Gráfelmélet/Diszkrét Matematika MSc hallgatók számára

12. Előadás

Előadó: Hajnal Péter
Jegyzetelő: Hajnal Péter 2009. november 30.

Wagner-tétel bizonyítása

1. Tétel (Wagner-tétel). *Egy G gráf akkor és csak akkor síkgráf, ha nem tartalmaz K_5, illetve $K_{3,3}$ minort.*

Bizonyítás. Csak a nem triviális irányt kell indokolnunk. Azaz azt, hogy ha G nem tartalmaz K_5 és $K_{3,3}$ minort, akkor szépen lerajzolható a síkra. Ez $|V| \leq 5$ esetben könnyen megtehető. A hurokélek és egy lerajzolt él mellé egy párhuzamos él lerajzolása is könnyen megtehető. Feltesszük, hogy G legalább 5 csúcsú egyszerű gráf.

Az alábbi bizonyítás felfogható indukciós bizonyításként, illetve egy rekurzív algoritmus leírásaként is. A kisebb esetek kezelését indukciós állításra hivatkozásként vagy rekurzív hívásként kell értelmezni. Mi az algoritmikus nyelvezetet kezeljük.

1. eset: G nem összefüggő. Ekkor G felfogható mint G_1 (egyik komponens) és G_2 (összes többi komponens) gráfok egymásmellé helyezésével nyert gráf. G_1 és G_2 sem tartalmaz K_5, illetve $K_{3,3}$ minort. Rekurzív lerajzolásuk könnyen összeilleszthető G egy szép lerajzolásává.

2. eset: G összefüggő, de nem 2-szeresen összefüggő. Ekkor alkalmas z elvágó csúcsra $G - z$ több komponensből áll. Legyen G_1 az egyik komponens hozzáadva z-t és a hozzá vezető éleket. Az összes több komponens z-vel (és az odavezető élekkel) bővítve legyen G_2. Így G felfogható mint G_1 és G_2 gráfok z menti összeragasztásával nyert gráf. G_1 és G_2 sem tartalmaz K_5, illetve $K_{3,3}$ minort. Rekurzív lerajzolásuk könnyen deformálható úgy, hogy a felső (vagy alsó) nyilt félsíkra történjen kivéve z-t, ami a félsík határára legyen lerajzolva. Így a két lerajzolás összeilleszthető G egy szép lerajzolásává.

3. eset: G 2-szeresen összefüggő, de nem 3-szorosan összefüggő. Ekkor alkalmas $\{z, z'\}$ elvágó csúcspárra $G - \{z, z'\}$ több komponensből áll. Legyen G_1 az egyik komponens hozzáadva z, z'-t (az esetleges köztük vezető éllel) és a hozzá vezető éleket. Az összes több komponens z, z'-vel (és az esetleges köztük vezető éllek, továbbá az odavezető élekkel) bővítve legyen G_2. Így G felfogható mint G_1 és G_2 gráfok z, z' menti összeragasztásával nyert gráf. G_1 és G_2 sem tartalmaz K_5, illetve $K_{3,3}$ minort.

Ha zz' él, akkor rekurzív lerajzolásuk könnyen deformálható úgy, hogy a felső (vagy alsó) nyilt félsíkra történjen kivéve a zz' élt, ami a félsík határára (egyenes szakasszal) legyen lerajzolva. Így a két lerajzolás összeilleszthető G egy szép lerajzolásává.

Ha zz' nem él, akkor Legyen $\hat{G}_1$ és $\hat{G}_2$ az a két gráf amelyeket G_1 és G_2-ből kapunk a zz' él hozzáadásával. G 2-szeres összefüggése miatt könnyű látni., hogy G_2 és G_1 is tartalmaz zz' utat. Így $\hat{G}_1$ és $\hat{G}_2$ minorja (sőt topológikus részgráfja is)

G-nek. Speciálisan $\hat{G}_1$ és $\hat{G}_2$ sem tartalmaz K_5, illetve $K_{3,3}$ minort. Így rekurzívan lerajzolhatók a síkra, amely lerajzolások könnyen deformálhatók úgy, hogy a felső (vagy alsó) nyilt félsíkra történjen kivéve a zz' élgörbét, ami a félsík határára (egyenes szakasszal) legyen lerajzolva. A két lerajzolás összeilleszthető, amiből kivéve a zz' élt G egy szép lerajzolását kapjuk.

