Gráfelmélet/Diszkrét Matematika MSc hallgatók számára

13. Előadás

Előadó: Hajnal Péter
Jegyzetelő: Hajnal Péter 2009. december 7.

Gráfok sajátértékei

Definíció. Egy G egyszerű gráf sajátértékei az A_G szomszédsági mátrixának sajátértékei.

A szomszédsági mátrix egy $V(G) \times V(G)$ típusú mátrix, azaz sorai és oszlopai is a csúcsokkal vannak azonosítva. A felmerülő vektorokra is a komponensek és csúcsok azonosítottak, azaz felfoghatók mint a csúcshalmazon értelmezett függvények. G lerajzolása segítségével ábrázolhatunk is egy vektort: a v csúcsnak megfelelő komponens helyén álló számot a v csúcsot reprezentáló „karika" mellé írjuk. Egy $v \in \mathbb{R}^{V(G)}$ esetén az $A_G \cdot v$ vektort úgy kapjuk, hogy minden csúcshoz a szomszédaihoz v által hozzárendelt értékeket összegezzük. A v nem-nullvektor akkor lesz sajátvektor, ha ezen operáció során minden komponens ugyanazzal a λ számmal szorzódik. λ a v sajátvektorhoz tartozó sajátérték.

A fenti leírás úgy írja le egy gráf egy sajátértékét, hogy kikerüli a lineáris algebrai tanulmányainkra való hivatkozást. Persze az algebrai eredmények számunkra is nagyon hasznosak lesznek. A következő tételban összefoglaljuk a számunkra legfontosabb eredményeket.

1. Tétel. *Legyen G egy egyszerű gráf ($|V(G)| = n$). Ekkor*

(i) G n darab (multiplicitással számolt) sajátértéke valós.

(ii) G sajátértékei a $[-D(G), D(G)]$ intervallumba esnek.

(iii) Ha G összefüggő, akkor a maximális sajátérték egyszeres és hozzá választható pozitív komponensű sajátvektor.

(iv) $D(G)$ akkor és csak akkor sajátérték, ha G reguláris (azaz $D(G)$-reguláris). d-reguláris gráf esetén a d sajátérték multiplicitása a komponensek számával azonos.

(v) $-D(G)$ akkor és csak akkor sajátérték, ha G reguláris (azaz $D(G)$-reguláris) páros gráf. d-reguláris páros gráf esetén a $-d$ sajátérték multiplicitása a komponensek számával azonos.

Bizonyítás. (i) A_G szimmetrikus mátrix, így jól ismert, hogy sajátértékei valósak.

(ii) Legyen v egy sajátvektor. Legyen $v(x)$ a legnagyobb abszolútértékű komponense, amiről feltehető, hogy $|v(x)| > 0$. Nézzük meg az $(A_g \cdot v)(x)$ komponenst. Ez legfeljebb $D(G)$ darab legfeljebb $v(x)$ abszolútértékű számösszege, azaz az eredmény legfeljebb $D(G)$-szerese és legalább $-D(G)$-szerese $v(x)$-nek.

(iii) Ez a nehéz része a tételnek. Az állítás a Frobenius—Perron-elmélet alaptételéből adódik. Itt nem bizonyítjuk.

(iv) A fenti gondolatmenet azt is adja, hogy ha $D(G)$ sajátérték, akkor a fent választott x csúcsnak $D(G)$ szomszédja van és v mindegyiken $v(x)$-et vesz fel értékül. Ha G összefüggő, akkor ebből adódik, hogy mindegyik csúcsnak $D(G)$ a foka és a sajátvektor mindegyik komponense ugyanaz (az $(1, 1, \ldots, 1)$ vektor többszöröse). Továbbgondolva azt kapjuk, hogy a $D(G)$ sajátértékhez általában G-nek $D(G)$ regulárisnak kell lenni, a megfelelő sajátvektoroknak komponensenként konstanst kell felvenni. Így a $D(G)$ sajátértékhez tartozó sajátvektorok alterének dimanziója a komponensek száma (a $D(G)$ sajátértékhez tartozó sajátvektorok alterének egy bázisát kapjuk, ha minden komponensre vesszük azt a vektort, ami a komponens csúcsaihoz 1-et, az összes többi csúcshoz 0-t rendel).

