnak* hívunk, ha minden $x \notin \{s, t\}$ pont esetén teljesül.

$$\sum_{e \in E_{be}(x)} f(e) = \sum_{e \in E_{ki}(x)} f(e),$$

ahol $E_{be}(x)$ az x-be befutó élek halmaza, $E_{ki}(x)$ az x pontból kifutó élek halmaza. Ezeket az egyenlőségeket *megmaradási törvényeknek* nevezzük.

A forrásban és nyelőben nem követeljük meg megmaradási törvényt. A forrásra úgy kell gondolnunk, mint egy helyre, ahol anyagmennyiséget pumpálunk a hálózatban. A nyelőben pedig épp fordítva: ott anyagot nyerünk ki a hálózatból.

Ha tetszőleges e él esetén $0 \le f(e) \le c(e)$ akkor a folyamot *megyengedett folyamnak* nevezzük.

Definíció. Egy folyam értéke $\acute{e}(f) = \sum_{e \in E_{be}(t)} f(e) - \sum_{e \in E_{ki}(t)} f(e)$ (t a nyelő).

Emlékeztető. $\vec{G}$ legyen irányított gráf. $\mathcal{V}(G) = \{S, T\}$ *vágás* G-ben a ponthalmaz egy kétosztájú partíciója. S és T a vágás két *oldala* vagy *partja*. A vágás élhalmaza, $E(\mathcal{V})$, azon élek, amelyek két végpontja a vágás különböző oldalára esik. $E(\mathcal{V})$ elemei két osztályba sorolhatók az oldalak közötti irányuk szerint.

$\mathcal{V} = (S, T)$ vágás egy st-vágás, ha $s \in S$, $t \in T$. Ekkor a két oldal közötti irányok könnyen azonosíthatók, az élek két osztálya leírható: forrás felöl nyelő felé, illetve a nyelő felöl a forrás felé vezető élek. Ezeket jelöljük $\vec{E}(\mathcal{V})$, illetve $\overleftarrow{E}(\mathcal{V})$-vel. Formálisan

$$\vec{E}(\mathcal{V}) = \{e = \vec{xy} \in E(\vec{G}) : x \in S, s \in T\}$$

és

$$\overleftarrow{E}(\mathcal{V}) = \{e = \vec{xy} \in E(\vec{G}) : x \in T, s \in S\}$$

3. Lemma. *Legyen f folyam egy $(\vec{G}, s, t, c)$ hálózatban, $\mathcal{V} = \{S, T\}$ egy vágás. Ekkor*

$$\text{é}(f) = \sum_{\vec{E}(\mathcal{V})} f(e) - \sum_{\overleftarrow{E}(v)} f(e).$$

Megjegyzés. Az $S = V(\vec{G}) - \{t\}$, $t = \{t\}$ esetben a tétel állítása az eredeti definícióval ekvivalens. Ha $S = \{s\}$, $T = V(\vec{G}) \setminus \{s\}$, akkor egy alternatív definíciót kapunk, amely a forrás környezetéből olvassa ki a folyam értékét. A lemma állítása, hogy a folyam értéke tetszőleges vágás mentén leolvasható.

Bizonyítás. (i) definíció szerint

$$\text{é}(f) = \sum_{e \in E_{be}(t)} f(e) - \sum_{e \in E_{ki}(t)} f(e).$$

Továbbá $T - \{t\}$ összes x pontjára

$$0 = \sum_{e \in E_{be}(x)} f(e) - \sum_{e \in E_{ki}(x)} f(e).$$

Ezeket összeadva kapjuk

$$\text{é}(f) = \underbrace{\sum_{\substack{e = \vec{xy} \in E(\vec{G}): \\ x \in T, y \in S}} f(e)}_{(a)} - \underbrace{\sum_{\substack{e = \vec{yx} \in E(\vec{G}): \\ y \in S, x \in T}} f(e)}_{(b)} + \underbrace{\sum_{\substack{e = \vec{xy} \in E(\vec{G}): \\ x, y \in T}} (f(e) - f(e))}_{(c)},$$

ahol az (a)-(b) tagok vagy egy $x \in T - \{t\}$-re felírt megmaradási törvényből vagy a folyam értékét definiáló egyenlőségből erednek, míg a (c)-beli tagok vagy két megmaradási törvényből vagy a folyam értéket definiáló egyenlőségből és egy megmaradási törvényből erednek. A (c)-beli tagok hozzájárulása a jobb oldalhoz 0, így kapjuk a bizonyítandó egyenlőséget. ∎

A folyamérték új kifejezései mind lehetőséget adnak egy-egy rájuk vonatkozó felső becslésre.

