11. Előadás

Előadó: Hajnal Péter
Jegyzetelő: Udvari Balázs 2009. november 23.

Csúcsszínezések (folytatás)

Definíció. Egy G gráf *derékbősége* (angolul: *girth*)

$$g(G) = \min\{hossz(C) : C \text{ kör } G\text{-ben.}\}$$

Vegyük észre, hogy $g(G) > 2k+1$ pontosan akkor, ha minden x $\in V$ esetén $B(x,k) := G|_{\{v\in V: d(x,v)\leq k\}}$ fa. A $B(x,k)$ részgráf szavakkal megfogalmazva: az x-től legfeljebb k távolságra levő pontok és a köztük vezető élek. A geometriai analógia alapján ez az x középpontú és k sugarú gömb G-ben.

Figyeljük meg továbbá, hogy ha G egyszerű, akkor $g(G) \geq 3$. Továbbá $g(G) = 3$ akkor és csak akkor teljesül egy egyszerű gráfban, ha van háromszög G-ben. $g(G) > 3$ ekvivalens azzal, hogy gráfunk háromszögmentes egyszerű gráf. Természetesen, ha G páros, akkor nincs páratlan hosszú köre, így legrövidebb köre (egyszerű gráf esetén) legalább négy hosszú. Tehát, ha $\chi(G) \leq 2$, akkor $g(G) \geq 4$

Tudjuk, hogy háromszögmentes gráf (egy sugarú gömbök a gráfban fák, így csillagok) kromatikus száma tetszőlegesen nagy lehet. Ha a girth nagy (azaz a gömbök — körülbelül $\gamma/2$ sugárig — fák), akkor lehet-e a kromatikus szám nagy? Belátjuk, hogy lehet. Azaz a kromatikus szám és a girth kapcsolata „nagyon laza”. Egy értelmezése az eredménynek, hogy a kromatikus szám egy globális fogalom. A lokális egyszerűség mellett a globális színezési feladat bonyolult lehet.

1. Tétel (Erdős Pál tétele). *Minden k és γ természetes számokhoz van olyan $G = G_{k,\gamma}$ gráf, amelyre $\chi(G) \geq k$ és $g(G) \geq \gamma$.*

Bizonyítás. Valószínűségszámítási módszerrel bizonyítunk.

Véletlen segítségével írunk le egy gráfot: Legyen V egy n elemű csúcshalmaz, p egy valószínűség (n nagy, p értékét n és k, γ függvényében később határozzuk meg). Minden pontpár között egymástól függetlenül p eséllyel húzunk be élt. Jelölje $\mathbf{G}$ a kapott gráfot (ami egy valószínűségi változó)! Ez a konstrukció nagyon sok esetben hasznos, sok természetes kérdést, komoly problémákat rejt. A fogalmat — megalkotóiról — *Erdős-Rényi véletlen gráfnak* nevezzük.

Legyen A egy csúcshalmaz, legyen $\mathcal{F}_A$ az az esemény, hogy „A független ponthalmaz $\mathbf{G}$-ben”. Nyilván

$$\mathbb{P}(\mathcal{F}_A) = (1-p)^{\binom{|A|}{2}}.$$

Legyen $\mathcal{F}_k$ az az esemény, hogy „$\mathbf{G}$-ben van k elemű független halmaz”. Azaz $\mathcal{F}_k = \bigcup_{A: A\subseteq V, |A|=k} \mathcal{F}_A$. Így

$$\mathbb{P}(\mathcal{F}_k) \leq \binom{n}{k}(1-p)^{\binom{k}{2}} \leq n^k(1-p)^{\binom{k}{2}}.$$

Legyen $\mathcal{A}_{\leq k}$ az az esemény, hogy „$\alpha(\mathbf{G}) \leq t$". Azaz „$\mathbf{G}$-ben nincs $t+1$ elemű független halmaz". Azaz $\mathcal{A}_{\leq t} = \overline{\mathcal{F}_{t+1}}$

$$\mathbb{P}\left(\mathcal{A}_{\leq t}\right) \geq 1 - \binom{n}{t+1}(1-p)^{\binom{t+1}{2}} \geq 1 - n^{t+1}(1-p)^{\binom{t+1}{2}} \geq 1 - \left[n(1-p)^{t/2}\right]^{t+1}.$$