(v) hasonlóan elemi módon belátható, ezt az olvasóra bízzuk. ■

Jelölés. Legyen G egy gráf. G sajátértékeinek rendezett sorozata

$$\lambda_0 \geq \lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \ldots \geq \lambda_{n-1}.$$

Ha G összefüggő, akkor

$$\lambda_0 > \lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \ldots \geq \lambda_{n-1}.$$

Ha G összefüggő és d-reguláris, akkor

$$d > \lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \ldots \geq \lambda_{n-1}.$$

Példa. Legyen $G = K_n$, az n pontú teljes gráf. Ekkor a sajátértékek $n-1$, -1, $-1, -1, \ldots, -1$. $n-1$-hez tartozó egyik sajátvektor a $(1, 1, 1, \ldots, 1)$ vektor. -1-hez tartozó sajátvektorok altere azon vektorokat tartalmazza, amelyek komponenseinek összege 0.

Példa. Legyen $G = C_n$, az n pontú körgráf. A legegyszerűbb megadni a sajátvektorokat. Ennek legegyszerűbb megadása komplex számokon keresztül történik. Legyen ϵ_s az $x^n - 1 = 0$ egyenlet s-edik megoldása (az s-edik egységgyök, $\epsilon_s = \cos\left(s \cdot \frac{2\pi}{n}\right) + \sin\left(s \cdot \frac{2\pi}{n}\right) \cdot i$). A v_s sajátvektor legyen az a vektor, ami az x_t csúcshoz ϵ_s^t-t rendel. Azaz a csúcsokhoz egy záródó geometriai sorozatot rendelünk (itt hasznos a komplex számok használata). Nyilván a v_s sajátvektorhoz tartozó sajátérték $\epsilon_s + \frac{1}{\epsilon_s}$.

Példa. Legyen S_n az n pontú (és így $n-1$ élű) csillag. Legyen c a középpontja (amely az összes többi csúccsal összeskötött). Ekkor azon vektorok, amelyek c-hez 0-t, a többi ($n-1$ darab) csúcshoz pedig 0 összegű számokat rendelnek sajátvektorok egy $n-2$ dimenziós alterét alkotját $\mathbb{R}^n$-nek. Ezen sajátvektorok mindegyikéhez a 0 sajátérték tartozik. Egy további sajátvektor az, ami c-hez $\sqrt{n-1}$-et rendel, minden más csúcshoz $n-1$-et. A megfelelő sajátérték $\sqrt{n-1}$. Ha az utóbbi vektorban az 1-eseket -1-re cseréljük szintén sajátvektort kapunk, a $-\sqrt{n-1}$ sajátértékhez tartozót. tehát a sajátértekek: $\sqrt{n-1}, 0, 0, \ldots, 0, -\sqrt{n-1}$ (a 0 multiplicitása $n-2$).

Megjegyzés. Ez utóbbi példa volt az első nem reguláris példa. Itt $D(G)$ és λ_1 különbözik. Látható, hogy a különbség lényeges, a nagyságrendekben is jelentkezik.

Lássuk az első eredményt, ami gráfok sajátértékevel kapcsolatos.

2. Lemma. *Legyen G egy összefüggő gráf. Legyen λ_0 a maximális sajátérték. Legyen v_0 a maximális sajátértékhez tartozó pozitív komponensű sajátvektor. Legyen π_0 a csúcsok azon sorrendje, ahol a v_0 vektor komponensei csökkenőek. Ekkor minden x csúcsra $d_\pi^{elore}(x) \leq \lambda_0$.*

Bizonyítás. $\lambda_0 \cdot v_0(x)$ a v_0 vektor x szomszédaihoz tartozó komponenseinek összege. Ebben az összegben $d_\pi^{elore}(x)$ darab tag értéke legalább $v_0(x)$, a többi tag pozitív. Ebből az állítás adódik. ■

3. Következmény (Hoffman-tétel). *Egy G egyszerű gráfra $\chi(G) \leq \lambda_0 + 1$.*

A becslés a szinte triviális $\chi(G) \leq D(G) + 1$ becslés egy fontos élesítése.

