Gráfelmélet MSc hallgatók számára

3. Előadás

Előadó: Hajnal Péter
Jegyzetelő: Dévai Richard 2010. szeptember 23.

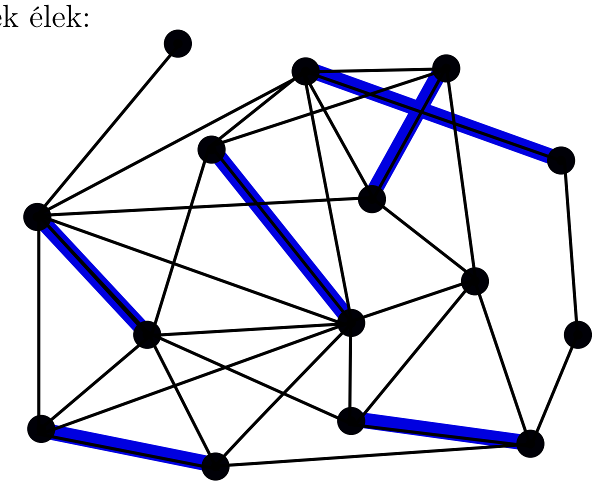
1. Párosítások és mátrixok

Definíció. $F \subseteq E$, $V(F) = \{x \in V | x-$ re illeszkedjen F-beli él$\} = \cup_{e \in F} V(e)$, ahol $V(e) = \{e$ végpontjai$\}$.

Megjegyzés. Nyilván $|V(F)| \leq 2|F|$.

Definíció. $M \subseteq E(G)$ élhalmaz párosítás, ha $|V(M)| = 2|M|$, azaz M-ben nincs hurokél és nincs összefutás az M-beli élek között.

Példa. M élei a kék élek:



Definíció. M teljes párosítás, ha párosítás és $V(M) = V(G)$.

Megjegyzés. Nyilván ha létezik teljes párosítás G-ben, akkor $|V(G)|$ páros.

Alapproblémák:

- Adott egy (egyszerű) gráf. Van-e benne teljes párosítás?
- Adott egy (egyszerű) gráf. Mi a legnagyobb párosításának mérete?
- Adott egy (egyszerű) gráf. Határozzunk meg egy párosítását, amely mérete a legnagyobb.

Mi egy fontos speciális esetben vizsgáljuk meg a kérdést.

Emlékeztető. Egy páros gráf olyan gráf, amely csúcshalmaza $A \dot\cup F$ és minden él egyik végpontja A-beli, másik végpontja B-beli.

Megjegyzés. Páros gráfban nincs hurokél.

Néhány korábban megismert fogalom páros gráfok esetén természetesen módosul. Páros gráf szomszédsági mátrixa (az A-A és F-F élek hiánya miatt) az alábbi formájú szomszédsági mátrix:

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} \overbrace{}^{A} & \overbrace{}^{F} \end{array} \\ \begin{array}{r} A\{ \\ F\{ \end{array} & \left[\begin{array}{c|c} 0 & P_G \\ \hline P_G^T & 0 \end{array}\right] \end{array},$$

A fenti P_G-t a páros gráf páros-szomszédsági mátrixának nevezzük. Gráfunk egyszerűségének következménye, hogy P_G egy 0-1-ekből álló mátrix: 0-k nem éleket kódolnak, 1-ek $E(G)$ elemeinek felelnek meg.

Kérdés: Adott egy egyszerű páros gráf. Létezik-e benne teljes párosítás?

$|A| \neq |F|$ esetén nyilván nem létezik teljes párosítás. $|A| = |F|$ (azaz P_G négyzetes) a probléma érdemi esete. A továbbiakban ezt feltesszük.

A magyar módszer megoldja ezt a problémát (és általánosabb kérdéseket is). Mi most egy jóval egyszerűbb megoldást ismertetünk.

1.1. Determinánsok

Emlékeztető. Egy M mátrix determinánsa.

$\det(P_G)$ kifejtési tagjai megfelelnek az alsó és felső pontok egy azonosításának. A nem nulla kifejtési tagok megfelelnek a teljes párosításoknak.

Megjegyzés. A kifejtési tagok megvilágítására szolgál a következő értelmezés: A mátrix pozícióit gondoljuk egy sakktábla mezőinek. Egy kifejtési tag n mátrix elem szorzata, ahol az n elem olyan n pozíciónak felel meg, ahol az elhelyezett bástyák nem ütik egymást. Ha az elemek szorzata nem 0 akkor 1-esek szerepelnek ott, amelyeknek megfelelő élek teljes párosítást adnak.

