Készítette: Laczik Sándor János

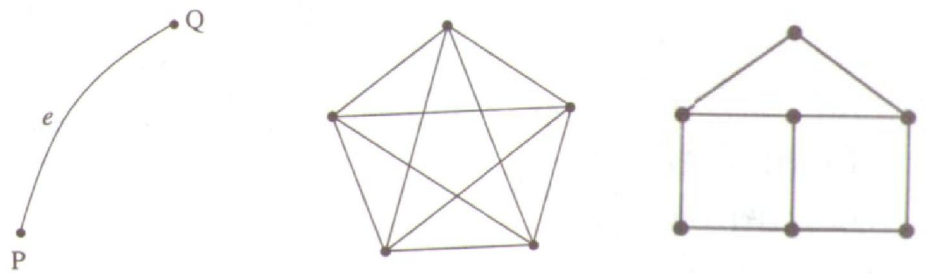
Gráfelmélet

I. Előadás jegyzet (2010.szeptember 9.)

1.A gráf fogalma

Definíció: a G=(V,E) párt *egyszerű gráf*nak nevezzük, (V elemeit a gráf csúcsainak/pontjainak,E elemeit a gráf éleinek nevezzük) ha az E halmaz V-beli elempárokat tartalmaz ($E \subseteq \binom{V}{2}$).

Példa egyszerű gráfokra:



A gráfok lerajzolhatók: a pontokat karikák (írásban általában $v_1 v_2$, v_3, …) , az élek a pontokat összekötő görbék (írásban e_1,e_2,e_3,…) ábrázolják.

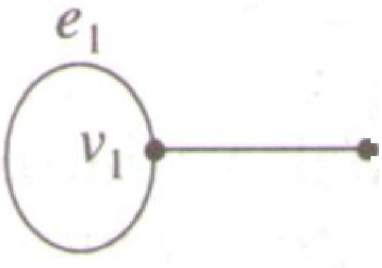
e={x,y} eleme E estén azt mondjuk,hogy *x* és *y* az *e* él két *végpontja*, illetve *x* és *y* csúcsok *szomszédos*ak.

Különböző élek két végpontja különböző kételemű ponthalmazok. Néha szükségünk van egy általánosabb fogalomra:

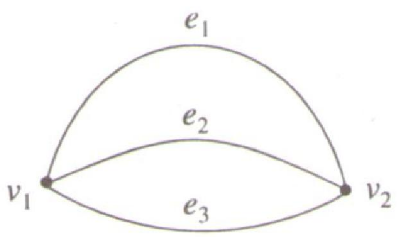
Definíció: a G=(V,E,I) egy *gráf*, ha V és E két halmaz és I a *V x E* Descartes-szorzat egy részhalmaza feletti reláció és minden $e \in$ E esetén teljesül, hogy V_e ={v eleme V: v|e} egy- vagy kételemű halmaz. V_e elemeire úgy gondolunk, mint *e* két végpontjára, amelyek egybe is eshetnek (ekkor lesz V_e egyelemű halmaz).

Definició: egy *e* él *hurokél*, ha két végpontja megegyezik.

Példa hurokélre:



Definició: az e és az f él *párhuzamos*, ha $V_e = V_f$ (kezdő és végpontjaik megegyeznek). Példa párhuzamos élekre:

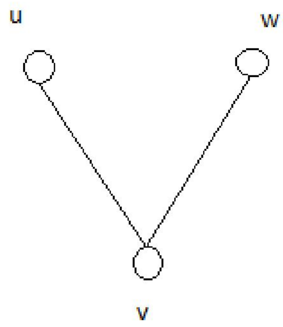


2. Gráfok ábrázolásának lehetőségei:

1, Egy kevésbé szemléletes, de a számítógépek számára is „érthető” módja egy G gráf megadására, ha felsorolom a gráf pontjait és megmondom, hogy mely pontokat köt össze él.

Példa: V(G) = {u,v,w}   E(G)={uv,wv}

másképpen ábrázolva:



Egy változat: felsorolom a csúcsokat és mindegyikre felsorolom a szomszédjait.