A paraméterek választásánál egyik célunk az, lesz, hogy ez a valószínűség nagy (legalább 1/2) legyen. Az $\mathcal{A}_{\leq t}$ esemény jelentősége, hogy $\chi(G)\alpha(G) \geq n$. Speciálisan ha bekövetkezik $\mathcal{A}_{\leq t}$ (azaz $\alpha(\mathbf{G}) \leq t$), akkor $\chi(\mathbf{G}) \geq n/t$. Sőt minden $U \subseteq V$ esetén $\chi(\mathbf{G}|_U) \geq |U|/t$.

Legyen C egy kör, $\mathcal{C}_C$ azt az eseményt, hogy „C a $\mathbf{G}$ részgráfja".

$$\mathbb{P}\left(\mathcal{C}_C\right) = p^{|E(C)|}$$

Hány ℓ hosszú kör lehetséges? A kör U csúcshalmazát ($|U| = \ell$) $\binom{n}{\ell}$-féleképpen választhatjuk meg. Adott ℓ db pontot összesen $(\ell-1)!/2$ sorrendenben tudunk körbe rendezni. Az a_1-et első helyre rögzítve $(\ell-1)!$ sorrendet képezhetünk a többi csúcsból. Két sorrend akkor és csak akkor vezet ugyanahhoz a körhöz, ha az egyik sorrend a másik megfordítottja (például $(a_2, a_3, \ldots, a_\ell)$ és $(a_l, a_{l-1} \ldots, a_3, a_2)$). Ezért az ℓ hosszú körökre a lehetőségek száma $\binom{n}{\ell}\frac{(\ell-1)!}{2} = \frac{n(n-1)\ldots(n-\ell+1)}{2\ell} \leq \frac{n^l}{2\ell}$. Ebből könnyen adódik az adott hosszú, illetve γ-nál rövidebb körök számának várható értéke. Legyen $\xi_{\leq\gamma}$ a „γ-nál rövidebb körök száma" valószínűségi változó.

$$E\left(\xi_{\leq\gamma}\right) \leq \sum_{\ell=3}^{\gamma-1} \frac{n^\ell}{2\ell} p^\ell \leq \frac{1}{6}\sum_{\ell=3}^{\gamma-1}(np)^\ell \leq \frac{\gamma}{6}(np)^\gamma.$$

feltéve, hogy $np > 1$. p-t úgy választjuk meg, hogy elég nagy n-re ez a kifejezés kisebb mint $n/4$. Ha a várható érték kisebb mint $n/4$, akkor — a Markov-egyenlőtlenséget használva — annak az esélye, hogy $n/2$-nél több (a várható érték kétszeresénél több) γ-nál rövidebb kör van, kevesebb mint 1/2. Vagyis ha $\mathcal{K}$, az az esemény, hogy „a $\mathbf{G}$ gráfban $n/2$-nél nem több kör hossza kisebb mint γ" (vagyis kicsi körökből kevés van), akkor

$$\mathbb{P}(\mathcal{K}) > 1/2.$$

Emiatt azonban

$$\mathbb{P}(\mathcal{K} \text{ ÉS } \mathcal{A}_{\leq t}) > 0.$$

(A két ÉS-sel összekapcsolt eseménynek külön-külön 1/2-nél nagyobb a valószínűsége.)

Vagyis van olyan G, amiben legfeljebb $n/2$ kör rövidebb γ-nál és legfeljebb t pontú független ponthalmaza van.