4. eset: G 3-szorosan összefüggő. Először megmutatjuk, hogy található olyan e él, amely két végpontja elhagyásával egy 2-szeresen összefüggő gráfhoz jutunk.

Induljunk ki egy tetszőleges $e = xy$ élből és tegyük fel, hogy ez nem bizonyítja az állításunk, azaz $G - \{x, y\}$-ban van egy z elvágó csúcs. Legyenek $C_1, C_2, \ldots$ $(G - \{x, y\}) - z$ komponensei. Az indexelést válasszuk úgy, hogy a komponensek közül C_1-nek legyen legkevesebb csúcsa. G 3-szorosan összefüggő, így $G - \{x, y\}$, $G-\{z, y\}$ és $G-\{x, z\}$ is összefüggő. Azaz x-ből, y-ból és z-ből is vezet él az összes $C_1, C_2, \ldots$ komponensekhez. Legyen $\tilde{e} = zu$ egy olyan él, ahol u a C_1-be esik. Ha $\tilde{e} = \tilde{x}\tilde{y}$ $(\tilde{x} = z)$ bizonyítja állításunk, akkor készen vagyunk. Ha nem, akkor célunk belátása, hogy az $\tilde{e}$ és az ebből nyert $\tilde{z}$ elvágó csúcs olyan párt alkot, amelyekből nyert $\tilde{C}_1$ komponens kevesebb csúcsú mint C_1. Eljárásunk ismétlésével a kívánt él megkapható.

Valóban tegyük fel, hogy $G - \{\tilde{x}, \tilde{y}\}$ gráfban $\tilde{z}$ elvágó csúcs. Könnyű látni, hogy $\widetilde{z}$ nem lehet sem x, sem y. Az összefüggő $G - \{\widetilde{x}, \widetilde{z}\} = G - \{z, \widetilde{z}\}$ gráfban egy C_i és C_j közti út egy ideig C_i-ben halad, majd $\{x, y\}$-be lép be, befejezése pedig $\{x, y\}$-ból C_j-be lép és ott is marad. Ha a $\widetilde{y} \in V(C_1)$ csúcs elhagyásával szétesik a gráf, akkor az egyik komponens ponthalmazának $V(C_1)$ valódi részhalmazának kell lennie. Ezzel állításunk adódik.

A megfelelő e él megtalálása után vegyük G/e-t. Nyilvánvalóan nem tartalmaz K_5 és $K_{3,3}$ minort, azaz feltehető, hogy szépen lerajzolt a síkra. Ebben a lerajzolásban ott van $G-\{x, y\}$ lerajzolása is. Ez kétszeresen összefüggő, így tartományainak határai (gráfelméleti) körök. Egyik tartományban (legyen ez τ) ott van G/e-ben az összehúzott e élt reprezentáló $[e]$ csúcs pontja. Ennek szomszédságába eső csúcsokat τ határán lévő pontok reprezentálják. G-be visszatérve kapjuk $G - \{x, y\}$ lerajzolását egy τ tartománnyal úgy, hogy az N_x és N_y csúcshalmazok τ hatarára essenek a lerajzolásban, ahol N_x az x csúcs y-tól különböző szomszédai, míg N_y az y csúcs x-től különböző szomszédai (így $N_x \cup N_y$ az $[e]$ csúcs szomszédai G/e-ben.)

A következő kombinatorikus lemma vezet el a bizonyítás befejezéséhez. Ehhez azonban vezessünk be egy fogalmat. Legyen $\mathbb{S}^1$ egy geometriai kör. K és P a kör két véges részhalmaza (kék, illetve piros pontok). Azt mondjuk, hogy K és P elválasztható, ha van olyan húrja a körnek, amelynek h egyenese által meghatározott két zárt félsík közül az egyik K-t, a másik P-t tartalmazza.