4. Lemma. *Legyen f egy megengedett folyam egy $(\vec{G}, s, t, c)$ hálózatban, $\mathcal{V}$ egy vágás. Ekkor*

$$\text{é}(f) \leq \sum_{e \in \vec{E}(\mathcal{V})} c(e) := c(\mathcal{V}).$$

Bizonyítás. Írjuk fel $é(f)$ értékét az előző lemma alapján a $\mathcal{V}$ vágásra alapulva. Az így kapott kifejezés -1 együtthatós tagjait elhagyva és a maradék tagokat a megfelelő élek kapacitásaival becsülve adatik az állítás. (Az elhagyott tagok nempozitívak, a megmaradt tagok nem haladhatják meg a megfelelő él kapacitását, hiszen folyamunk megengedett.) ■

A lemma kimondásában bevezetett, $c(\mathcal{V})$-vel jelölt kifejezést a $\mathcal{V}$ *vágás kapacitásának* nevezzük. Ez az irányított vágásban a forrás felöl a nyelő oldala felé haladó élek kapacitásainak összege. Ez a paraméter csak a hálózattól függ.

A lemma állítása szerint tetszőleges vágás kapacitása felső becslést ad a hálózatban megvalósítható folyamok értékére. Ennek egy nyilvánvaló következménye az alábbi észrevetél.

Észrevétel. Legyen f egy folyam és $\mathcal{V}$ egy st-vágás egy hálózatban. Ha $é(f) = c(\mathcal{V})$, akkor f folyam egy maximális értékű folyam.

Természetesen a fenti feltételek mellett azt is tudjuk, hogy $\mathcal{V}$ egy minimális kapacitású vágás. Az észrevételben szereplő $(f, \mathcal{V})$ párok esetén azt mondjuk, hogy $\mathcal{V}$ bizonyítja f optimalitását (illetve f bizonyítja $\mathcal{V}$ minimális kapacitású mivoltát).

Legyen $\mathcal{H} = (\vec{G}, s, t, c)$ egy hálózat, f folyam, P pedig egy st-út G (irányítatlan!) gráfban. Soroljuk P út éleit (pontosabban P éleinek G-beli megfelelőit) két osztályba, aszerint, hogy s-től t felé vagy fordítva vannak irányítva. A két élosztályt jelölése rendre legyen $E_{\text{előre}}$ és $E_{\text{hátra}}$.

Definíció. $\vec{G}$-ben P egy *javító út* ($\mathcal{H}$-ban, f-re nézve), ha

(i) minden $e \in E_{\text{előre}}(p)$ esetén $f(e) < c(e)$,

(ii) minden $e \in E_{\text{hátra}}(p)$ esetén $f(e) > 0$.

Lemma. Legyen f folyam és P javító út f-re. Ekkor létezik $\widetilde{f}$ folyam, amelyre $é(\widetilde{f}) > é(f)$, azaz f javítható (vagyis található f-nél nagyobb értékű folyam).

Bizonyítás. Legyen $\delta_{\text{előre}} := \min\{c(e) - f(e) : e \in E_{\text{előre}}(P)\}$, $\delta_{\text{hátra}} = \min\{f(e) : e \in E_{\text{hátra}}(P)$ és legyen $\delta = \min\{\delta_{\text{előre}}, \delta_{\text{hátra}}\} > 0$.

