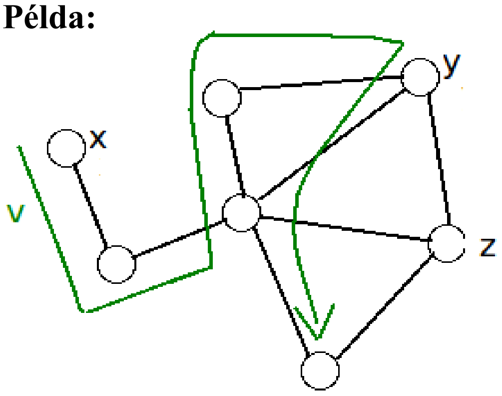
Gráfelmélet, 4. előadás **2010.09.30**

Jegyzetelte: Konkoly László

Emlékeztető: vonal, vonal növelési eljárás

Jelölés: G gráf, V a csúcsok halmaza, v vonal G – ben. $d_V(x)$ = x foka abban a gráfban, amit V(G) és V élei alkotnak.

Példa:



$d(y) = 3$
$d_v(y) = 2$

$d(z) = 3$
$d_v(z) = 0$

Észrevétel:
Legyen V egy u csúcsból induló, v csúcsba véget érő vonal a gráfban. Ekkor

(1) $u = v$ és minden $x \in V$ esetén $d_v(x)$ páros.
(2) $u \neq v$ és minden $x \in V \setminus \{u, v\}$ esetén $d_v(x)$
és $x \in \{u, v\}$, esetén $d_v(x)$ páratlan.

Bizonyítás: Esetek analizálása

(a) $x \in V \setminus \{u,v\}$,
(b) $x = u \neq v$ // szimmetrikusan $x = v \neq u$,
(c) $x = u = v$.

1. Következmény: G gráf, $u \in V$, mohó vonalnövelés u-ból elakadásig:
Legyen z az utolsó csúcs a V vonalon. Ekkor

- vagy $z \neq u$ és $d(z)$ páratlan,
- vagy $z = u$ és $d(z)$ páros.

Bizonyítás: Elakadáskor $d_v(z) = d(z)$, továbbá az észrevétel adja a bizonyítandót.

Definíció: v vonal Euler – vonal ha az összes csúcsot és összes élt tartalmazza/meglátogatja. Amennyiben vonal is és az összes élt is tartalmazza, akkor az összes élen pontosan egyszer haladunk át.

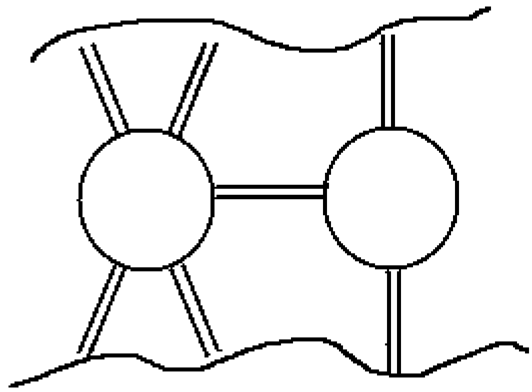
Észrevétel: Ha G – ben létezik Euler – vonal, akkor G összefüggő.

2. Következmény:
G – ben V_{uv} Euler – vonal. Ekkor

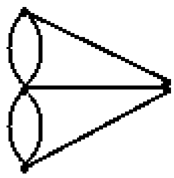
- vagy $u = v$ (záródó) és G minden foka páros
- vagy $u \neq v$ (nem záródó) és u,v foka páratlan, továbbá többi pont foka páros.

Bizonyítás: $\forall x \in V : d_V(x) = d(x)$, továbbá az észrevétel adja a bizonyítandót.

Königsberg



Létezik -e Euler – vonal?



Nem, mert ha lenne, akkor ellentmondásba ütközne a 2. Következménnyel.

Cél: A fentiek megfordíthatók.

Tétel (Euler):

(i) G minden foka páros, összefüggő → létezik záródó Euler – vonal.
(ii) G – ben pont 2 csúcs foka páratlan, összefüggő ↔ létezik nem záródó Euler – vonal
(iii) G – ben a páratlan fokú és összefüggő csúcsok száma 0 vagy 2 ↔ létezik Euler – vonal

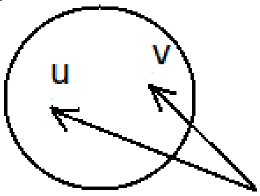
Megjegyzés: Páratlan fokú csúcsok száma $\leq$ 2. Ez ekvivalens a tételbeli feltétellel:
Minden gráfban $\sum_{x \in V} d(x) = 2|E|$ ← páros, azaz a páratlan tagok száma a ∑ - ban páros.

Megjegyzés: Minden gráfban a páratlan fokú csúcsok száma páros.

Elég (i) -t igazolni: Nyilván (i) + (ii) → (iii).

(i) → (ii)

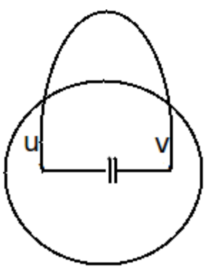
G



A két páratlan fokú csúcs

$\hat{G}$

új uv él



k csúcs páros fokú összefüggő

(i) → G – ben létezik záródó Euler – vonal.

Bizonyítás:
V_i záródó vonal, amely az algoritmus során nő.