Segédlemma. Legyen $\mathbb{S}^1$ egy geometriai kör és K és P a kör két véges részhalmaza. K és P akkor és csak akkor nem elválasztható, ha a következő két lehetőség valamelyike fennáll.
(i) Létezik olyan $K_0 \subset K$ és $P_0 \subset P$ két kételemű diszjunkt ponthalmaz, hogy $K_0 \cup P_0$ négy eleme a kör kerületi sorrendjében piros-kék-piros-kék sorrendben azaz K_0 két eleme által meghatározott húr és P_0 két eleme által meghatározott húr metsző,
(ii) $P = K$, továbbá $|P| = |K| = 3$.

A bizonyítás befejezésében alkalmazzuk a lemmát. Vegyük τ határát (ez játsza $\mathbb{S}^1$ szerepét), és azokat a pontjait, amik N_x és N_y csúcsait reprezentálják (ezek lesznek P, illetve K ponthalmazok).

A. eset N_x és N_y elválasztható. Ekkor az elválasztó húr egy λ görbe lesz, ami τ-t két tartományra osztja. Egyiknek (τ_x) határára esik N_x, a másiknak (τ_y) határára esik N_y. τ_x-ben felvehetünk egy új csúcsot és belőle N_x elemeihez, illetve λ közepéhez csillagszerűen (szépen lerajzolva) élgörbéket vezetünk (igazából λ középéig csak egy „fél-élgörbe" vezet). Ugyanezt τ_y-n belül is megtéve eljutunk G egy szép lerajzolásához.
B. eset N_x és N_y nem elválasztható. Ekkor a lemma alapján (i) vagy (ii) konfiguráció előáll. Könnyen látható, hogy (i) esetén $K_{3,3}$, (ii) esetén K_5 benne lesz G-ben minorként (sőt topologikus részgráfként is). ■

Érdemes a 3-szorosan összefüggő gráfok esete után leírt állítást külön is megfogalmazni.

2. Tétel. *Legyen G egy 3-szorosan összefüggő gráf, amelynek legalább* 5 *pontja van. Ekkor van benne olyan $e = xy$ él, hogy $G - \{x, y\}$ egy 2-szeresen összefüggő gráf.*

Könnyen látató, hogy ez a tétel egy ekvivalens (gyakran hasznosabb) alakja a következő.

3. Tétel. *Legyen G egy 3-szorosan összefüggő gráf, amelynek legalább* 5 *pontja van. Ekkor van benne olyan e él, hogy G/e egy 3-szorosan összefüggő gráf.*

Az utóbbi alak igazolásához csak azt kell belátni, hogy bárhogy hagyunk el két pontot G/e nem esik szét komponensekre. Ha az elhagyott $\{u, v\}$ csúcspárban nincs ott az $[e]$ csúcs — amely az e él összehúzásával keletkezett — akkor $G/e - \{u, v\} = (G - \{u, v\})/e$ alapján egyszerű az állítás. Ha pedig $u = [e]$, akkor $G/e - \{[e], v\} = (G - \{x, y\}) - \{v\}$ alapján vagyunk készen.
Bizonyításunknak további hozadékai is vannak. Kis technikai nehézségek legyőzésével a következő két tétel könnyen adódik.

4. Tétel (Tutte-tétel). *Ha G egyszerű, 3-szorosan összefüggő síkgráf, akkor lerajzolható úgy, hogy élgörbéi szakaszok legyenek és mindegyik korlátos tartományát konvex sokszög határolja.*

A bizonyításhoz $G - \{x, y\}$ lerajzolásában óvatosan kell visszahelyezni az x és y csúcsokat a rájuk illeszkedő élekkel. Ennek technikai kidolgozását az érdeklődő olvasóra bízzuk.

5. Tétel (Fáry-tétel). *Ha G egyszerű síkgráf, akkor lerajzolható úgy a síkra úgy, hogy minden élgörbéje szakasz legyen.*

A bizonyításhoz a rekurzív lerajzolások deformációinál és összeillesztéseinél kell óvatosnak lennünk. Ennek technikai kidolgozását az érdeklődő olvasóra bízzuk.