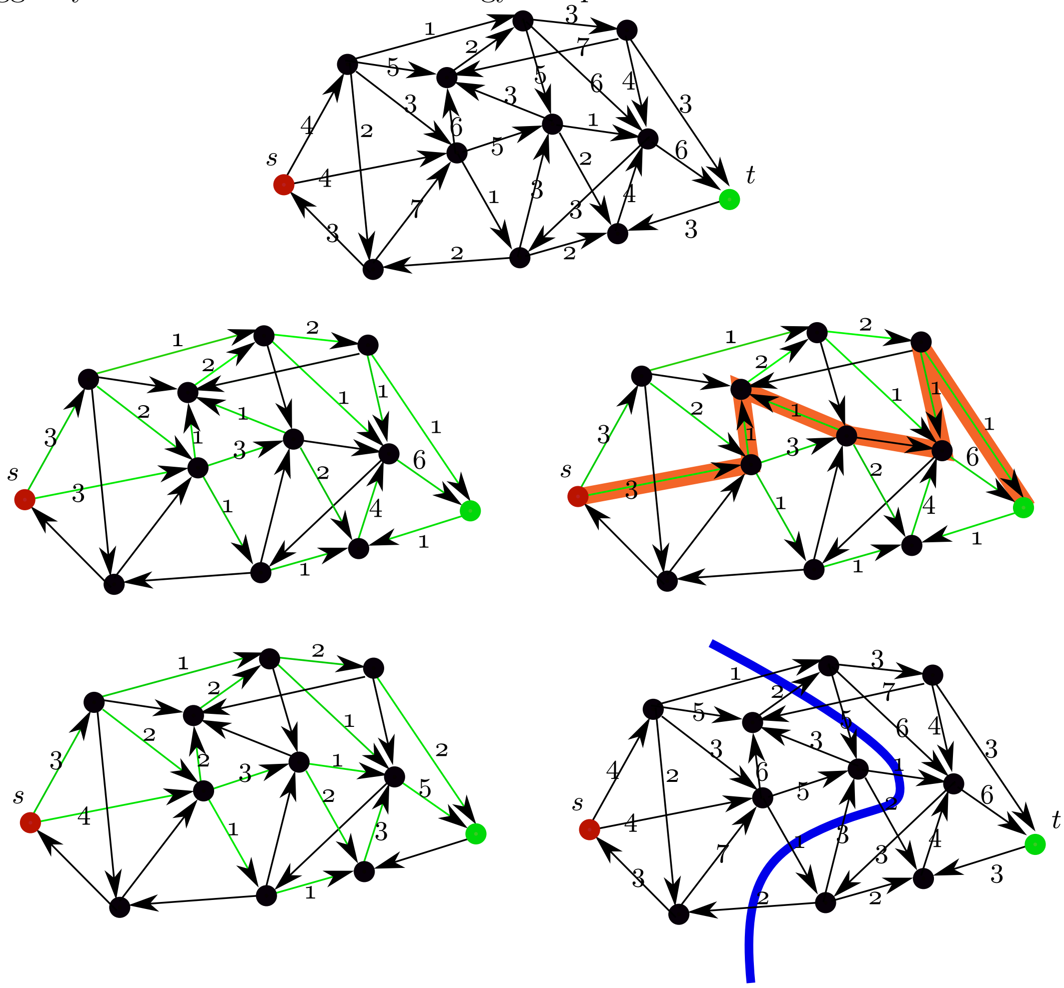
Ekkor $\delta_{\text{előre}}$-vel bármely előre mutató élen folyó anyagmennyiség növelhető (uniform növelésre van szükségünk $E_{\text{előre}}(P)$ elemein a megmaradási törvényekre gondolva). $\delta_{\text{hátra}}$-val tudunk csökkenteni a hátraéleken (ismét uniform csökkentésre van szükségünk). Definiáljuk a következőképpen $\widetilde{f}$-et:

$$\widetilde{f} = \begin{cases} f(e), & \text{ha} \quad e \notin E(P) \\ f(e) + \delta, & \text{ha} \quad e \in E_{\text{előre}}(P) \\ f(e) - \delta, & \text{ha} \quad e \in E_{\text{hátra}}(P) \end{cases}$$

Ekkor $\widetilde{f}$ maga is egy folyam (ugyanis egyik élen sem megyünk $c(e)$ fölé, illetve 0 alá és a megmaradási törvényeket se rontottuk el), továbbá $é(\widetilde{f}) = é(f) + \delta > é(f)$. ■

Folyamprobléma: Adott egy $\mathcal{H}$ hálózat, keressünk minél nagyobb/maximális értékű folyamatot.