2, Egy gráf leírható mátrixok használatával is.

a, Illeszkedési mátrix

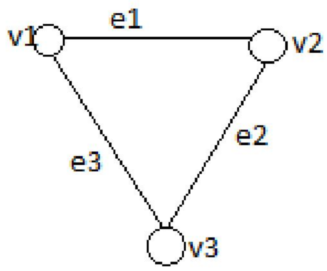
<u>Definíció:</u> A hurokél-nélküli G gráf illeszkedési mátrixa (jele: I_G) olyan mátrix,amelyben az egyes sorok az egyes pontoknak,az oszlopok az egyes éleknek felelnek meg. Tehát annyi sora van, ahány csúcsból áll a gráf és annyi oszlopa, ahány él található a gráfban.

Továbbá

$$I_G(v,e) = \begin{cases} 1, \text{ ha } vIe \\ 0, \text{ különben} \end{cases}$$

Tehát a *v* pont és az *e* él oszlopában található elem 1, ha a v pontra illeszkedik az *e* él,különben zérus. Mivel egy él két csúcs között értelmezett, könnyen látható hogy az illeszkedési mátrix oszlopaiban két darab 1-es található és a többi elem 0. Példa illeszkedési mátrixra:

Ig	e1	e2	e3
v1	1	0	1
v2	1	1	0
v3	0	1	1



b, Szomszédsági mátrix

Definíció: A G huroknélküli gráf szomszédsági mátrixa olyan négyzetes mátrix, amelynek sorai és oszlopai azonosítottak a gráf csúcsaival (számuk a gráfban található csúcsok számával egyezik meg) és egy (u,v) elempárhoz tartozó mátrixbeli elem értékét a következőképpen kapjuk:

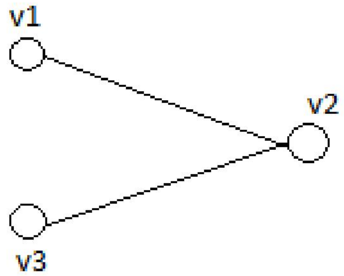
$$A_G(u,v) = \begin{cases} 1, \text{ha m db él végpont halmaza } \{u,v\} \\ 0, \text{különben} \end{cases}$$

A szomszédsági mátrix jele: A_G

Könnyen belátható, hogy A_G szimmetrikus és a főátlóban csupa 0 elem szerepel (ez utóbbi állítás nem lesz igaz, ha hurok is lehetne a gráfban). Ha G egyszerű, akkor a szomszédsági mátrix elemei 0-ból (nincs hurokél) és 1-esekből (van él) áll.

Példa szomszédsági mátrixra:

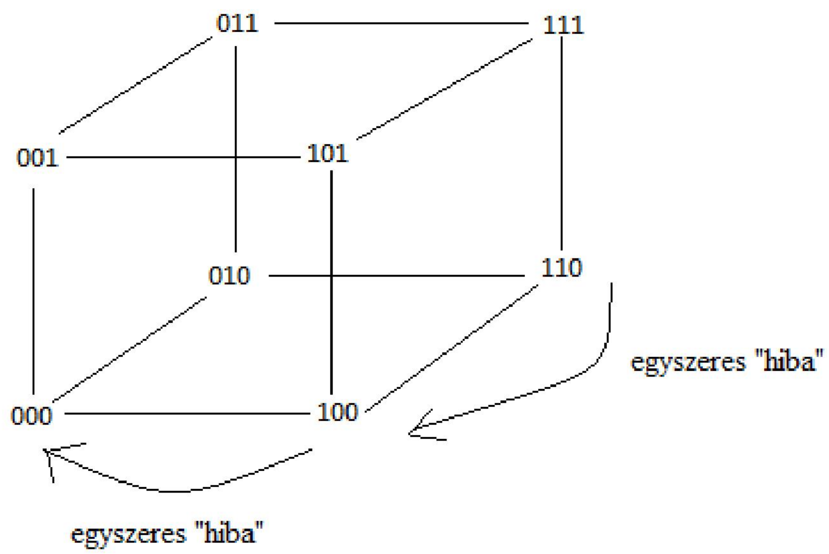
Ag	v1	v2	v3
v1	0	1	0
v2	1	0	1
v3	0	1	0



3, „Tömör kódolás”

A V elemeit kódoljuk. Az élek halmazát egyszerű gráf esetén egy „szomszédos-e” szubrutinnal írhatjuk le.