⋆

A sajátértékek egy másik alkalmazása a Moore-gráfokkal kapcsolatos.

4. Lemma. *Az alábbiakban egyszerű gráfok három tulajdonságát soroljuk fel.*

(i) G minden foka legalább d, girth-e legalább $2\gamma + 1$,

(ii) G minden foka legfeljebb d, átmérője legfeljebb γ,

(iii) G pontjainak száma $1 + d + d(d-1) + d(d-1)^2 + d(d-1)^3 + \ldots + d(d-1)^{\gamma-1}$.

Ekkor a fenti három tulajdonság közül bármelyik kettő magával hozza a harmadik tulajdonságot.

Bizonyítás. Ha egy egyszerű gráfban minden fok legalább d, akkor egy x csúcs szomszédai legalább d-en vannak. Másodszomszédai (kettő távolságra lévő pontok) száma már változatos lehet. Ha azonban a girth legalább 5, akkor a szomszédok új szomszédai legalább d darab diszjunkt, legalább $d-1$ elemű csúcshalmazt adnak. Így a másodszomszédok száma legalább $d(d-1)$. Ha a girth legalább $2\gamma + 1$, akkor a legfeljebb γ távolságra lévő csúcsok száma, így az összes csúcs száma hasonlóan becsülhető. Kapjuk, hogy $|V| \geq 1+d+d(d-1)+d(d-1)^2+d(d-1)^3+\ldots+d(d-1)^{\gamma-1}$.

Ha egy egyszerű gráfban minden fok legfeljebb d, akkor egy x csúcs szomszédai legfeljebb d-en vannak. Másodszomszédai (kettő távolságra lévő pontok) száma legfeljebb $d(d-1)$. Hasonlóan becsülhető a legfeljebb γ távolságra lévő csúcsok száma, így ha az átmérő γ, akkor az összes csúcs száma. Kapjuk, hogy $|V| \leq 1 + d + d(d-1) + d(d-1)^2 + d(d-1)^3 + \ldots + d(d-1)^{\gamma-1}$.

Ha (i) és (ii) is tudott, akkor mindkét becslés ismert és együtt (iii)-t kapjuk.

Ha (iii) mellett (i) vagy (ii) ismert, akkor tudjuk, hogy a fenti becslések élesek. Ennek részletes analízise adja a három tulajdonság közül a hiányzót. ■

Definíció. A G egyszerű (d, γ)-Moore-gráf, ha a fenti három tulajdonsága (azaz a fenti kettőből bármelyik kettő) megvan, továbbá $d, \gamma \geq 2$.

Nyilvánvaló, hogy a $d = 1$ eset érdektelen, a $\gamma = 1$ eset triviális. Az érdekes példák sora rövid. Erre később magyarázatot kapunk.

Példa. A $2\gamma + 1$ hosszú körök $d = 2$ paraméterrel (d, γ)-Moore-gráfok.

Példa. A Petersen-gráf $(3,2)$-Moore-gráf.

5. Tétel. *A* $(d,2)$*-Moore-gráfok csak* $d = 2, 3, 7, 57$ *esetén létezhetnek.*

Bizonyítás. Legyen G egy d-reguláris Moore-gráf, szomszédsági mátrixát jelölje A. (A egy $n \times n$ méretű mátrix, ahol $n = 1 + d + d(d-1) = d^2 + 1$.)