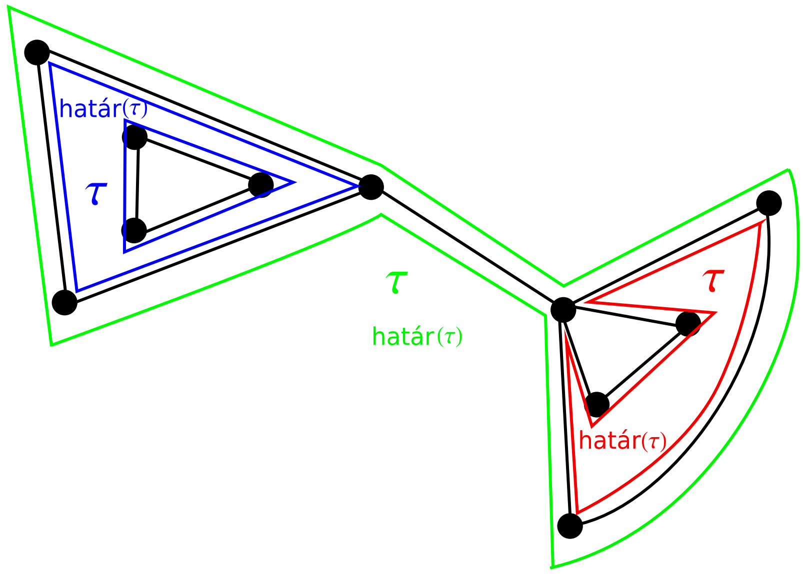
Tekintsük ezt a G gráfot! Ebből — minden γ-nál rövidebb körről elhagyva egy pontot — olyan G_0 gráfot kapunk, amire $|V(G_0)| \geq n/2$ és $g(G_0) \geq \gamma$. Mivel pedig $\alpha(G) \leq t$ volt, $\alpha(G_0) \leq t$ is teljesül és $\chi(G_0) \geq \frac{n/2}{t} \geq k$, ha n-t megfelelően nagynak választjuk.

A bizonyítás vége a paraméter értékek pontos megadása és annak ellenőrzése, hogy ígéreteink teljesülnek. Legyen p olyan, hogy $np = \left(\frac{n}{\gamma}\right)^{1/\gamma}$. Legyen t olyan, hogy $t/2 = \frac{1}{p}2\log n$ legyen. Tudjuk, hogy $(1-p)^{1/p} < 1/e$. Így $(1-p)^{t/2} < 1/n^2$. A számolás további ellenőrzése rutinmunka, az olvasóra bízzuk. ■

Síkgráfok

A továbbiakban síkgráfokkal foglalkozunk.

Legyen a G síkgráf szép lerajzolásában τ egy tartomány. Ekkor τ *határa*, $\partial\tau$ a tartományt határoló élgörbék uniója. Ez nem feltétlenül összefüggő, de az biztos, hogy záródó séták rendszere.



1. ábra. Példa három tartományhatárra

A körülményes megfogalmazás oka, hogy egy él kétszeresen is szerepelhet a határban.

Legyen G egy szépen lerajzolt gráf. Könnyen belátható az is, hogy

1. Vegyük észre, hogy G pontosan akkor összefüggő, ha minden τ tartományra $\partial\tau$ összefüggő (vagyis $\partial\tau$ egyetlen záródó sétából áll). Ez pedig ekvivalens azzal, hogy minden τ összehúzható egy pontra.

2. G akkor és csak akkor kétszeresen élösszefüggő, ha minden τ tartományra $\partial\tau$ egyetlen vonal (vagyis összefüggő és nincs benne élismétlés).

3. G akkor és csak akkor kétszeresen összefüggő, ha minde τ tartományra $\partial\tau$ egyetlen kör.

Figyeljük meg még, hogy ha G szépen lerajzolt, akkor az összes tartomány határát bejárjuk, akkor minden élt pontosan kétszer fogunk bejárni. Igazából (a lerajzolás alapján) minden élnek két oldala lesz és ezen oldalak mindegyikén pontosan egyszer haladunk el a határok bejárásánál (az élgörbéktől egy kicsit eltartva, a tartományban sétálunk). Azaz

$$\sum_{\tau} |\partial\tau| = 2|E|.$$

A fenti tények és a mögöttük álló technikai problémák szoros kapcsolatban állnak a fokszámok során felmerült problémákkal. A kapcsolatot a dualitás formalizálja. A duális gráfban a tartományok csúcsoknak felelnek meg. A duális gráf egy v_τ

csúcsának (az eredeti lerajzolás egy τ tartományának) foka a $\partial\tau$ sétahalmaz összélszáma felel meg. A határhosszak összege a duális gráfban a fokszámok összege. A határhosszak összege és a fokok összege is ugyanazt adja, az eredeti és a duális gráf közös élszámának dupláját.