Példa:



A csúcsokat u hosszú bináris számok jelölik. Két csúcs akkor szomszédos, ha a két érték Hamming-távolsága éppen 1.

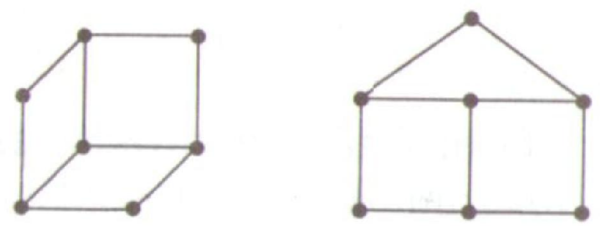
A fenti példa könnyen programozható n=1000 esetén is. Ekkor a példabeli gráfnak 2^{1000} db csúcsa van. Ennek ellenére egy 1000000 lépéses véletlen séta utolsó csúcsa pillanatok alatt kiszámolható.

3.Alapfogalmak

Definició: a H és a G egyszerű gráfok *izomorfak*, ha létezik olyan bijektív leképezés V(G) és V(H) között,amely minden (u,v) elempárra igaz lesz,hogy azok G-ben akkor és csak akkor vannak összekötve,ha képük H-ban össze vannak kötve.

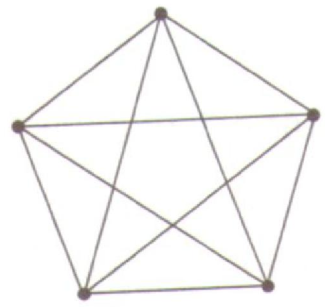
G és H izomorfizmusa jelölve G~H.

Példa izomorfizmusra:



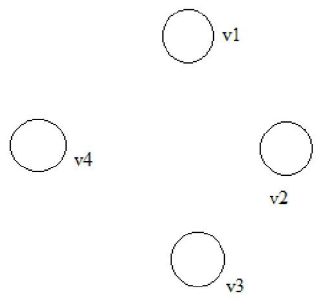
Definició: egy H egyszerű gráf *teljes gráf* egy ponthalmazon, ha minden halmazbeli elemre igaz, hogy az összes többi halmazbeli elemmel szomszédos. („minden csúcs minden csúccsal össze van kötve")

Példa teljes gráfokra:

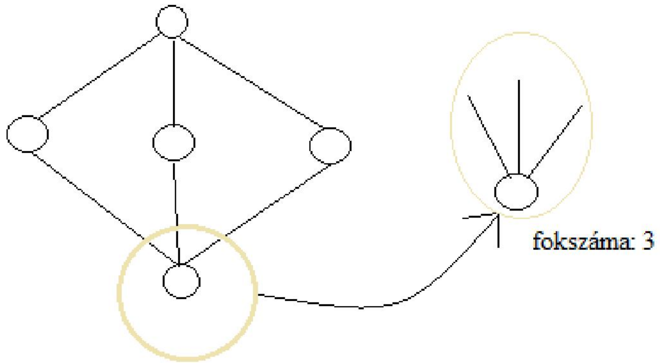


Definició: egy n darab csúcsból álló él nélküli gráfot *üres gráf*nak nevezünk.

Példa üres gráfra:



Definició: Huroknélküli gráfban egy v csúcsra illeszkedő élek számát a v csúcs *fokszámának* nevezzük.



