Gráfelmélet jegyzet – 2. előadás

Készítette: Kovács Ede

1. Fák

Tétel 1.1 : A következők ekvivalensek a T gráfra:

(i) T összefüggő, $\forall e \in E. T - e$ már nem összefüggő

(ii) T összefüggő és körmentes.

(iii) $\forall\ x, y\ \in V(T)\ \exists!\ xy$ út.

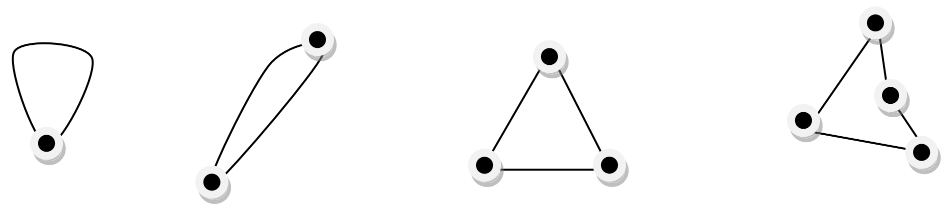
A körmentességet megmagyarázva (illetve egy G gráfra azt mondjuk, hogy van benne kör): Egy S kör a gráfban $(v_0, e, v, e_2, \dots, e_l, v_l)$, $l \geq 1$, ha:

(i) Záródó, az az $v_0 = v_l$.

(ii) Az élek nem ismétlődnek

(iii) Csúcsismétlés csak záródásnál, v_0, v_1, v_{l-1} csúcsok különbözőek

A kis köröket az alábbi ábra mutatja:



Definíció 1.1 : T gráf FA, ha az 1.1-es tételből (i) vagy (ii) vagy (iii) teljesül

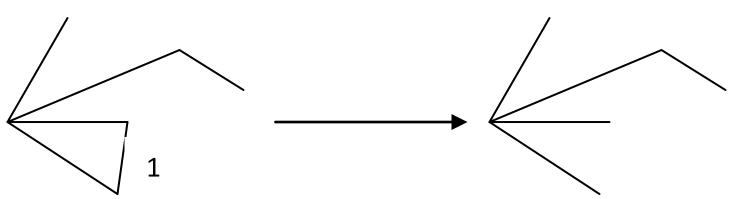
Definíció 1.2 : $G \supseteq T$, T feszítőfa :

(i) $V(T) = V(G)$

(ii) $T\ fa$

Megjegyzés: $\supseteq$ jelölés részgráfot jelent. $H \supseteq R$: R megkapható H-ból csúcsok, élek elhagyásával. $H \supseteq R$ feszítő részgráf akkor, ha R csak élek elhagyásával kapható meg H-ból.

Élelhagyás:



Például az 1-es él elhagyása.

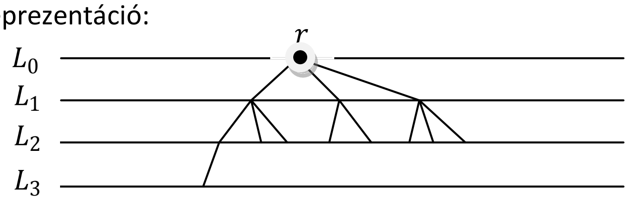
Tétel 1.2 : G-nek $\Leftrightarrow$ $\exists$ feszítőfája, ha G összefüggő.

Definíció 1.3 : (T,r) gyökeres fa:

(i) T fa

(ii) $r \in V(T)$, ahol r (root) egy speciális csúcs, és a neve gyökér.

Reprezentáció:



Ahol L_0, L_1, L_2, L_3 szintek vagy generációk.

$L_i = \{v \in V(T): v\ távolsága\ r - től\ = i\}$, ahol két csúcs (v és r) távolsága a legrövidebb. Fák esetén a minimalizálás nem gond: egyetlen vr út van.