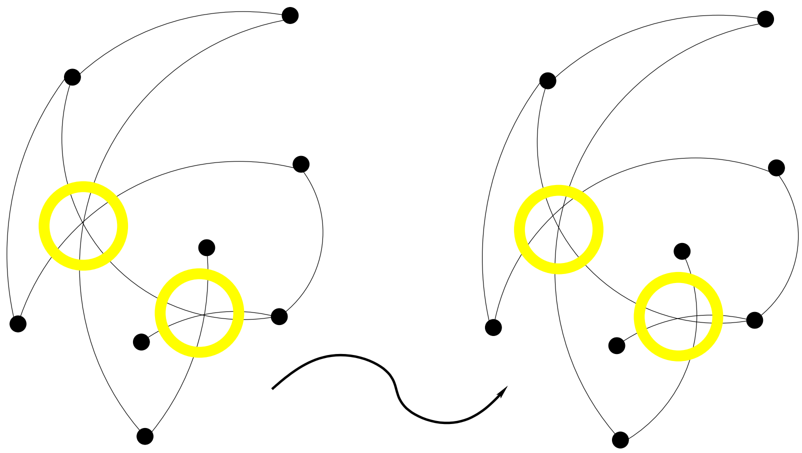
Gráfok metszési száma

A síkgráfok a gráfok egy fontos speciális osztályát alkotják. Sokszor azonban nem síkgráfokkal kell foglalkoznunk. Ilyenkor felmerül, hogy egy adott gráf "milyen messze van a síkgráfoktól". Ha valamilyen értelemben síkgráfhoz közelinek tekinthető egy gráf, akkor mire következtethetünk ebből a közelségből.

Igen sokféle módszer ismert oyan gráfparaméter bevezetésére, ami értelmezhető, mint síkgráfoktól vett távolság. Mi csak érintjük a témakört. Egyetlen egy paramétert vizsgálunk, a metszési számot.

Definíció. Egy ρ lerajzolást *normálisnak* nevezünk, ha nincs olyan pont, amin három vagy több élgörbe halad át.

Könnyű belegondolni, hogy nem lényeges, csak technikai feltételről van szó. Minden lerajzolás a normalitás megsértésének kis környezetében kissé deformálható úgy, hogy normálissá váljon (és közben a lerajzolás többi része változatlan maradjon).



1. ábra. A normalitás megsértése, illetve az ezt helyrehozó deformáció

Definíció. Legyen G egy ρ normális lerajzolással. A ρ lerajzolás metszési paramétere $x(G, \rho)$, a sík azon pontjainak száma, amelyben két élgörbe átmetszi egymást.

Egy gráf metszési számát úgy kapjuk, hogy a normális lerajzolásokra minimalizáljuk $x(G, \rho)$-t.

Definíció.

$$x(G) = \min\{x(G, \rho) : \rho \text{ normális}\}.$$

Példa. $x(G, \rho) = 0$ akkor és csak akkor teljesül, ha ρ a G gráf szép lerajzolása. $x(G) = 0$ akkor és csak akkor teljesül ha G síkgráf.

Példa. Könnyű ellenőrizni, hogy $x(K_5) = 1$ és $x(K_{3,3}) = 1$.

Észrevétel. Legyen R a G gráf egy részgráfja. Ekkor $x(R) \leq x(G)$. Sőt, ha ρ a G gráf egy lerajzolása, akkor ρ megszorítható R egy lerajzolására: $\rho|_R$. Ekkor $x(R, \rho|_R) \leq x(G, \rho)$. Legyen G egy n pontú egyszerű gráf. Ekkor $x(R) \leq x(K_n)$.

Észrevétel. Legyen ρ a következő lerajzolása K_n-nek: K_n csúcsait helyezzük konvex pozícióba, majd egy kicsit permutáljuk a csúcspontokat véletlenül. Minden él élgörbéje legyen egyenes szakasz. (A véletlen perturbálás szerepe az, hogy normális lerajzoláshoz jussunk.) Ekkor $x(K_n, \rho) = \binom{n}{4} \leq \frac{n^4}{24}$.

Mielőtt tovább haladunk egy technikai feltételt teszünk.

Észrevétel. Ha két, egy csúcsból induló élgörbe átmetszi egymást, akkor a lerajzolásunk nem optimális. Valóban legyen P egy pontja a síknak, amely felett $e = xy$ és $e' = xy'$ élgörbéje is elhalad. Ekkor Változtassuk meg e élgörbéjét: e' élgörbéjén haladjunk P-ig, majd innen az eredeti élgörbén jussunk el az y csúcsot reprezentáló pontig. Szimmetrikusan változtassuk meg e' élgörbéjét. A két új élgörbe összefut, de nem metszi át egymást egy kis deformációval az összefutás elkerülhető. Ezzel a metszési számot csökkentettük. Tehát optimális lerajzolásnál az egy csúcsban összefutó élek élgörbék nem metszik át egymást.