A fokszám jelölése: $d_G(v)$ /a G gráf v csúcsának fokszáma/

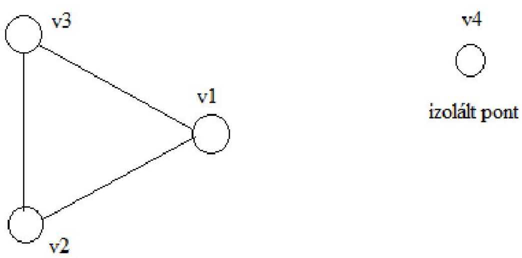
Általában a fokszám értékét úgy számoljuk, hogy megnézzük a G gráf azon éleinek számát, amelynek egyik csúcspontja a v és a másik csúcspontja v-től különbözik, illetve megszámolom hány olyan él van, amelynek kezdő és végpontja is a v csúcs és veszem a kétszeresét ennek. A két szám összege adja meg a v csúcs fokszámát:

$$d_G(v)=|\{e \in E(G) : v \mid e \text{ és } e \text{ nem hurokél}\}| +$$

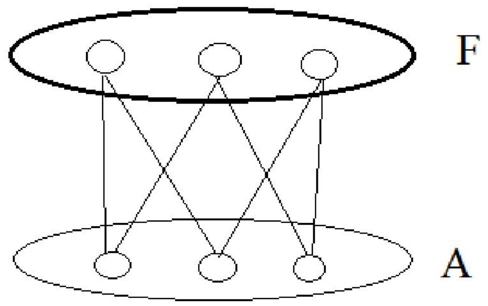
$$+ 2 * |\{e \in E(G): v|e \text{ és } e \text{ hurokél}\}|$$

A következő speciális esetet érdemes kiemelni:

Definició: egy *v pontot izolált pont*nak nevezünk, ha fokszáma zérus. Példa:



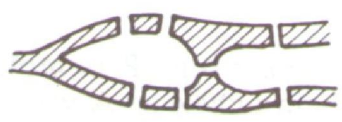
Definició: egy G gráfot *párosnak* nevezünk, ha annak élei feloszthatóak A és F diszjunkt halmazokra úgy,hogy minden él egy A és egy F részbeli csúcsot kössön össze.(A elemeire, mint alsó,F elemeire mint felső csúcsokra hivatkozunk.) Példa páros gráfra:

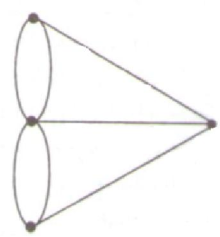


Megjegyzés: két halamaz diszjunkt uniója: X$\dot{\cup}$Y, ahol a pont arra utal, hogy X és Y metszete üres halmaz.

Definició: egy $v_0,e_0,v_1,e_1,\ldots,e_n,v_n$ (ahol $v_i \in V$ csúcssorozat és $e_i \in E$ élsorozat $i=1,\ldots,n$) sorozatot *sétának* nevezünk a G gráfban, ha e_i él két végpontja a v_i és a v_{i+1} csúcsok.

Példa: Königsbergi hidak problémája

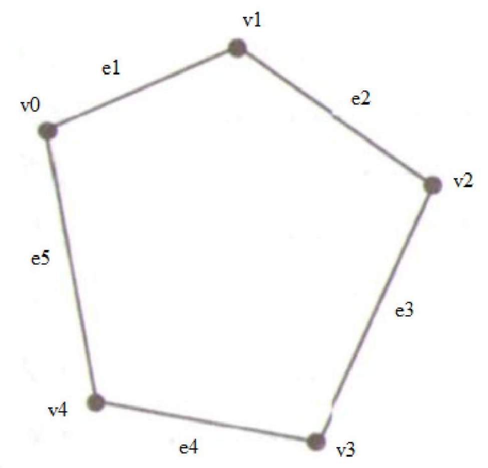




Megjegyzés: az N=0 eset is megengedett, amikor a séta egyetlen v csúcsból álló sorozat.

Definició: az olyan sétát, amelynek kezdő és végpontja azonos *záródó sétának*, vagy *körsétának,* vagy *zárt sétának* nevezünk.