- V_i az eddig bejárt része G – nek
- i : idő paraméter

Kezdetben:

- v_0 tetszőleges csúcs
- V_0 0 hosszú séta / záródó vonal

Amíg V = V_i nem Euler – vonal:

- V_i – n keressünk egy v_{i+1} csúcsot, amire illeszkedik e be nem járt él.
- v_{i+1} – ből kiindulva e – n elindulva vesszünk egy mohó vonalkövetést $G(\overline{V})$ -ben!! V(G) és G be nem járt élei (E(G) \ E(V)). Legyen V az így kapott vonal.

//e: szükségszerű hossznövekedés → az algoritmus leáll, záródó Euler – vonallal.
//G összefüggősége miatt van ilyen v_{i+1}.
//v szükségszerűen záródó vonal, mert $G(\overline{V})$ - ben minden fok páros.

V_i beszúrásos növelése: V

$v_0 \ldots v_{i+1}$ e $v_{i+1} \ldots$

V_i eleje adja V_{i+1} – et . V_i vége, az algoritmus leáll, mert V_i hossza növekszik. (V_{i+1} – ben V_i élei mellett ott lesz e is.)

i:=i+1.

Kínaipostás – probléma(Mei – ko Kwan):

Adott G összefüggő gráf, l: E(G) → $\mathbb{R}_{>0}$.
Az éleken értelmezett függvény kiterjeszthető sétáira is:

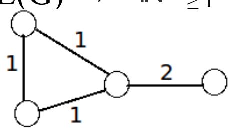
Postahivatal → p ∈ V $\qquad$ $l(S) = \sum_{i=1}^{\text{séta hossza}} e(e_i)$

↑
séta: $v_0 e_1 v_1 e_2 v_2 \ldots$

Keressük S séta: (i) [p – ből induló] záródó séta
(ii) minden élen haladjon át } L lehetséges megoldások halmaza
l(S) → min

A probléma megoldásához azt ekvivalens módon átalakítjuk.
S ∈ L ≡ μ : E(G) → $\mathbb{N}_{\geq 1}$

G
↓



e |→ hányszor halad át rajta az S séta

μ x G : G minden e élt helyettesítjük μ(t) db ∥ éllel. Hosszuk ugyanaz: l(e).
S |→ S^: záródó Euler – vonal μ x G – ben, ahol az e él i – edik bejárása az e él i – edik példányán való áthaladás.
// μ x G-ben minden fok páros

Eredeti Kínai postás

$\equiv$

Válasszunk egy $\mu : E(G) \rightarrow \mathbb{N}_{\geq 1}$
μ x G – ben minden fok páros
Legyen $\sum_{l \in E(\mu x G)} l(e) \rightarrow min$

$\|$

$\sum_{e \in E(G)} \mu(e) l(e)$

// μ x G = G + μ_0 x G

$\equiv$

μ-1

$\|$

Válasszunk egy $\mu_0 E(G) \rightarrow \mathbb{N}$
μ_0 x G: minden fok olyan paritású legyen mint G – ben.
Azaz legyen $P = \{x \in V | d(x)\}$ és
μ_0 x G – ben x foka páratlan $\leftrightarrow$ x $\in$ P
$\sum_{e \in E(\mu_0 x G)} l(e) \rightarrow min$

$\equiv$ |P| = 2g

Keressük $U_1, U_2, \dots, U_g$ utakat úgy, hogy párosítsák P elemeit (mint az utak végpontpárjai).
$\sum_{i=1}^{g} l(U_i) \rightarrow min$

Az utolsó két probléma között a viszony az egyik irányba nyilvánvaló:
$U_1, \dots, U_g$ élek adnak egy lehetséges μ_0 – t : μ_0 (e) = e hány darab úton szerepel. Egy – egy út G – hez adása a két végpont fokát (két P – beli csúcs) 1 – gyel növeli, a többi csúcs paritása változatlan marad. Így a g darab út egy lehetséges μ_0 - nak felel meg. Fordítva is igaz:

Lemma: H = μ_0 x G egy olyan gráf, amelyben P a páratlan fokú csúcsok halmaza (g = 2 |P|).
Ekkor H – ban található olyan g darab éldiszjunkt út, amelyek végpontpárjai párosítják P elemeit. A lemma alapján az utolsó ekvivalencia nyilvánvaló.

A lemma bizonyítása egyszerű feladat.

Következmény: Algoritmus Kínaipostás – problémára (Edmonds)
(1) Határozzuk meg a P csúcshalmazt
(2) Keressük meg P – beli pontpárok között az összes legrövidebb utat(⟵ Dijkstra alg.)
→ S segédgráf csúcsok: P
élek: összes pár (azaz teljes gráf)
$\tilde{l} : e$ |→ legrövidebb xy út hossza
(3) S-ben keressünk egy M teljes párosítást, amelyre $\sum_{e \in M} \tilde{l}(e) \rightarrow min$
L: H(= μ0 x G) P = H páratlan fokú csúcsai. Létezik olyan éldiszjunkt útrendszer, amely végpontjai párosítják P – t.
(4) G + (P_e : e $\in$ M) minden fok páros, ahol:
P_e: e $\in$ E(S) mögött lévő legrövidebb út.
Keressünk záródó Euler – vonalat!
(5) Vetítsük vissza G-be → záródó séta.

<u>Tétel</u>: Az output optimális. Lásd a felvezetést!