Két összekötött csúcsnak nincs közös szomszédja (a girth 5, azaz nincs háromszög gráfunkban). Két nem összekötött csúcsnak van közös szomszédja (az átmérő 2), de csak egyetlen egy (a girth 5, azaz nincs négy hosszú körünk). Ezek a feltételek a szomszédsági mátrix segítségével az

$$A^2 + A = J + (d-1)I$$

feltétellel írható le, ahol J a csupa 1-et tartalmazó mátrix, míg I az egységmátrix (minden mátrixunk mérete $n \times n$).

Legyen v egy sajátvektor, a λ sajátértékkel. $\lambda = d$ (1 multiplicitású sajátvektor) esetén v lehet a csupa 1-et tartalmazó vektor. Tegyük fel, hogy $\lambda < d$. Ekkor v merőleges a csupa 1-est tartalmazó vektorra. A felírt mátrix egyenlőséget szorozzuk meg v-vel: $(A^2 + A)v = (J + (d-1)I)v$, $A(Av) + Av = Jv + (d-1)Iv$, azaz $A(\lambda v) + \lambda v = (d-1)v$, $\lambda^2 v + \lambda v = (d-1)v$. A v egy nem-nullvektor, így

$$\lambda^2 + \lambda = d - 1.$$

Ebből λ kifejezhető, kétféle értéket vehet fel: $\frac{-1 \pm \sqrt{4d-3}}{2}$.

A három lehetséges sajátérték multiplicitással: d, multiplicitása 1; $\lambda_1 = \frac{-1-\sqrt{4d-3}}{2}$, multiplicitása μ_1; $\lambda_2 = \frac{-1+\sqrt{4d-3}}{2}$, multiplicitása μ_2. Tudjuk, hogy az n darab (multiplicitásokkal számolva) sajátértékek összege az A mátrix nyoma, azaz 0. Szükséges megállapításainak a továbbaikban szétágaznak.
1. eset: λ_1 (és így λ_2 is) irracionális. Ekkor a sajátértékek összege csak úgy lehet 0/racionális, ha $\mu_1 = \mu_2 = \frac{n-1}{2}$. Ekkor $d - \frac{n-1}{2} = 0$. Tudva, hogy $n = d^2 + 1$ a d/n paraméterek egy másodfokú egyenletnek tesznek eleget. Ebből $d = 2$ ($n = 5$).
2. eset: λ_1 (és így λ_2 is) racionális. Ekkor $4d - 3$ (páratlan) négyzetszám, $4d - 3 = (2\delta + 1)^2$ Ekkor $\lambda_1 = -1 - \delta$, $\lambda_2 = \delta$. A multiplicitások kiszámolhatók a $1 \cdot d + \mu_1 \cdot \lambda_1 + \mu_2 \cdot \lambda_2 = 0$ és $1 + \mu_1 + \mu_2 = n$ összefüggésből. Egy kis technikai számolás után a

$$32\mu_1 = 16\delta^4 + 24\delta^3 + 36\delta^2 + 30\delta + 7 + \frac{15}{2\delta + 1}$$

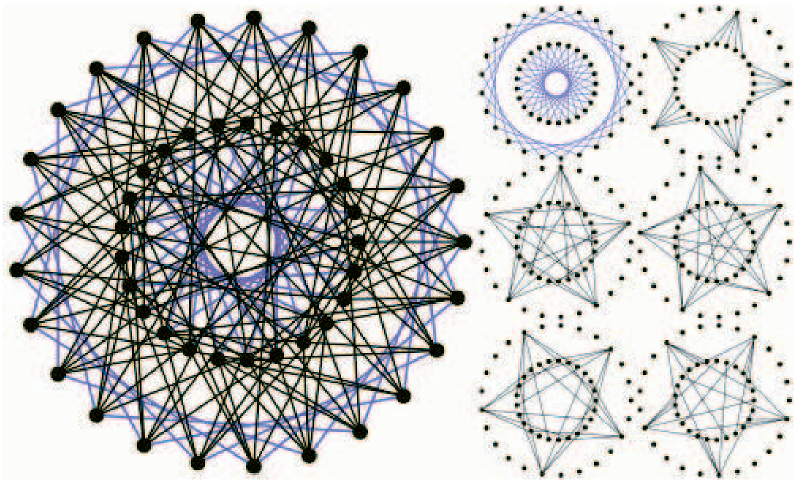
összefüggéshez jutunk. Azaz $\frac{15}{2\delta+1}$ egész. Mivel $2\delta + 1$ egynél nagyobb, így értéke $3, 5$ vagy 15. A három lehetőség $d = 3, 7, 5, 7$ lehetőségeknek felel meg. Így kapjuk a tétel bizonyítását. ∎