Példa körsétára:

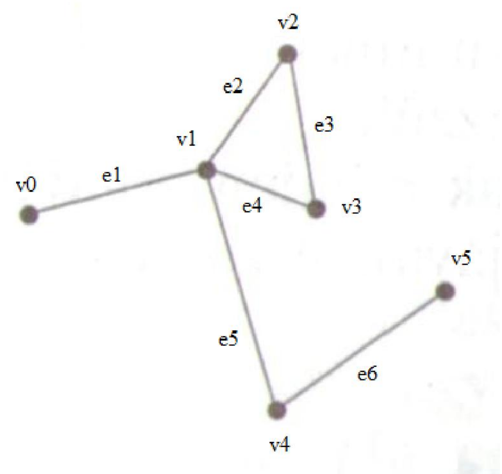


A $v_0, e_1, v_1, \ldots, v_4$ sétát tekintve a v_0 és a v_4 pontokat *végpontok*nak, a v_1, v_2, v_3 pontokat *belső pontok*nak nevezzük.

Megjegyzés: egyszerű gráf esetén a sétát (körsétát, vonalat, utat stb.) megadhatjuk az egymást követő pontok felsorolásával.

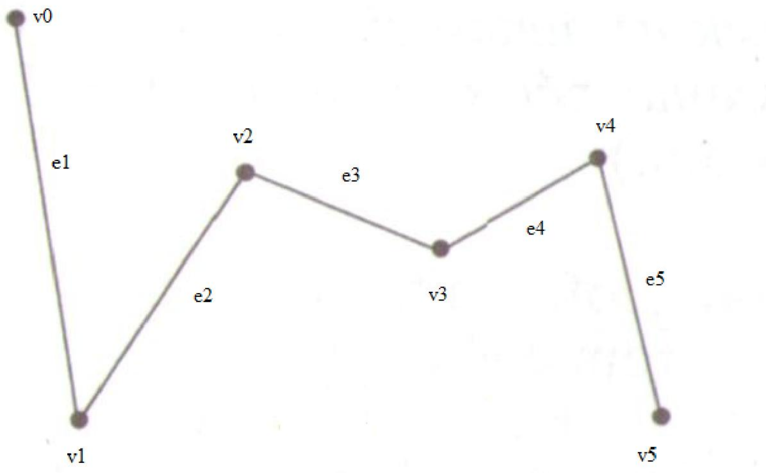
Definició: egy sétát *vonal*nak nevezünk, ha élsorozatában nincs ismétlődés.

Példa vonalra:



Definició: egy G gráfban a vonalat *út*nak nevezzük, ha a pontsorozatban sincs ismétlődés.

Példa útra:



Definició: az olyan vonalat, amelynek kezdő és végpontja azonos és ezeket figyelmen kívül hagyva nincs a pontsorozatban ismétlődés, továbbá legalább egy éle van, *kör*nek nevezzük.

Definició: az x~y azt jelenti, hogy *létezik séta* a G gráf x és y csúcspontjai között.

Megjegyzés: ha nem egyértelmű, hogy melyik gráfról van szó, pontosíthatunk a következő jelöléssel: $x \sim_g y$.

Lemma: ~ egy ekvialenciareláció.

Biz.: az ekvialenciareláció olyan reláció ami refexív, szimmetrikus és tranzitív. Az első két tulajdonság (reflexív és szimmetrikus) nyilvánvalóan teljesül ~ -re. Így elég azt belátni, hogy tranzitív: ha x~y és y~z akkor x~z. Mivel x és y között van séta és az y és z között is, az a megérzésünk,ha egymás után „kötnénk" a két sétát,akkor sétát kapunk az x és z csúcsok között is. Ezzel a módszerrel biztosan kapnánk egy sétát,de ez nem biztos hogy egyben út is. A bizonyításhoz egy másik lemma is tartozik.

Lemma: Egy S_{xy} sétához létezik olyan T út x és y között, amelyre igaz:

$E(T) \subseteq E(S)$

Lemma: Ha u~v és (és $u \neq v$) , akkor közöttük létezik n-1 vagy n-2 hosszú séta ahol n= |V|.

Biz.: A sétát válasszuk útnak és az utolsó élen oda-vissza lépkedve felnövelhetjük az út hosszát n-1 vagy n-2-re.

Példa: a két hossz alternatívája nem hagyható el:

$a \in A$ és $f \in F$ között (ha van,akkor) minden öf. séta hossza páratlan

$a \in A$ és $a' \in A$ között (ha van,akkor) minden öf séta hossza páros.