Észrevétel. Ha $\det(P_G) \neq 0$, akkor G-ben van teljes párosítás. Valóban: A determináns kifejtési tagok előjelezett összege. Ha ez nem 0, akkor valamelyik kifejtési tag nem 0, azaz van G-ben teljes párosítás.

Sajnos a gondolatmenet nem megfordítható. Sőt a megfordítás nem is igaz:

Példa. Ha a páros szomsédsági mátrixban van két azonos oszlop, akkor $\det(P_G) \neq 0$. A két azonos oszlop, csak két felső pont azonos szomszédságát jelenti. Könnyen lehet, hogy van teljes párosítás G-ben. Egy konkrét példa:

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 1 - 1 = 0$$

Megjegyzés. Egy $n \times n$ méretű mátrix determinánsában $n!$ sok kifejtési tag van. Ennek ellenére a determináns hatékonyan kiszámolható.

1.2. Permanensek

Definíció. Legyen $M_{A\times F}$ egy négyzetes ($|A| = |F|$) mátrix. Ekkor per(M) az M mátrix permanense:

$$\mathrm{per}M = \sum_{\pi:A\to F,\text{ bijekció}} \prod_{i\in A} M_{i,\pi i}.$$

Észrevétel. (i) Ha $\mathrm{per}(P_G) \neq 0$, akkor G-ben van teljes párosítás.

(ii) $\mathrm{per}(P_G)$ megadja G teljes párosításainak számát.

Megjegyzés. Adott M négyzetes mátrix

(i) $\det(M) =?$ Könnyű meghatározni (lásd Gauss-elimináció) .

(ii) $\mathrm{per}(M) =?$ Nehéz probléma ($\#$ P-nehéz).

Így ez utóbbi észrevétel nem használható hatékonyan algoritmus tervezésére.

1.3. Polinomok

Definíció. P_G minden 1-eshez (minden élhez) vegyünk új x_e változót (betűt). Az így kapott mátrix legyen X_G.

Példa. $P_G = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow X_G = \begin{pmatrix} x & y & 0 \\ z & s & 0 \\ 0 & 0 & t \end{pmatrix}$, $\det(P_G) = 1 - 1 = 0$, $\det(X_G) = xst - yst \not\equiv 0$.

Észrevétel. Ha $\det(X_G) \not\equiv 0$, akkor van G-ben teljes párosítás.

Ismét problémával állunk szemben: $\det(X_G)$ sem számítható könnyen, általában nem írható fel röviden. DE $\det(X_G)$ könnyen kiértékelhető ($x_e = v_e : e \in E$) értékadás esetén

Ha $\det(X_G)|_{(x_e \to v_e : e\in E)} \neq 0$, akkor G-ben létezik teljes párosítás.

Ha létezik teljes párosítás, de a kiértékelt $\det(X_G) = 0$, akkor a helyettesítési értékek szerencsétlenül lettek választva. Ezen segíthet a helyettesítési értékek véletlen választása: $\det(X_G)|(x_e \leftarrow r_e)$ kiszámolása, ahol r_e véletlen szám generálással nyert. Ezen ötleteket foglalja össze a következő algoritmus.

PÁROS-TELJES-PÁROSÍTÁS-TESZT(N): Adott G páros gráf, azaz $(P_G)_{|A|\times|F|}$ négyzetes 0-1 mátrix.

Rand: P_G minden 1-esét helyettesítsük $\{1, 2, \dots, N\}$ egy uniform véletlen elemeivel. A véletlen számok különböző 1-esekre függetlenek. Legyen R_G az így kapott mátrix.

Det: Számoljuk ki $\det(R_G)$-t.

Out: Ha $\det(R_G) \neq 0$, akkor az algoritmus outputja „G-ben VAN teljes párosítás”. Ha $\det(R_G) = 0$, akkor az algoritmus outputja „G-ben VALÓSZÍNŰLEG NINCS teljes párosítás”.

Az algoritmus persze, csak akkor ér valamit, ha becsüljük a hibázás valószínűségét. A becslés persze függ az inputtól és az algoritmusban szereplő N paramétertől.

1. Tétel. $\mathbb{P}$(*ALGORITMUS(N) hibázik*) $\leq \frac{|A|\cdot|E|}{N}$.

Megjegyezzük, hogy $|A| = |F| = \frac{|V|}{2}$. Az algoritmus analízise következik az alábbi állításból.