2. Tétel (Euler-tétel). *Legyen G szépen síkra rajzolt, úgy, hogy minden tartomány egy pontra összehúzható (azaz G összefüggő). Ekkor $t(G) - |E| + |V| = 2$, ahol $t(G)$ a tartományok száma.*

A tétel rendkívül fontos a kombinatorikában, geometriában és topológiában is. Három különböző bizonyítást is adunk rá.

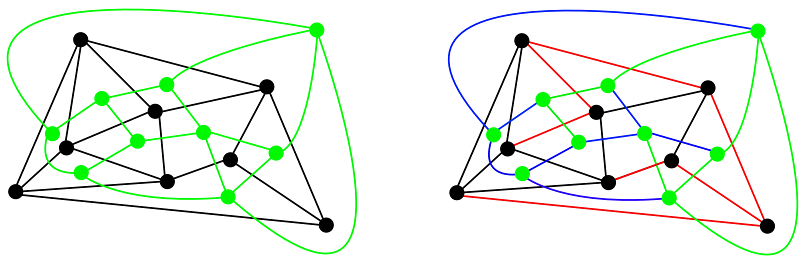
I. Bizonyítás. $|E|$-re vonatkozó teljes indukcióval bizonyítunk.

Az indukció kezdő lépése, ha $G = T$ fa (G megegyezik egy feszítőfájával). Ekkor $t = 1, |V| = n, |E| = n - 1$. Euler-tétele igaz.

Az indukciós lépéshez tegyük fel, hogy G nem fa. Ekkor G előáll egy G_0 szépen lerajzolt, összefüggő gráfból, hogy egy új élt behúzunk egyik tartományán keresztül. Mivel G_0 összefüggő a tartományok belseje homeomorfak a nyilt körlappal, az él behúzása eggyel növeli t-t. $|E|$ is eggyel nő ($|V|$ nem változik). Az indukciós feltevést felhasználva adódik az állítás. ■

II. Bizonyítás. Tekintsük a G síkrarajzolt gráf G^* duálisát. Ha T feszítőfa G-ben, akkor a duálisban $E(T)$-nek megfeleltetett élhalmazt jelölje $\varphi(E(T))$. Ennek komplementere $\overline{\varphi(E(T))}$.

Könnyen ellenőrizhető, hogy ez G^* egy feszítőfájának élhalmaza.



2. ábra. Egy síkra rajzolt gráf (fekete színnel), duálisa (zölddel), az eredeti egy feszítőfája (pirossal), a duális egy feszítőfája (kékkel)

Ez az állítás két részre bontható:

a) a megfelelő élhalmaz összefűzi G^* csúcsait,

b) a megfelelő élhalmaz nem tartalmaz kört.

a) Állításunk úgy is megfogalmazható, hogy ha $\varphi(E(T))$ élei tiltottak, attól a duális gráf csúcsai között teljes az elérhetőség reláció. Gondolhatjuk, hogy G^* lerajzolásában $\varphi(E(T))$ élei falak. T fa, így falaink nem alkotnak kört, nem vágják ketté a síkot, a falak elkerülésével bárhonnan bárhová eljuthatunk (G^*-ban sétálva).

b) Ha a duálisban $\overline{\varphi(E(T))}$ tartalmazna kört, akkor ez kettévágná a síkot (vagy gömbfelületet). A kettévágó görbe belsejében és külsejében is lenne az eredeti gráf egy-egy csúcsa. Ezt T élgörbéi összekötnék. Ennek az összekötésnek metszeni kellene az elválasztó kör lerajzolását. Azonban átmetszés csak a megfeleltett él-duális el párok esetén lehetséges. Ez itt nem áll fenn. Az ellentmondás b)-t igazolja.