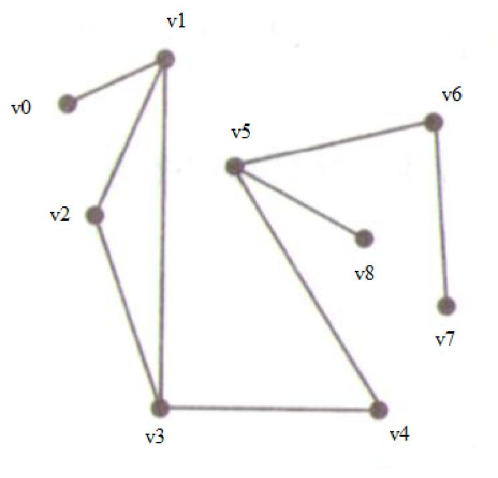
Definició: egy H gráfot a G gráf *részgráfjának* nevezünk, ha igaz rá:

$$E(H) \subseteq \{ e \in E(G) : V_e \subseteq V(H) \}$$ és

$$I(H) \subseteq I(G) \cap (V(H)) \times (E(H))$$

Azaz H megkapható G-ből élek és csúcsok elhagyásával (csúcs elhagyása esetén a rá illeszkedő éleket is elhagyjuk).

Definició: Egy G gráf összefüggő, ha bármely két G-beli csúcs ~ relációban van egymással. Példa összefüggő gráfra:



Megjegyzés: ha egy gráf összefüggő, akkor igaz rá, hogy bármely két pontja között létezik séta.

Állítás: Egy tetszőleges G gráf csúcsainak halmazát felbonthatjuk olyan csoportokra, amelyekre teljesül:

(i) a különböző csoportok között nem halad él
(ii) a csoportok pontjai a közöttük haladó élekkel összefüggőek

Megjegyzés: Az (ii) pontba szereplő részgráfokat komponenseknek nevezzük.

4.Gráfok összefüggősége és a szomszédsági mátrix hatványai

A gráfok összefüggésével kapcsolatosan előforduló problémák:

- egy adott gráf összefüggő-e?

- adjuk meg a G gráf lehetséges komponenseit!

Az ehhez hasonló problémákat mélységi vagy szélességi kereséssel oldhatóak meg. Mi egy más megközelítést ismertetünk.

Adott G hurokél nélküli gráf. Írjuk le a ~ relációt!

0.lépés: $n=|V| \rightarrow n-1, n-2$

1.lépés: a, A^{n-2} és A^{n-1} kiszámolása (lásd 2.lépés)

b, $A^{n-2}+A^{n-1} = A^{n-2} * (I+A)$

2.lépés: $(A^{n-2}+A^{n-1})uv$? 0 $>0 = u \sim v$

$= 0 = u \neq v$

Korrektség bizonyítása:

A_{uv} egy interpretációja az uv 1 hosszú séták száma. Általában $(A^k)_{uv}$=k hosszú séták száma.

Biz.: k=2 esetén a mátrixszorzás definíciója alapján k>=3 esetén teljes indukció.

$(A^{n-2}+A^{n-1})_{uv} > 0 \Leftrightarrow (A^{n-2})_{uv} > 0$ vagy $(A^{n-1})_{uv} > 0$

$\Leftrightarrow \exists$ n-2 vagy n-1 hosszú uv út

$\Leftrightarrow u \sim v$

Implementáció:

$A \rightarrow A^2 \rightarrow A^4 \rightarrow \ldots \rightarrow A^k$

(1) ismételt szorzás , szorozhatjuk az eredményt önmagával

$A^{n-2} = A^{2a1+2a2+\dots} <= 2*\log_2 (a)$ db mátrixszorzás (az A kitevőjében levő kifejezés az n-2 2-es számrendszerben való felírása

(2) AG lehet Boole mátrix

$A_G * A_G$ $\leftarrow$ Boole aritemtika, azaz * $\leftrightarrow$ *és* művelet

\+ $\leftrightarrow$ *vagy* művelet