Definíció. $\mathbb{R}[x_1, \ldots, x_k]$ a valós együtthatókat és $x_1, \ldots, x_k$ (változókat/betűket) használható polinomok halmaza. Egy $p \in \mathbb{R}[x_1, \ldots, x_k]$ polinom fokát úgy határozzuk meg, hogy monomjai fokai közül a legnagyobbat vesszük. (Egy monom foka a benne szereplő betűk kitevőinek összege.)

2. Tétel (Schwartz-Lemma). *Legyen* $p(x_1, \ldots, x_k) \in \mathbb{R}[x_1, \ldots, x_k]$*, pontosabban* $p = \sum_{i_1,\ldots,i_k} \alpha_{i_1,\ldots,i_k} x^{i_1} \ldots x^{i_k}$*. Feltesszük, hogy* $p \not\equiv 0$*.* $(r_1, \ldots, r_k) \in \{1, \ldots, N\}^k$ *(uniform eloszlású véletlen elem). Ekkor*

$$\mathbb{P}(p(r_1, \ldots, r_k) = 0) \leq \frac{\deg(p) \cdot k}{N}.$$

Ebből valóban adódik algoritmusunk analízise: A hibázás eseménye

$$[\det(X_G)(r_1, \ldots, r_k) = 0, \text{ de } \det(X_G) \not\equiv 0].$$

A $\det X_G$ polinom változó száma $|E|$ és foka $|F| = |A|$.

Bizonyítás. k-re vonatkozó teljes indukcióval bizonyítunk.

$k = 1$ esetén egy δ fokú polinom általános alakja $p(x) = \alpha \cdot x^\delta + \beta \cdot x^{\delta-1} + \ldots + \omega$. Tudjuk, hogy maximum δ darab gyöke van. Legyen R a gyökök halmaza ($|R| \leq \delta$) .

$$\mathbb{P}(p(r_1) = 0) = \mathbb{P}(r \in R) = \frac{|R \cap \{1, \ldots, N\}|}{|\{1, \ldots, N\}|} \leq \frac{\delta}{N}$$

Az indukciós lépés $k-1$-ről k-ra:

Legyen $p \in \mathbb{R}[x_1, \ldots, x_k]$. Feltehető, hogy az x_1 betű szerepel p-ben. Ekkor p felírható a következő módon

$$p = e_0(x_2, \ldots, x_k)x_1^\delta + e_1(x_2, \ldots, x_k)x_1^{\delta-1} + \ldots$$

Nyilván $\delta \geq 1$, ahol δ az x_1 maximális kitevője.

A tételben szereplő $E = \{p(r_1, \ldots, r_k) = 0\}$ eseményt átalakítjuk, majd felülről becsüljük.

$$\begin{aligned} E \equiv &\{r_2, \ldots, r_k \text{ olyan, hogy } 0 = e_0(r_2, \ldots, r_k) = e_1(r_2, \ldots, r_k) = \ldots\} \cup \\ &\cup \{r_1 \text{ gyöke a } q(x_1) = e_0(r_2, \ldots, r_k)x_1^\delta + \ldots \text{polinomnak}\} \end{aligned}$$

Ezen felírás alapján

$$E \subset \{e_0(r_2, \ldots, r_k) = 0\} \cup \{r_1 \text{ gyöke } q(x_1)\text{-nek}\}.$$

Ez alapján a kérdéses valószínűséget becsüljük:

$$\mathbb{P}(p(r_1, \ldots, r_k) = 0) \leq \mathbb{P}(e_0(r_2, \ldots, r_k) = 0) + \mathbb{P}(r_1 \text{ gyöke } q(x_1)\text{-nak}).$$

Ezt becsülhetjük az indukciós feltevés (e_0 foka nyilván legfeljebb $\deg(p) - \delta$) és a $k = 1$ eset analízise segítségével:

$$\leq \frac{k(\deg(p) - \delta)}{N} + \frac{\delta}{N} \leq \frac{k \deg(P)}{N}.$$

■

Példa. Válasszuk N értékét $2|A||E|$-nek. Ekkor Prob(hibázás) $\leq \frac{1}{2}$.

1.4. Hibázás valószínűségének javítása

Ezt a becslést esetleg kisebbnek szeretnénk. Hogyan érhetjük el?

1. lehetőség: Nagyobb N választása.
2. lehetőség: PÁROS-TELJES-PÁROSÍTÁS-TESZT$((2|A||E|)^k$, azaz k-szor ismételjük az algoritmust a példában szereplő paraméterekkel. (Természetesen az ismétlések során független véletlen biteket használunk.)