A megengedett folyamok értékei egy felülről korlátos halmazát adják a valós számoknak. Ezen halmaz szuprémuma minden további nélkül vehető. A maximum értékének vétele azonban magyarázatra szorul. Egy folyam tekinthető $\mathbb{R}^{E(G)} \equiv \mathbb{R}^m$ egy pontjának ($m = |E(G)|$), a megengedett folyamok $\mathcal{F}$ halmaza $\mathbb{R}^{E(G)}$ egy kompakt részhalmaza, továbbá é : $\mathcal{F} \to \mathbb{R}$ egy folytonos függvény. Ez a folytonos függvény felveszi maximumát $\mathbb{R}^{E(G)}$ egy kompakt részhalmazán.



Egy hálózat
egy folyam, egy rá vonatkozó javító út
a javított út, ennek optimalitását mutató vágás

Ezek után kimondjuk a *folyamok főtételét.*

5. Tétel (Folyamok főtétele). *Legyen $\mathcal{H} = (\vec{G}, s, t, c)$ egy hálózat és f egy folyam. A következők ekvivalensek:*

(i) f optimális folyam (maximális értékű),

(ii) nem létezik javító út f-re vanatkozóan,

(iii) létezik egy $\mathcal{V}$ vágás, amelyre teljesül $c(\mathcal{V}) = é(f)$.

Bizonyítás. Az, hogy (i)-ből következik (ii) adódik az előzőleg bizonyított lemmából. A harmadik állításból következik az első, ugyanis bármely f folyamra és $\mathcal{V}$ vágásra $é(f) \leq c(\mathcal{V})$, vagyis a $c(\mathcal{V})$ értékű folyamok optimálisak.

(ii) $\Rightarrow$ (iii) bizonyítása. Egy s-ből induló utat nevezzünk javító út-kezdeménynek, ha a javító út definíciójának összes feltételét kielégíti, kivéve azt, hogy t-ben ér véget. (Azaz elképzelhető, hogy folytatható úgy, hogy javító úthoz jussunk.) A csak az s pontból álló út javító út-kezdemény. Legyen S_{biz} azon x pontok halmaza, amelyre létezik sx javító út-kezdemény, azaz

$$S_{biz} = \{x \in v : \exists \vec{sx} \text{ út } \vec{G}\text{-ben, amelyre } e \in E_{\text{előre}}(P) \text{ esetén } f(e) < c(e),$$
$$\text{és } e \in E_{\text{hátra}}(P) \text{ esetén } f(e) > 0\}$$

Ekkor $s \in S_{biz}$, és t nem eleme S_{biz} halmaznak ($t \in \overline{S}_{biz} =: T_{biz}$). Legyen $\mathcal{V}_{biz} = \{S_{biz}, T_{biz}\}$ egy st-vágás. Ekkor minden $e \in \vec{E}(\mathcal{V}_{biz})$ élre teljesül, hogy $f(e) = c(e)$, és minden $\overleftarrow{E}(\mathcal{V}_{biz})$-ben lévő e élre igaz, hogy $f(e) = 0$, hiszen más esetben az e él S-beli végpontjához vezető javítóút-kezdemény meghosszabbítható lenne T-be. Így a korábban igazolt é$(f) \leq C(\mathcal{V}_{biz})$ becslés bizonyításában az összes egyenlőtlenség egyenlőség lesz, (iii) teljesül a $\mathcal{V} = \mathcal{V}_{biz}$ választással. ■

Egy fontos következményt emelünk ki.

6. Tétel (Maximális-folyam-minimális-vágás tétel). *Egy tetszőleges hálózatban*

$$\max\{\acute{e}(f) : f \textit{ megengedett folyam}\} = \min\{c(\mathcal{V}) : \mathcal{V} \textit{ egy st vágás}\}$$

Bizonyítás. A bal oldalról tudjuk, hogy kisebb a jobb oldalnál.