A $d = 2$ paraméter érték realizálható az 5-hosszú körrel, a $d = 3$ érték a Petersen-gráffal. Könnyen belátható, hogy más ilyen paraméterű gráf nincs is. A $d = 7$ értékhez is tartozik gráf (egyetlen) az úgy nevezett Hoffman—Singleton-gráf (1. ábra).

Ennek tárgyalása túl megy előadásunk keretein. A $d = 57$ eset realizálhatósága mind mai napig megoldatlan probléma.

⋆

Egy utolsó alkalmazás az úgy nevezett „barátság tétel”.

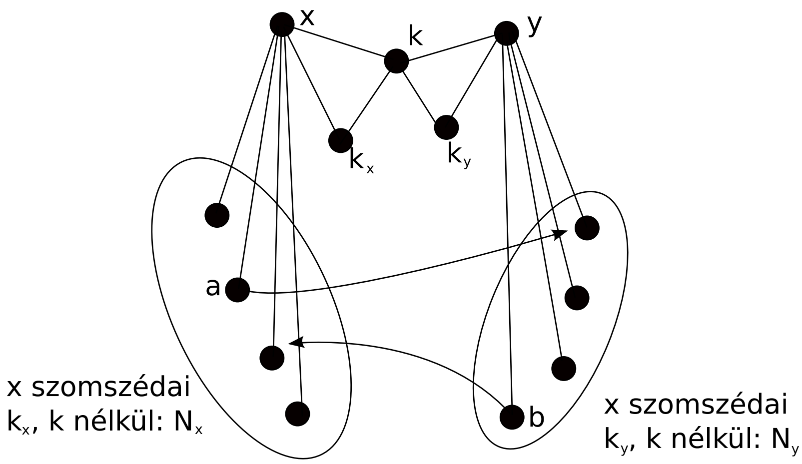


1. ábra. A Hoffman—Singleton-gráf/az egyetlen (7,2)-Moore gráf és néhány „szelete”

6. Tétel (Barátság tétel). *Legyen G egy gráf, amelyben bármely két pontnak pontosan egy közös szomszédja van. Ekkor G független háromszögekből nyerhető egy pont menti összeragasztással.*

Megjegyzés. A tételben leírt gráfokat szélmalom gráfoknak nevezik.

Bizonyítás. Először belátjuk, ha gráfunkban x és y két különböző nem összekötött csúcs, akkor fokuk azonos. Tudjuk, hogy x és y csúcsoknak pont egy közös szomszéduk (legyen ez k) van. x és k egyetlen közös szomszédja legyen k_x. míg y és k egyetlen közös szomszédja legyen k_y. Legyen N_x az x pont k-tól és k_x-től különböző szomszédainak halmaza. Legyen N_y az y csúcs k-tól és k_y-tól különböző szomszédainak halmaza.



2. ábra.

$N_x \cup N_y$ által feszített gráfban minden $a \in N_x$-nek pontosan egy szomszédja van N_y-ban (a és y egyetlen közös szomszédja). Illetve fordítva $b \in N_y$-nek pontosan egy szomszédja van N_x-ben (b és x egyetlen közös szomszédja). Az N_x és N_y közötti élek egy bijekciót létesítenek N_x és N_y között, azaz $|N_x| = |N_y|$. Ebből $d(x) = |N_x|+2 = |N_y| + 2 = d(y)$ adódik.