   Ha valamelyik futásnál $\det(R_G) \neq 0$, akkor az ismételt algoritmus outputja "VAN G-ben teljes párosítás". Ha mindegyik futásnál $\det(R_G) = 0$, akkor az ismételt algoritmus outputja "Valószínűleg nincs G-ben teljes párosítás".

   Az így kapott algoritmus hibázásának valószínűsége:

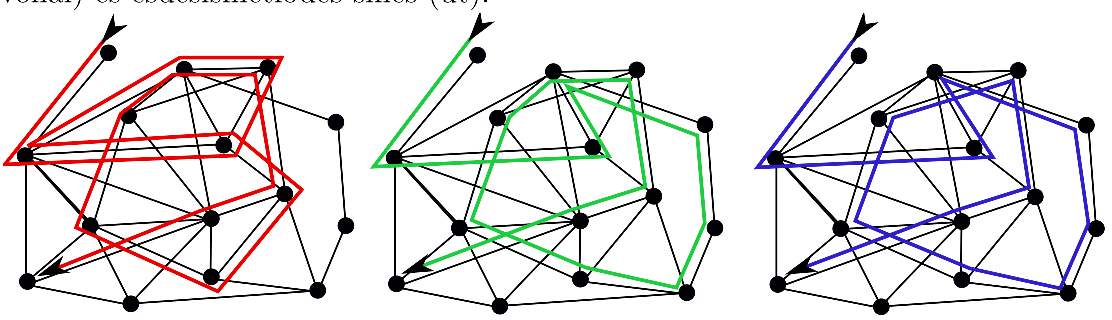
$$\mathbb{P}(\text{PÁROS-TELJES-PÁROSÍTÁS-TESZT}(2|A||E|)^k \text{ hibázik}) \leq \left(\frac{1}{2}\right)^k.$$

2. Vonalak

Definíció. Egy $\mathcal{V}$ sétát *vonalnak* nevezünk, ha nincs benne élismétlés.

Megjegyezzük, hogy az élismétlés tiltása mellett a csúcsok ismétlődhetnek.

Példa. A piros sétában van élismétlés (nem vonal), a zöldben nincs élismétlés (vonal), de a csúcsok között van ismétlődés. A kék sétában nincs csúcsismétlődés (vonal) és csúcsismétlődés sincs (út):



A sétát mint egy $v_0, e_1, v_1, e_2, \ldots, e_\ell, v_\ell, \ldots$ sorozat definiáltuk, azaz egy matematikai objektumban foglaltuk össze. A statikus szemlélet mellett hasznos egy dinamikus szemlélet is. Ekkor a fenti definícióban az index az „idő”. v_i azt mondja meg, hogy az i-edik pillanatban hol vagyunk a sétában. e_i az i-edik időpillanatban átszelt élt, a séta i-edik lépése. Ha a dinamikus szemléletet hangsúlyozni szeretnék, akkor sétálásról beszélünk. A sétálás felfogható mint egy algoritmus.

procedure SÉTÁLÁS (x csúcsból indulva)
$v_{\text{aktuális}} \leftarrow x$
$\mathcal{S}_{\text{aktuális}} \leftarrow$ "x" (* 0 hosszú séta *)
REPEAT(
    Keress e élt, ami $v_{\text{aktuális}}$-ra illeszkedik, azaz $e = v_{\text{aktuális}}v$
    $v_{\text{aktuális}} \leftarrow v$
    $\mathcal{S}_{\text{aktuális}} \leftarrow$ "$\mathcal{S}_{\text{aktuális}}, e, v$"
)END-REPEAT

Egy sétálás lehet végtelen: egy élen oda-vissza lépegetünk korlátlan ideig.

Mohó vonal növelés olyan sétálás, ahol minden lépésnél vigyázunk arra, hogy már bejárt élen ne haladjunk át újra.

procedure VONAL-NÖVELÉS (x csúcsból indulva)
$v_{\text{aktuális}} \leftarrow x$
$\mathcal{V}_{\text{aktuális}} \leftarrow$ "x" (* 0 hosszú vonal *)
REPEAT(
    Keress e élt, ami $v_{\text{aktuális}}$-ra illeszkedik, azaz $e = v_{\text{aktuális}}v$ és $e \notin E(\mathcal{V}_{\text{aktuális}})$.
    Ha van ilyen e:
        $v_{\text{aktuális}} \leftarrow v$
        $\mathcal{V}_{\text{aktuális}} \leftarrow$ "$\mathcal{V}_{\text{aktuális}}, e, v$"
    Ha nincs ilyen e:
        Elakadás
)END-REPEAT

Egy vonal növelés szükségszerűen elakad. Az élek száma korlátot ad a hosszára.