A fordított egyenlőtlenséghez vegyünk egy optimális folyamot és az alaptételben a rá vonatkozó (iii) pontot bizonyító vágást (lásd $\mathcal{V}_{biz}$ az alaptétel bizonyításából). A minimális vágáskapacitás nem lehet nagyobb mint $c(\mathcal{V}_{biz})$, ami adja a hiányzó egyenlőtlenséget. ■

Megjegyzés. A tétel angol hivatkozása max-flow-min-cut theorem. Gyakran használják az MFMC rövidítést.

3. Folyamalgoritmusok

Az alaptétel egy másik fontos következménye, hogy a bizonyítás kellő mélységű megértése elvezet egy hatékony eljárásra, amely adott hálózatban kiszámol egy optimális értékű folyamot (illetve egy minimális kapacitású vágást).

Ford—Fulkerson-algoritmus:

(Inicializálás) Legyen f az azonosan 0 folyam (minden élen 0 anyagmennyiség folyik).
  // A hálózat üres.
(Címke-inicializálás) s-et címkézzük meg.
  // A forrást tartalmazó 0 hosszú út javító út.
(Címkekiterjesztés I) Keressünk olyan $\vec{xy}$ élt, amelyre x címkézett, y nem címkézett és a rajta folyó anyagmennyiség nem éri el a kapacitást.
  Címkézzük meg y-t.
(Címkekiterjesztés II) Keressünk olyan $\vec{yx}$ élt, amelyre x címkézett, y nem címkézett és a rajta folyó anyagmennyiség pozitív.
  Címkézzük meg y-t.
(Sikeres keresés) t címkét kap.
  // t megcímkézésének okát visszakeresve egy forrás-nyelő utat
  // kapunk, amely javító út lesz
  f-et javítsuk a megtalált javító út alapján. Töröljük a címkéket.
  Térjünk vissza a (Címke-inicializálás) lépéshez.
(Sikertelen keresés) t nem kap címkét és a címkekiterjesztések kifulladnak. Leállunk, az aktuális f az eljárás outputja.
  // Ekkor f optimális, a címkézett/nem címkézett csúcsok
  // egy ezt bizonyító vágást adnak.

Az algoritmus címkekiterjesztési lépéseiben rejlő keresés nincs részletesen leírva. Általában több lehetőség is van. Az implementációtól függ, hogy az algoritmus melyiket találja meg. Így a Ford—Fulkerson-algoritmus igazából egy eljárás osztály (ahogy például a szimplex algoritmus is).

Egy konkrét megvalósítását említjük meg. Ekkor a címkekiosztások fázisokban történnek. Egy fázisban az előző fázisban címkét kapott pontok töltik be az x csúcs szerepét. Az összes lehetséges címkekiterjesztések elvégzése zárja be a fázist.

A címkézés a szélességi keresés filozófiája alapján működik. Könnyen látható, hogy sikeres keresés esetén a lehető legrövidebb javító utat találja meg ez az algoritmus. Ez az eljárás a Ford—Fulkerson-algoritmus Edmonds—Karp-változata.

Az algoritmusban több ciklus is szerepel. A címkekiterjesztések ismétlése nem problémás. Mohó módon végezzük, a címkék halmaza nő. Véges ismétlés sikeres kereséshez vagy elakadáshoz vezet. A javítások ismétlése azonban problémás.

Két eredményt emelünk ki bizonyítás nélkül. Megjegyezzük, hogy feltesszük (azt a gyakorlatban irreális feltvést), hogy pontos valós-aritmetikát végzünk.

Példa. Van olyan hálózat, amelyben a Ford—Fulkerson-algoritmus javítások végtelen sorozatát végzi és a (szükségszerűen konvergáló) folyamérték nem is tart a maximális folyamértékhez.

7. Tétel (Edmonds—Karp-tétel). *A Ford—Fulkerson-algoritmus Edmonds—Karp-változata $\mathcal{O}(n^3)$ javítás után szükségszerűen leáll.*