Ezekután belátjuk az alábbi alapvető becslést.

6. Tétel (Metszési lemma). *Legyen G egy egyszerű gráf, amelyre teljesül, hogy $|E| \geq 4|V|$. Ekkor*

$$x(G) \geq \frac{1}{64}\frac{|E|^3}{|V|^2}.$$

Bizonyítás. Legyen ρ egy optimális lerajzolása G-nek. Ekkor a metszési számot csak négy pontot párosító két él élgörbéjének metszései adják össze (lásd észrevétel).

A fenti mély becslés helyett először egy egyszerűbb, szinte triviális becslést igazolunk.

Legyen S egy olyan maximális (tovább nem bővíthető) élhalmaz, amely elemeit ρ úgy rajzolja le, hogy ne messék át egymást. S elemszáma biztos nem nagyobb mint $3|V|$. Azaz S komplementere legalább $|E| - 3|V|$ elemű. Ezen élek mindegyike metszi az S-beli élek valamelyikének élgörbéjét. Ebből a következő lemma adódik.

Segédlemma. G egy tetszőleges ρ lerajzolására

$$x(G, \rho) \geq |E(G)| - 3|V(G)|.$$

Ezek után legyen $\mathbf{G}_p$ az a véletlen gráf, amit G-ből kapunk úgy, hogy minden pontjáról függetlenül döntünk, hogy meghagyjuk-e, vagy eldobjuk. A meghagyás valószínűsége p (az eldobásé $1 - p$). A lemma alapján

$$x(\mathbf{G}_p, \rho) \geq |E(\mathbf{G}_p)| - 3|V(\mathbf{G}_p)|.$$

A két oldal (egy-egy a véletlen gráfok valószínűségi mezőjén értelmezett természetes számokat felvevő függvény) közötti egyenlőtlenség miatt a két oldal várható értékei közt is egyenlőtlenség áll fenn

$$\mathbb{E}(x(\mathbf{G}_p, \rho)) \geq \mathbb{E}(|E(\mathbf{G}_p)|) - 3\mathbb{E}(|V(\mathbf{G}_p)|),$$

azaz

$$p^4 x(G, \rho) \geq p^2|E(G)| - 3p|V(G)|.$$

A $p = \frac{4|V|}{|E|}$ választással adódik az állítás. ∎

A metszési lemma adja, hogy $x(K_n)$ helyes nagyságrendje n^4. $x(K_n)$ pontos értéke mind a mai napig nem ismert.

A metszési paraméter alkalmazása I. Kombinatorikus geometria

Legyen $\mathcal{P}$ egy ponthalmaz és $\mathcal{E}$ egy egyenes halmaz. Legyen $i(\mathcal{P}, \mathcal{E})$ a két halmaz közötti illeszkedések száma, azaz

$$i(\mathcal{P}, \mathcal{E}) = |\{(P, e) : P \in \mathcal{P},\ e \in \mathcal{E} \text{ és } e \text{ áthalad } P\text{-n}\}|.$$

Fő tételünk $i(\mathcal{P}, \mathcal{E})$ szám felső becslésével foglalkozik. Először azonban néhány konkrét ponthalmazt mutatunk, amelyek a felső becslés értékét is kidomborítják.

Konstrukció. Legyen $m \geq \binom{n}{2}$. Legyen $\mathcal{P}$ egy általános helyzetű, n elemű ponthalmaz. Továbbá legyen $\mathcal{E}$ a $\mathcal{P}$ által meghatározott $\binom{n}{2}$ darab egyenes kiegészítve $m - \binom{n}{2}$ darab további egyenessel, amelyek ¶ egy-egy pontján haladnák át. Ekkor $i(\mathcal{P}, \mathcal{E}) = 2\binom{n}{2} + m = \Theta(m)$.

