Gráfelmélet/Diszkrét Matematika MSc hallgatók számára

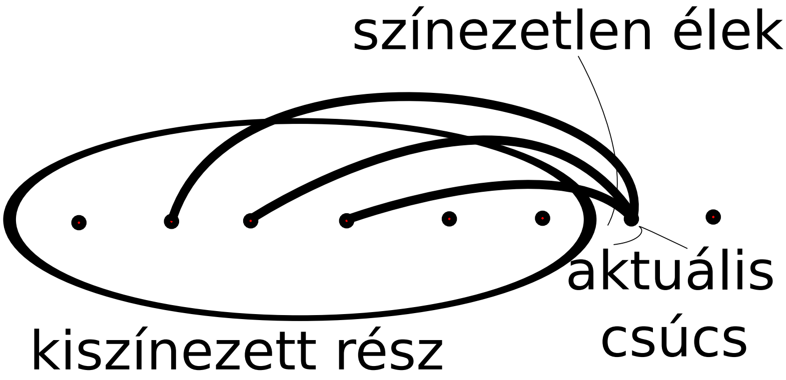
10. Előadás

Előadó: Hajnal Péter
Jegyzetelő: Dohány Péter 2009. december 7.

Vizing-tétel bizonyítása

Emlékeztető. Adott G egyszerű gráf. Szeretnénk az éleket $\Delta(G)+1$ (itt $\Delta(G)$ a fokok közül a legnagyobb) színnel kiszínezni úgy, hogy a szomszédos élpárok színei különbözőek legyenek.

Legyen $P = \{1, 2, \ldots, \Delta G+1\}$ színhalmaz/paletta. A csúcsokat sorbarendezzük. Legyen $\pi : v_1, v_2, \ldots, v_n$ a csúcsok egy sorrendje. A $G_i = G|_{\{v_1,\ldots,v_i\}}$ gráfokat sorban élszínezzük. Tehát a színezés fázisokban történik, az i-edik fázisban a $\{v_jv_i \in E : j < i\}$ élek kapnak színt.



1. ábra.

A színezetlen élek halmaza legyen S, ezek az élek sorban színt kapnak. A fázis elején

$$S = \{e = v_iv_j \in E, \quad \text{ahol} \quad j < i\} = E(G_i) - E(G_{i-1}).$$

S a színezés alatt csökken, amíg $\emptyset$ nem lesz. Ekkor térünk át a következő fázisra. Legyen O a v_i-re illeszkedő éleken kiosztott színek. Kezdetben $O = \emptyset$, amely a későbbiekben nőni fog. Legyen $k = |O| = |\{v_i\text{-re illeszkedő színezett élek}\}|$.

Legyen $e \in S$. Definiáljuk L_e-t a következőképpen:

$$L_e = \{\text{lehetséges színek halmaza}\},$$

azaz az e két végpontjánál kiosztott színek komplementere P-ben. Fontos megjegyezni, hogy $L_e \cap O = \emptyset$. Kezdetben az $O = \emptyset$ (és így $k = 0$) feltétel teljesülése esetén $|L_e| \geq 2$. Az L_e halmazt csökkentsük le úgy, hogy 2 elemű legyen. A csökkentett színhalmazt P_e-vel jelöljük (e preferált színei, vagy e redukált palettája). Az egyik élnél azt is megengedhetjük, hogy egy preferált szín legyen. Azaz a következő tulajdonság teljesül a színezésnél.

$(\star)$: $\forall e \in S$-re adott egy $P_e \subseteq L_e$ halmaz úgy, hogy $|P_e| = 2$ maximum egy él kivételével, ahol $|P_e| = 1$.

Ezt a (*) tulajdonságot az egész színezés alatt megtartjuk! Színezési eljárásunk a következő:

Amíg $S \neq \emptyset$ (azaz $|O| < d(v_i)$) tegyük a következőt:

1. eset: Van olyan c preferált szín $c \in \cup_{e \in S} P_e$, amely egyetlen P_e-ben szerepel.

Legyen e az a színezetlen él, amelyre $c \in P_e$ (a többi preferált halmazban c nincs ott). Következő lépésben e-nek kiosztjuk a c színt.

$$S := S \backslash \{e\} \text{ és } O := O \cup \{e\}.$$

A maradék P_e-k maradnak, $k = k+1$. A (*) tulajdonság is megmarad, hiszen $e \in S$ esetén c választása miatt nem kell P_e-hez nyúlnunk.

2. eset: Minden c preferált szín ($c \in \cup_{e \in S} P_e$) legalább két darab P_e-ben is benne van.