Állításunk belátása után $|E(T)| = |V(G)| - 1$ mert T a G feszítőfája, $\overline{\varphi(E(T))}$ élhalmaz elemszáma $t(G) - 1$ (mert feszítőfa G^*-ban és G^* csúcsainak száma megegyezik G tartományainak számával), és e két érték összege $|E(G)|$-vel egyenlő. ∎

III. Bizonyítás. (Vázlat) Felhasználjuk azt a tényt, hogy ha G síkra jól lerajzolható, akkor gömbre is jól lerajzolható és fordítva (sztereografikus projekció segítségével). Feltehetjük, hogy a gömbre úgy rajzoltuk le G-t, hogy az északi és déli pólusra (N és S) esik egy-egy csúcs, és minden él $N - S$ monoton. (Ez megvalósítható, bár formális bizonyítása technikás.) Az állítást $(|V|-2)-|E|+t = 0$ alakban igazoljuk.

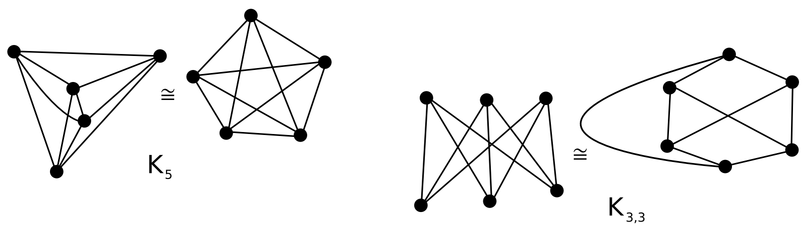
Az N és S-beli csúcsokat leszámítva minden csúcsra írjunk 1-et, minden élre -1-et és minden tartományba írjunk 1-et. A leírt számok összege $(|V|-2)-|E|+t$. Mozgassuk el a leírt számainkat kis mértékben az $N - S$ tengely körül (mondjuk pozitív irányban). Ekkor az összes szám tartomány-belsőbe kerül. Belátható, hogy minden tartomány belsejében 0 lesz a számok összege. Ez Euler-tételét igazolja. ∎

A harmadik bizonyítás módszere azért is érdekes, mert a síktól/gömbtől eltérő felületekre rajzolt gráfok esetén is alkalmazható. A bizonyítás egyik fontos összetevője a forgatás, amitt az S és N pólusoktól eltekintve egy nem-nulla vektormező ír le. A vektormező 2 pontban vesz fel $\vec{0}$ értéket. Ez a 2 szám szerepel az Euler-tételben is. A tóruszon a vektormező megadható úgy is, hogy sehol se tűnjön el. Az Euler-tétel tóruszra vonatkozó alakja: Ha G egy tóruszra szépen lerajzolt gráfra, amely tartományai egy pontra összehúzhatók (belsejük homeomorf a nyilt körlappal) teljesül, hogy $t - |E| + |V| = 0$. Általában $t - |E| + |V|$ nem függ a gráftól, a felület egy topológiai jellemzője, a *felület Euler-karakteriszikája.*

3. Következmény (Euler-tétel). *Ha G egyszerű síkgráf, $|V| \geq 3$, akkor $|E| \leq 3|V| - 6$, ha pedig G még páros is, akkor $|E| \leq 2|V| - 4$.*

Bizonyítás. Feltehető, hogy G összefüggő. Ha G egyszerű síkgráf, akkor minden τ tartományra $|\partial\tau| \geq 3$, ha páros is, akkor $|\partial\tau| \geq 4$. Felhasználva, hogy $\sum_\tau |\partial\tau| = 2|E|$ kapható, hogy $2|E| \geq 3t(G)$ illetve páros gráf esetén $2|E| \geq 4t(G)$. Euler tételét alkalmazva azonnal adódik a kívánt eredmény. ∎

4. Következmény. *$K_5, K_{3,3}$ nem síkgráf.*



3. ábra. A két alap-nem-síkgráf

Bizonyítás. K_5 nem teljesíti az előző tétel konkluzióját. A feltételeket csak úgy sértheti meg, ha nem síkgráf.