Konstrukció. Legyen $n \geq \binom{m}{2}$. Legyen $\mathcal{E}$ m darab általános helyzetű egyenes és $\mathcal{P}$ a $\mathcal{E}$ által meghatározott $\binom{m}{2}$ metszéspont kiegészítve $n - \binom{m}{2}$ ponttal, amelyek csak egy $\mathcal{E}$-beli egyenesre illeszkednek. Ekkor $i(\mathcal{P}, \mathcal{E}) = 2\binom{m}{2} + n = \Theta(n)$.

Konstrukció. Legyen $n = \nu^2$, ahol ν egy pozitív egész. Vegyük az egész koordinátájú pontok egy $\nu \times \nu$ méretű résznégyzetét. Ezek a rácspontok alkossák $\mathcal{P}$-t. Legyen $\mathcal{E}$ az általuk meghatározott egyenesek halmaza.

A fenti konstrukcióban a pontok száma meghatározza az egyenesek számát is. Ez kiküszöbölhető. Legyen $\mathcal{N}_{\leq t}$ azon rácspontok (egész koordinátájú pontok) halmaza, amelyek koordinátái abszolút értékeinek összege legfeljebb t. Ha $t \in \mathbb{N}$, akkor a $(0, t)$, $(t, 0)$, $(0, -t)$ és $(-t, 0)$ pontok által meghatározott négyzetlap által lefedett rácspontok halmaza. Legyen $\mathcal{V}_{\leq t}$ azon vektorok halmaza, amelyek az origóból $\mathcal{N}_{\leq t}$ pontjaihoz vezetnek.

Konstrukció (Erdős Pál). Legyen $n = \nu^2$ egy pozitív egész, továbbá $t \leq \nu$ pozitív egész. Vegyük az egész koordinátájú pontok egy $\nu \times \nu$ méretű résznégyzetét. Ezek a rácspontok alkossák $\mathcal{P}$-t. Legyen $\mathcal{E}_{\leq t}$ azon egyenesek, amelyek valamely $\mathcal{P}$-beli ponton áthaladnak és választható $\mathcal{V}_{\leq t}$-beli irány-/normálvektoruk.

Az előző két példában csak egy pont- és egy egyeneshalmazt írtunk le. Mindkettőben a pontok száma könnyen látható, de az egyenesek száma, illetve a pont-egyenes illeszkedések számának meghatározása komoly kihívás. Ezt az analízist átugorjuk hiszen számelméleti meggondolásokat igényel. Egy másik probléma is felmerül. Az előző példákban a pontok száma négyzetszám és az egyenesek száma sem tetszőleges. A példa tetszőleges pont-, egyenesszámra való kiterjesztése természetes és egyszerű. Ezt és az analízis eredményének leírását az alábbiakban ismertetjük.

Konstrukció. Legyen n, m két tetszőleges egész, amelyre $n < m^2$ és $m < n^2$. Legyen ν^2 a legnagyobb, n-nél nem nagyobb négyzetszám. Legyen $\mathcal{P}$ a fenti példa ν^2 pontja tetszőlegesen kiegészítve $n - \nu^2$ ponttal. Legyen σ az a legnagyobb t természetes szám, amelyre $|\mathcal{E}_{\leq t}| \leq m$ és legyen $\mathcal{E}$ az $\mathcal{E}_{\leq \sigma}$ egyeneshalmaz $m - |\mathcal{E}_{\leq \sigma}|$ darab, $\mathcal{P}$ egy-egy pontján átmenő egyenessel való kiegészítésével nyert egyeneshalmaz. Ekkor $i(\mathcal{P}, \mathcal{E}) = \Theta(n^{2/3} m^{2/3})$.

Az alábbi tétel azt mutatja, hogy a fenti példákban az illeszkedések száma maximális nagyságrendű.

7. Tétel (Szemerédi Endre—W. Trotter). *Legyen $\mathcal{P}$ egy véges pont- és $\mathcal{E}$ egy véges egyeneshalmaz. Ekkor*

$$i(\mathcal{P}, \mathcal{E}) \leq \begin{cases} \alpha|\mathcal{E}| & , |\mathcal{E}| > |\mathcal{P}|^2 \\ \beta|\mathcal{P}|^{2/3}|\mathcal{E}|^{2/3} & , |\mathcal{E}| \leq |\mathcal{P}|^2 \textit{és} |\mathcal{P}| \leq |\mathcal{E}|^2 = \\ \gamma|\mathcal{P}| & , |\mathcal{P}| > |\mathcal{E}|^2 \end{cases}$$
$$= \mathcal{O}(\max\{|\mathcal{P}|^{2/3}|\mathcal{E}|^{2/3}, |\mathcal{P}|, |\mathcal{E}|\}) = \mathcal{O}(|\mathcal{P}|^{2/3}|\mathcal{E}|^{2/3} + |\mathcal{P}| + |\mathcal{E}|).$$