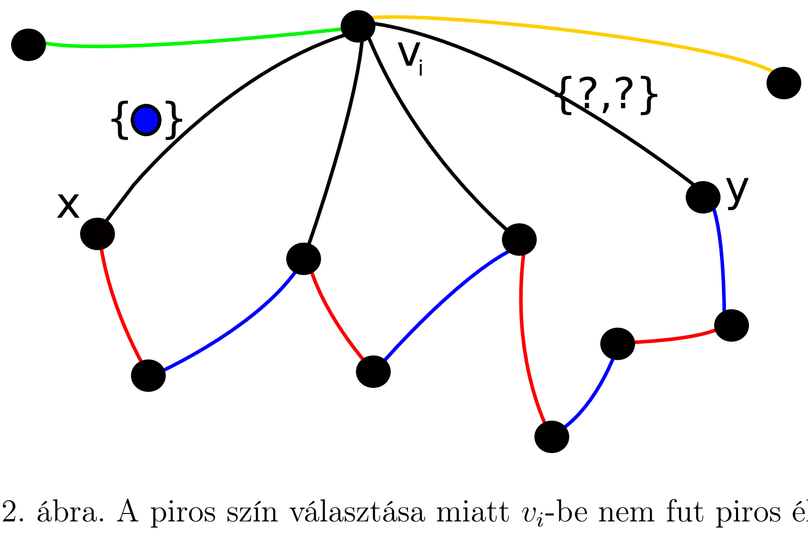
$\cup_{e \in S} P_e \subseteq P - O$. $|P - O| = \Delta(G) + 1 - k$, valamint az $\cup_{e \in S} P_e$ unió $d(v_i) - k$ darab tagból áll. A P_e-k listázása után $2(d(v_i) - k) - s$ lesz a lista hossza, ahol $s = 0$, ha mindegyik pontosan két elemű, és $s = 1$, ha van köztük egy elemű. A második eset körülményeit felhasználva megkapjuk, hogy a listán szereplő színek száma legfeljebb

$$\frac{|2(d(v_i) - k) - s|}{2} \leq d(v_i) - k < \Delta(G) + 1 - k = |P - O|\,.$$

Ebből látható az, hogy van olyan $c_1 \in P - O$ szín, amely egyik P_e-ben sem szerepel.

Legyen c_2 a következő szín: Ha valamelyik preferált halmaz egyelemű, akkor az ebben lévő szín c_2 ($P_e = \{c_2\}$), más esetben pedig egy tetszőleges $e \in S$ esetén legyen P_e egyik eleme ($P_e = \{c_2, .\}$). A c_2 választásakor előjött él legyen $e = v_i x$. Fontos megemlíteni, hogy ha P_e-nek van második eleme, akkor mindenütt megengedünk két színt.

Színezésünkben emeljük ki a c_1 és c_2 színű éleket. A c_1 színű élek és a c_2 színű élek is egy-egy párosítást alkotnak. Ezért a kiemelt rész körök és utak diszjunkt uniójából áll elő. x nem eshet körre vagy út belsejére, mert $c_2 \in P_e \subseteq L_e$ miatt rá nem támaszkodhat c_2 színű él. A kiemelt rész x-et tartalmazó komponense egy út és legyen y az út másik végpontja.