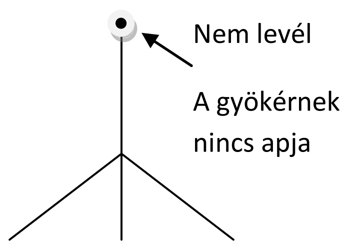
Megjegyés: francia irodalomban szokás a fordított ábrázolási mód, az az a gyökér van alul.

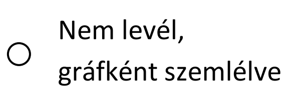
Ha x,y szomszédos csúcsok egy gyökeres fában, akkor szomszédos szintekhez (L_i $és$ L_{i+1}) tartoznak. Amennyiben az xy élre $x \in L_i$ $és$ $y \in L_{i+1}$ azt mondjuk, hogy x és y csúcs apja és y az x csúcs fia.

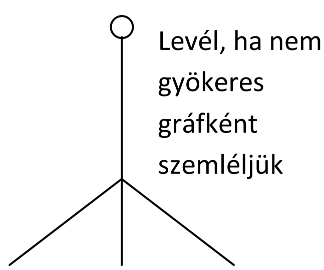
Definíció 1.4 : T fa $v \in V$ levél ⇔ d(v) = 1.

(T,r) gyökeres fa $v \in V$ levél ⟺ nincs fia („lefok = 0").

Példák:



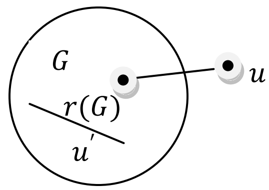




Másféle megközelítésből:

Definíció 1.5 : G⤳ G_{i+1}, ághajtás operáció.

Egy G gráf esetén azt mondjuk, hogy a G' gráfot egy ághajtás operációval képeztük G-ből, ha $V(G') = V(G) \cup \{u\}$, és $E(G') = E(G) \cup \{e\}$, ahol e két végpontja közötti u és egy előző, $V(G)$-beli pont.

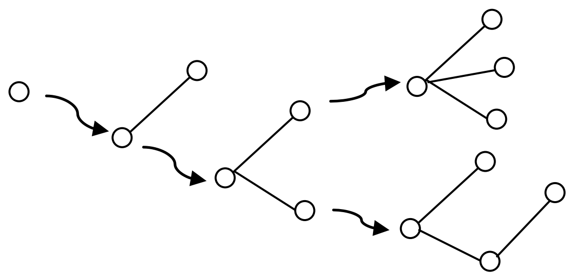


Definíció 1.6 : G ághajtásokkal felépíthető, ha ∃ $G_0, G_1, \ldots, G_l$ sorozat:

(i) G_0 egypontú, él nélküli gráf,

(ii) $G_l = G$,

(iii) i=0,1,2,...,l-1, esetén G_{i+1} a G_i gráfból egy ághajtással kapható.



Tétel 1.3 : T fa ⟺ T felépíthető ághajtásokkal

Bizonyítás:

⇒, a nehezebbik része, a bizonyítás a következő lemmán alapul:

Lemma 1.1 : Minden F fára, ha $|V(F)| \geq 2 \Rightarrow \exists \geq 2$ levél (elsőfokú pont).

Bizonyítás:

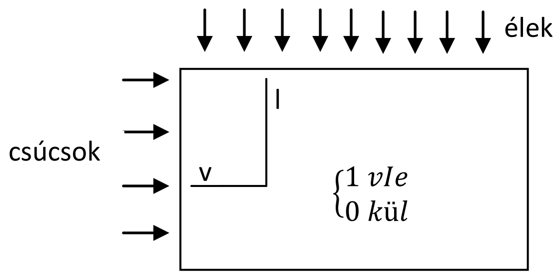
Leghosszabb l és l' út két végpontja. l és l' is levél: az útbeli szomszédján kívül nem lehet más szomszédja. Ezek után amíg legalább két csúcsunk van, hagyjunk el egy levelet (ezt megtehetjük). Amikor egy csúcs marad (szükségszerűen 0 éllel) leállunk. „Csonkítási” eljárásunk megfordítása egy ághajtásos feléptés.

Következmény 1.1: (T,r) gyökeres fa, akkor T felépíthető ághajtásokkal r-ből.