A fenti tétel pontosan leírja milyen paraméter értékekre legfeljebb milyen nagyságrendű lehet az illeszkedések száma. Az alábbi változat a nagyságrendek tekintetében nem annyira világos, de kezelhető konstansokat tartalmaz.

8. Tétel. *Legyen $\mathcal{P}$ egy véges pont- és $\mathcal{E}$ egy véges egyeneshalmaz. Ekkor*

$$i(\mathcal{P},\mathcal{E}) \le \max\{4(|\mathcal{P}||\mathcal{E}|)^{2/3} + |\mathcal{E}|, 4|\mathcal{P}| + |\mathcal{E}|\}.$$

Bizonyítás. A $\mathcal{P}$, $\mathcal{E}$ párból egy gráfot készítünk. A csúcsok $\mathcal{P}$ elemei lesznek. Két csúcsot egy éllel kötünk össze, ha egy $\mathcal{E}$-beli egyenesre esnek és az általuk meghatározott szakaszon nincs további eleme $\mathcal{P}$-nek. A csúcsok a sík pontjaival vannak azonosítva, az éleket egyenes szakaszokkal reprezentáljuk. Így G egy ρ lerajzolását kapjuk.

Feltehetjük, hogy nem lesz olyan egyenes, amelyre nem illeszkedik $\mathcal{P}$-beli pont. Valóban, ha lenne ilyen, akkor $\mathcal{E}$-t változtassuk meg úgy, hogy eltoljuk amíg áthalad egy $\mathcal{P}$-beli ponton. Ezzel egy nagyobb illeszkedési számmal rendelkező konfigurációhoz jutunk, míg egyeneseink, pontjaink száma nem változik,

Nyilvánvalóan $V = |\mathcal{P}|$. Ha egyenesre $k > 0$ pont esik $\mathcal{P}$-ből, akkor ezen az egyenesen $k-1$ él szakasza lesz. Az élek számát megkapjuk, ha minden egyenesre összegezzük a rá illeszkedő pontok számánál eggyel kevesebb értéket. A „minusz 1-ek” teljes hozzájárulása $-|\mathcal{E}|$ lesz. Tehát $|E| = i(\mathcal{P},\mathcal{E}) - |\mathcal{E}|$. A konkrét lerajzolás metszési száma könnyen becsülhető. Minden egyenespár legfeljebb egy metszésért felelős (akkor és csak akkor hoz egyetlen metszést, ha nem párhuzamosak és a metszéspontjukat mindkét egyenesen közrefogja két $\mathcal{P}$-beli pont). Így $x(G,\rho) \le \binom{|\mathcal{E}|}{2} \le |\mathcal{E}|^2$.
1. eset: $|E| < 4|V|$, azaz $i(\mathcal{P},\mathcal{E}) - |\mathcal{E}| < 4|\mathcal{P}|$. Az állítás adódik.
2. eset: $|E| \ge 4|V|$. Ekkor a metszési lemma feltétele teljesül. Az állítását felírva kapjuk, hogy

$$|\mathcal{E}|^2 \ge \binom{|\mathcal{E}|}{2} \ge x(G,\rho) \ge \frac{1}{64}\frac{(i(\mathcal{P},\mathcal{E}) - |\mathcal{E}|)^3}{|\mathcal{P}|^2}.$$

Rendezés után kapjuk, hogy

$$(|\mathcal{E}||\mathcal{P}|)^{2/3} \ge \frac{1}{4}(i(\mathcal{P},\mathcal{E}) - |\mathcal{E}|),$$

amit bizonyítani kellett. ■

A Szemerédi—Trotter-tétel legkompaktabb formája a következő.