A $K_{3,3}$ páros gráf nem teljesíti az előző tétel páros gráfokra vonatkozö konkluzióját. Tehán nem lehet síkgráf. ∎

Emlékeztető. Egy gráfból egy él elhagyása/törlése természetes operáció. Hasonlóan egyszerű egy csúcs elhagyása (a csúcs eltörlésével a rá illeszkedő élek is eltünnek a gráfból).

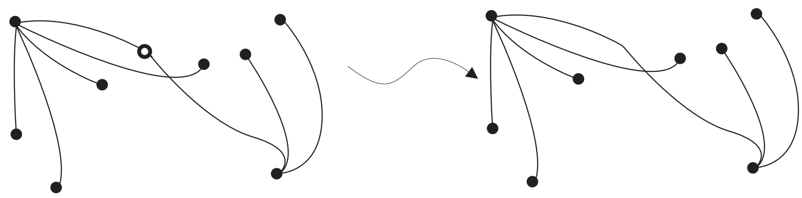
A fenti operációkra alapozva bevezethetjük a részgráf fogalmát.

Definíció. R a G gráf *részgráf*, ha megkapható G-ből élek és csúcsok elhagyásával. Jelölésben $G \supseteq R$.

Ha G síkgráf, akkor R is az; ha R nem síkgráf, akkor pedig G sem az.

Ennek a megjegyzésnek egy nyilvánvaló következménye, hogy fel tudunk mutatni további nem-síkgráfokat is: A K_5-öt vagy $K_{3,3}$-at részgráfként tartalmazó gráfok sem síkgráfok. K_5 és $K_{3,3}$ gráfok minimális síkgráfok: minden valódi részgráfjuk már síkgráf. A fenti lista azonban nem teljes listája a nem-síkgráfoknak. K_5 és $K_{3,3}$ részgráfok léte nem karakterizálja a nem-síkgráfokat (más, összetettebb okok is megakadályozzák a szép lerjazolhatóságot). A helyzet tisztázásához további fogalmak bevezetése szükséges.

Definíció. Legyen G gráfban x 2-fokú csúcs. Jelölje $e = xy_e$ és $f = xy_f$ a két hozzá kapcsolódó élt. Ekkor G' e két él *összeolvasztásával* nyert gráf, ha $G' = G - x \dot{+} y_e y_f$.

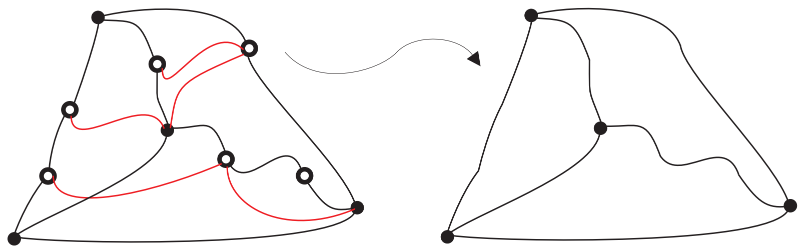


4. ábra. Egy üres karikával jelölt másodfokú csücsban összefutó két él összeolvasztása

Vegyük észre, hogy ha G szépen lerajzolt, akkor $y_e y_f$ élgörbéje megválasztható úgy, hogy G' is szépen lerajzolt legyen.

Definíció. G' a G gráf *topológikus részgráfja*, ha csúcsok és élek elhagyásával, valamint élek összeolvasztásával kapható G-ből. Jelölésben: $G' \subseteq_{top} G$

Példa. G-nek topológikus részgráfja K_4:

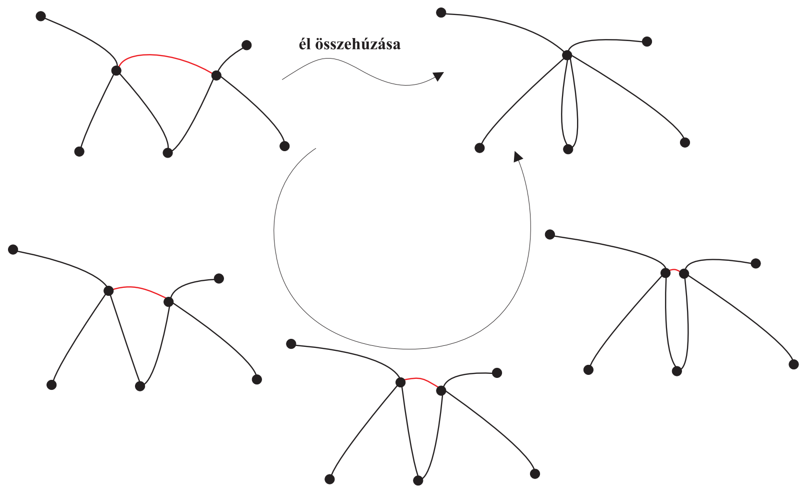


5. ábra. G-ben a piros élek elhagyása, majd az üres körrel jelölt csúcsokat élösszeolvasztásokkal eltüntetve valóban K_4-hez jutunk

Legyen T a G gráf topológikus részgráfja. Ha G síkgráf, akkor T is az. Tehát, ha $K_{3,3}$ vagy K_5 topológikus részgráfja G-nek, akkor G nem síkgráf.

Definíció. G' az e él *összehúzásával* G-ből kapott gráf, ha G'-t úgy kapjuk G-ből, hogy elhagyjuk e-t és végpontjait azonosítjuk.

Vegyük észre, hogy a végpontok azonosítását a lerajzolás segítségével vizualizálhatjuk úgy, hogy az azonosított pontokat mozgatjuk, a ráilleszkedő éleket ezzel együtt deformáljuk, amíg a két csúcsot egyetlen pont reprezentálja.

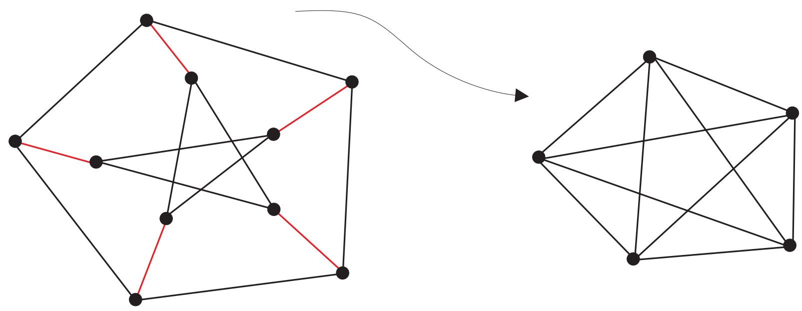


6. ábra. Egy élösszhúzás hatása, illetve a folytonos deformáció néhány pillanata

A deformáció elvégezhető úgy, hogy végig szép lerajzolásokkal dolgozzunk.

Definíció. G' a G gráf *minorja*, ha csúcsok és élek elhagyásával, valamint élek összehúzásával kapható G-ből. Jelölésben: $G' \preceq G$.

Példa. A Petersen-gráfnak K_5 minorja:



7. ábra. A Petersen-gráfból az ábrán jelölt piros élek összehúzásával K_5 kapható

Legyen M a G gráf minorja. Ha G síkgráf, akkor M is az. Tehát ha $K_{3,3}$ vagy K_5 minorja G-nek, akkor G nem síkgráf.

Észrevétel. $G' \subseteq G \Longrightarrow G' \subseteq_{top} G \Longrightarrow G' \preceq G$ (de visszafelé egyik következtetés sem igaz!)

A fenti gondolatmenetből kapjuk, hogy K_5 és $K_{3,3}$ topologikus részgráfként való tartalmazása esetén a gráf nem síkgráf. Hasonlót kaptunk a minorként való tartalmazásra. Ezek a következtetések már megfordíthatóak:

5. Tétel (Kuratowski-tétel). *G akkor és csak akkor síkgráf ha $G \not\supseteq_{top} K_5, K_{3,3}$.*

6. Tétel (Wagner-tétel). *G akkor és csak akkor síkgráf, ha $G \not\succeq K_5, K_{3,3}$.*

A következő előadáson bebizonyítjuk a Wagner-tételt.