Alapkérdés

Adott G, $F \subseteq E$, van-e F-ben kör (élhalmaz)?

Definíció 1.7 : $G \longrightarrow B_G$ (B_G - pont-él-illeszkedési mátrix, G pedig hurok él mentes)

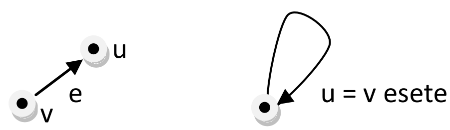


Definíció 1.8 : $\vec{G}$ irányított gráf (V,E,K,B) ∀e∃! u : uBe és ∀e∃! v : vKe ,ahol V-csúcshalmaz, E-élhalmaz, K-„ki”, B-„be”. vIe ⟺ vKe vagy vBe

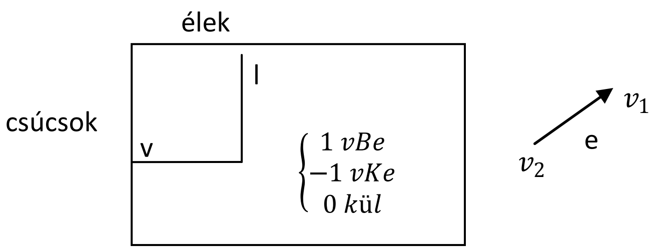
⟶Iránvítás elfeleitése(formálisan)

$\vec{G} \rightleftarrows G$ ⟵ Irányítatlan gráf

⟵Irányítás (általában sokféle lehet)



Irányított gráfra is lehet definiálni pont-él-illeszkedési mátrixot:
$\vec{G} \quad \longrightarrow \quad B_{\vec{G}}$, ahol $\vec{G}$ hurokél mentes.



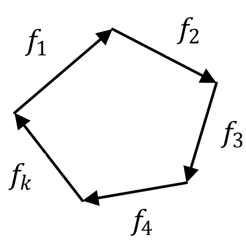
∀ oszlopban 1db 1-es, 1db (-1)-es és tobább 0-ák találhatók, azaz $B_{\vec{G}}$ -t B_G-ből úgy kapjuk, hogy minden oszlopból kiválastunk egy 1-est és előjelét megváltoztatjuk.

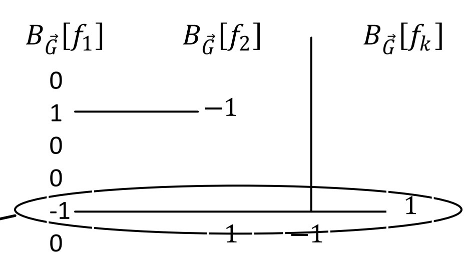
Tétel 1.4 : $G \rightsquigarrow \vec{G} \rightsquigarrow B_{\vec{G}}$, $B_{\vec{G}}[e]$: $B_{\vec{G}}$ e-nek megfelelő oszlopa.
$F \subseteq E$:

(i) F-ben van kör $\{B_{\vec{G}}[\mathrm{e}]\colon \mathrm{e} \in \mathrm{F}\}$, lineárisan függőek.

(ii) F-ben nincs kör $\{B_{\vec{G}}[\mathrm{e}]\colon \mathrm{e} \notin \mathrm{F}\}$, lineárisan függetlenek.

Bizonyítás:
(i) 1. eset:

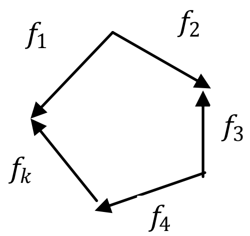




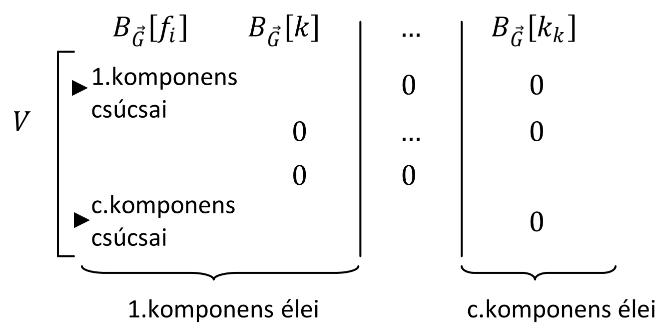
1 kör f_i irányított élei csatlakoznak

$\sum_{i=1}^{k} B_{\vec{G}}\,[f_i] = \underline{0}$, és ebből következik az állítás.