9. Tétel. *Legyen $\mathcal{P}$ egy véges pont- és $\mathcal{E}$ egy véges egyeneshalmaz. Ekkor*

$$i(\mathcal{P},\mathcal{E}) \le 4(|\mathcal{P}||\mathcal{E}|)^{2/3} + 4|\mathcal{P}| + |\mathcal{E}|.$$

A metszési paraméter alkalmazása II. Kombinatorikus számelmélet

Legyen A, B két véges részhalmaza $\mathbb{R}$-nek. Legyen $A + B$ (A és B összeghalmaza) azon számok halmaza, amelyek $a + b$ alakúak, ahol $a \in A$ és $b \in B$. Hasonlóan AB (A és B szorzathalmaza) legyen azon számok halmaza, amik előállnak mint egy A-beli és egy B-beli szám szorzata. Mi egy A számhalmaz esetén $A + A$ és AA halmazok nagyságát vizsgáljuk. Legyen $|A| = n$.

Természetesen $|A+A|$ és $|AA|$ is legfeljebb $\binom{n}{2}+n$. Az is könnyen látható, hogy a felső becslés el is érhető. Ha A egy „véletlen” n elemú számhalmaz, akkor $A+A$ és AA is $\binom{n}{2}+n$ elemű lesz. Legyen $\{a_i\}_{i=1}^n$ az A halmaz elemei nagyság szerint növekvő sorrendben felsorolva. Ekkor $a_1+a_1 < a_1+a_2 < a_1+a_3 < \ldots < a_1+a_n < a_2+a_n < \ldots < a_{n-1}+a_n < a_n+a_n$. Így $A+A$ legalább $2n-1$ elemű. Ez az alsó becslés el is érhető, ha A-t egy számtani sorozat elemeinek választjuk. Hasonlóan becsülhető AA elemszáma. Előző alsó becslésünket akkor érjük el, ha egy geometriai sorozatnak választjuk A elemeit. Szemben a maximalizálási feladattal, minimalizáláskor az összeg halmaz kis méretűségéhez teljesen más halmazt mutattunk fel mint a szorzat halmazhoz. Szükségszerű-e ez? Tudunk-e mutatni olyan halmazt, amire az összeg és szorzat halmaz is kicsi lesz? Esetleg ez szükségszerű, az összeg vagy szorzat halmaz mindig nagy lesz? Becsüljük alulról $\max\{|A+A|, |AA|\}$ értékét az n elemű valós halmazok között.

10. Tétel (Elekes György tétele). *Legyen A valós szamok egy véges halmaza. Ekkor* $\max\{|A+A|, |AA|\} \geq \Omega(|A|^{5/4})$.

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy $0 \notin A$. Jelölje n az A halmaz elemszámát. Definiálunk egy síkbeli pont- és egy egyeneshalmazt: Legyen $\mathcal{P} = \{(\pi, \sigma) | \pi \in AA, \sigma \in A+A\}$, Legyen $\mathcal{E} = \{e_{\mu,\beta} : y = \frac{1}{\mu} + \beta | \mu, \beta \in A\}$.

Nyilvánvaló, hogy $|\mathcal{P}| = |AA||A+A|$ és $|\mathcal{E}| = |A|^2$. Számoljuk meg az illeszkedéseket. Az $e_{\mu,\beta}$ egyenesre illeszkednek a $(\mu\cdot\alpha_1, \alpha_1+\beta), (\mu\cdot\alpha_2, \alpha_2+\beta), (\mu\cdot\alpha_3, \alpha_3+\beta), \ldots$ mindegyike, ahol $A = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots\}$. Azaz $i(\mathcal{P}, \mathcal{E}) \geq |A||\mathcal{E}| = |A|^3$.

Összevetve a Szemerédi—Trotter-tétel állításával kapjuk, hogy

$$|A|^3 < 4(|AA||A+A||A|^2)^{2/3} + 4|A|^2 + |AA||A+A|,$$

azaz

$$|A|^3 - 4|A|^2 - |AA||A+A| < 4(|AA||A+A||A|^2)^{2/3}.$$

Amennyiben $|A|$ és a tétel becslése nem nyilvánvaló, akkor

$$\frac{1}{4}|A|^3 < 4(|AA||A+A||A|^2)^{2/3},$$

azaz

$$\frac{1}{64}|A|^{9/2} < |AA||A+A||A|^2.$$

Rendezés után adódik az állítás. ∎