Ezek után két esetünk van:
1. eset: A nem összekötöttség nem összefüggő gráfot definiál. Ekkor a csúcsok halmazának alkalmas $J\dot{\cup}B$ kettő nem-üres halmazba való osztályozására az összes $j \in J$ csúcs szomszédos az összes $b \in B$ csúccsal. Ha $|J|, |B| \geq 2$, akkor bámely két $j, j' \in J$ csúcsnak több mint egy közös szomszédja van (B összes eleme) Így valamelyik osztály egy elemű. Mondjuk $J = \{j\}$. Ekkor j minden más csúccsal szomszédos. Könnyű látni, hogy G egy j középpontú szélmalom.
2. eset: A nem összekötöttség összefüggő gráfot definiál. Ekkor G reguláris. Legyen d a közös fokszám. Ekkor

$$A^2 = J + (d-1)I.$$

Ahogy az előző tételnél itt is legyen v egy sajátvektor λ sajátértékkel. Ha $\lambda = d$, akkor v-t válasszuk a csupa 1 komponensű j vektornak. Az 1 multiplicitású d sajátértéktől különböző λ esetén v merőleges j-re. Így egyenlőségünket v-vel szorozva a következő λ-ra vonatkozó egyenlőséghez jutunk:

$$\lambda^2 = d - 1.$$

A d-n túli két sajátérték multiplicitása legyen μ_1 ($\sqrt{d-1}$-é) és μ_2 ($-\sqrt{d-1}$-é). A korábbi tétel bizonyításának mintájára adódik, hogy kevés alkalmas d létezik. Esetünkben csak $d = 2$ az egyetlen lehetőség. Ekkor gráfunk egyetlen háromszög. A részletek kidolgozása az olvasóra marad. ■

⋆

A barátság tétel szoros kapcsolatban van erősen reguláris gráfokkal.

Definíció. Egy gráf erősen reguláris, ha reguláris (d a közös fok), továbbá bármely összekötött csúcspárnak ugyanannyi közös szomszédja van (d_s) és bármely két nem összeskötött csúcspárnak ugyanannyi közös szomsédja van (d_n).

Megjegyezzük, hogy egy gráf akkor és csak akkor erósen reguláris, ha komplementere is az.

A barátság tétel lényeges része azt mondja ki $d_s = d_n = 1$ paraméterekkel egyetlen erősen reguláris gráf van (az egy pontú triviális példán túl) a három pontú teljes gráf. Egy másik példa erősen reguláris gráfokra a $(d, 2)$-Moore-gráfok. Láttuk, hogy ezek is igen sporadikus példákat adnak. Erősen reguláris gráfokra példák konstruálása, karakterizációk bizonyítása ma is komoly kihívást jelentenek a kutatóknak.

Végül néhány klasszikus erősen reguláris gráfot írunk le. A d, d_s, d_n paraméterek kiszámolása (az erósen regularitás definíciójának ellenőrzése) az olvasóra marad.

Példa. $L(K_n)$ az n pontú teljes gráf élgráfja. (Az élgráf csúcsait az élek adják, köztük a szomszédság a 'közös végponttal redelkezik' reláció.) Természetesen $L(K_n)$ komplementere is erősen reguláris. Speciálisan $L(K_5)$ komplementere, a Petersen-gráf is.

Példa. Legyen $PG(3, q)$ a q elemű $\mathbb{F}_q$ test feletti projektív tér. $PG(3, q)$ egyeneseit egy gráf csúcsainak véve, a szomszédságot a 'metsző'relációnak definiálva egy erősen reguláris gráfot kapunk.

Példa. Legyen p egy $4k+1$ alakú prím. P_p Paley-gráf csúcshalmaza $\mathbb{F}_p$. Két $i, j \in \mathbb{F}_p$ csúcs akkor és csak akkor szomszédos, ha $i - j$ kvadratikus maradék.