(i) 2. eset:

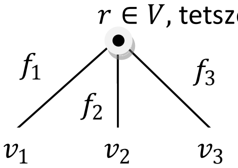


Vannak irányítás váltások az előző eset irányításaihoz viszonyítva. Irányítás váltás ≡ megfelelő oszlop (-1)szerezése, de az utóbbi nem változtat a lineáris függőségen, így vissza vezethető az első esetre.
(ii) F-ben nincs kör
F élei ⟶ R részgráf körmentes ≡ komponensei fák ≡ erdő



ahol, c a komponensek száma
A komponensek blokkosítják a $\{B_{\vec{G}}[f] : f \in F\}$ oszlopokból összerakott mátrixot. A főátlós blokkokon kívül 0-ák szerepelnek. Elég ezekben (nem 0) blokkokban látni, hogy az oszlopok lineárisan függetlenek, azon feltehető, hogy F feszítő fa élhalmaza:

$r \in V$, tetszőleges gyökér



Például k=3

f_i-k indexelése egy ághajtási felépítésben az „idő”. Továbbá v_i csúcsokat is indexeljük.

$$
\begin{array}{c|ccccc|}
 & B_{\vec{G}}[f_1] & B_{\vec{G}}[f_2] & \ldots & & B_{\vec{G}}[f_k] \\
\hline
v_1 & \pm 1 & ? & & & ? \\
v_2 & 0 & \pm 1 & & & \\
 & & & & & \\
 & & & 0 & \pm 1 & \\
v_k & & & 0 & 0 & \pm 1 \\
\hline
r & \pm 1 & ?? & ?? & ?? & ??
\end{array}
\longrightarrow \text{Ezeket a viszonyokat nem tudjuk}
$$

r sorát letörölve négyzetes mátrixot kapunk. Ez felső trianguláris mátrix ± 1-ekkel a főátlón, azaz $\det \in \{\pm 1\}$

Következmény 1.2: $G \rightsquigarrow \vec{G} \rightsquigarrow B_{\vec{G}} \rightsquigarrow {B_{\vec{G}}}^*$,ahol az utolsó lépésben r csúcs sorának elhagyásával a keletkező ${B_{\vec{G}}}^*$ (n-1)xm dimenziójú mátrix, $|V| = n, |E| = m,\ |F| = n - 1, F \subseteq E$
${B_{\vec{G}}}^*[F]$ részmátrixa ${B_{\vec{G}}}^*$-nek, amit F-nek megfelelő oszlopok alkotnak.

(i) F feszítőfa élhalmaza: $det{B_{\vec{G}}}^*[F] \in \{\pm 1\}$.

(ii) F nem feszítőfa élhalmaza: $det{B_{\vec{G}}}^*[F] = 0$.

Tétel 1.4 : (Cauchy-Binet formula) $A, B \in R^{kxl}$

$$\det AB^T = \sum \det A[F] \det B[F]_{kxk}$$

ahol az összes olyan F-ekre történik, ahol F k elemű oszlophalmaz(az az a szummába $\binom{l}{k}$ db tag van)

A ${B_{\vec{G}}}^* \left({B_{\vec{G}}}^*\right)^T$ mátrix determinánsát a Cauchy-Binet formulával kifejezve és a Következmény 1.2-t használva kapjuk, a következő tételt:

Következmény 1.3: (Kirchoff-tétel)

$$\det {B_{\vec{G}}}^* \left({B_{\vec{G}}}^*\right)^T = \det\left(\begin{pmatrix} d_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & d_{n-1} \end{pmatrix} - {A_G}^*\right) = G\ feszítőfáinak\ száma$$