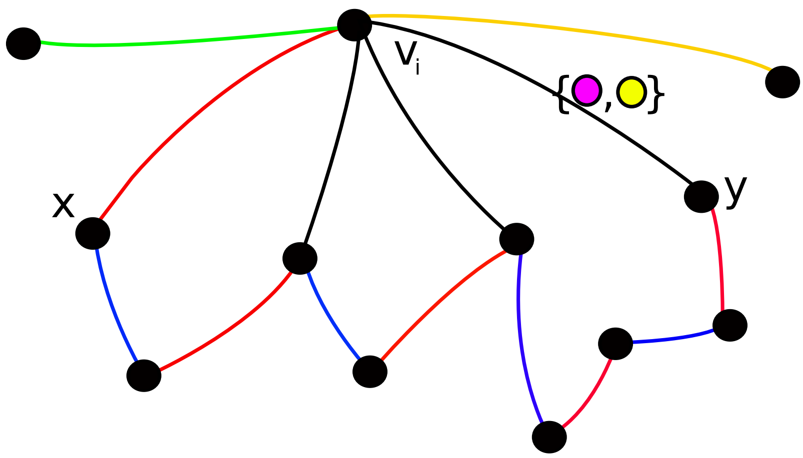


2. ábra. A piros szín választása miatt v_i-be nem fut piros él

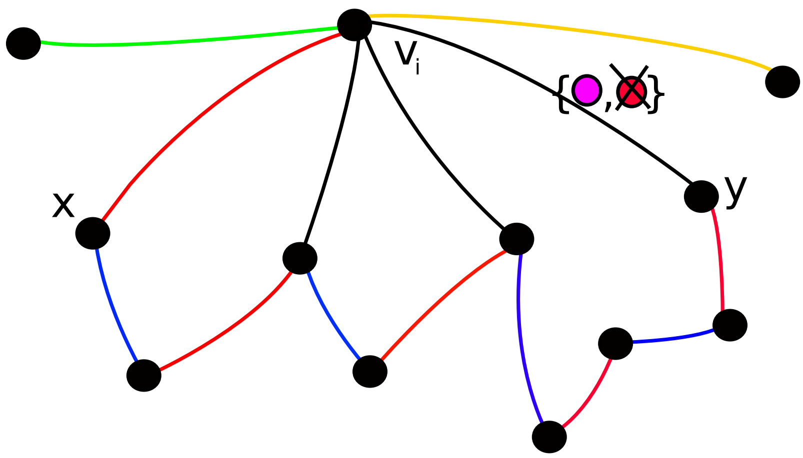
A következőkben végrehajtunk egy c_1 és c_2 színcserét ezen a komponensen belül (ezen az úton). Ez a művelet megtartja a jó színezést! Az átszínezés után x-re nem illeszkedik c_1 színű él, x-re egy c_2-es illeszkedhet (de egyáltalán nem biztos, hogy illeszkedik is). Most pedig e-nek kioszthatjuk a c_1 színt. Veszélyt csak az út pontjai jelenthetnek. Megvizsgálva ezeket láthatjuk, hogy a belső pontok rendben vannak, tehát tényleges veszélyt csak az út végpontja (y) jelent. y-nal is csak akkor lehet baj, ha v_i-ből egy színezetlen él vezet ide. A bizonyítás során egyedül itt használjuk ki, hogy egyszerű gráfról van szó és így egyetlen f él lehet ilyen. A v_i-ből y-ba vezető élt nevezzük el f-fel.

Következő lépésben e-nek kiosztjuk a c_1 színt.

$$S := S \setminus \{e\} \text{ és } O := O \cup \{e\}.$$



3. ábra. Vizing-átszínezés első példa: Nincs szükség P_f megváltoztatására



4. ábra. Vizing-átszínezés második példa: Szükséges P_f megváltoztatása

P_f-ről tudjuk, hogy legalább 2 elemű, $|P_f| \geq 2$. Most pedig P_f-et átírjuk $P_f -$ {az út utolsó élének új színére}, a többi P_g marad. Így a (*) tulajdonságot itt is megőriztük.

Csúcsszínezések

Ebben a témakörben feltehetjük és fel is tesszük, hogy csak egyszerű gráfokról beszélünk.

Emlékeztető. G akkor és csak akkor páros, ha $\chi(G) \leq 2$ G, ami akkor és csak akkor teljesül, ha minden köre páros hosszú, azaz G-ben nincs páratlan hosszú kör. Valóban, ha G piros/kék színekkel jól színezhető, akkor minden sétánál a piros/kék színek alternálnak, amiből viszont látszik, hogy minden záródó séta páros hosszú.

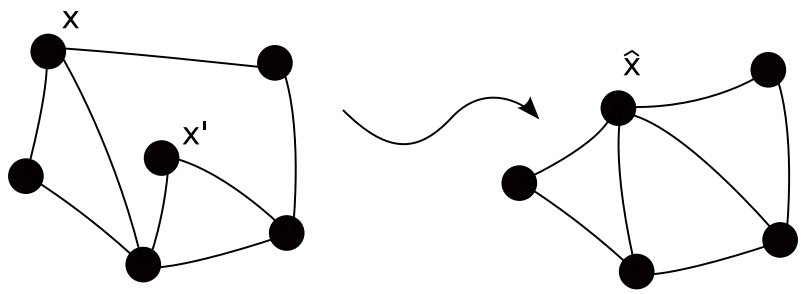
A fenti kérdésre adott válaszok elemzése alapján a „adott G gráf, páros-e" kérdés is megválaszolható. Ha páros, akkor fel tudunk mutatni egy 2-színezést. Nemleges válasz esetén pedig felmutatunk egy C kört, ami páratlan hosszú. Mindkét esetben válaszunk könnyen ellenőrizhető. Az első demonstrálási mód alapján a „2-színezhetőség" probléma $\mathcal{NP}$-beli. A második eset kezelhetősége miatt a „nem 2-színezhetőség" probléma is $\mathcal{NP}$-beli, azaz a „2-színezhetőség" probléma $co{-}\mathcal{NP}$-beli.

Egy másik kérdés, hogy $\chi(G) \leq 3$ teljesül-e? Ha igen, akkor ugyanúgy látjuk be, mint az előző esetben (a „3-színezhetőség" probléma is $\mathcal{NP}$-beli). Nem válasz esetén pedig egy olyan problémába ütközünk, amit még a mai napig sem sikerült megoldani. Nem ismert, hogy a „3-színezhetőség" probléma $co - \mathcal{NP}$-beli-e.

Próbálkozások természetesen születtek a kérdésre. Mi a Hajós György által bevezetett módszert ismertetjük annak demonstrálására, hogy egy gráf nem k-színezhető.

Definíció. (H1): Él vagy csúcs hozzáadása egy gráfhoz.

(H2): Legyen x és x' két csúcsa $V(G)$-nek, amelyek nem szomszédosak. x-et és x'-t azonosítjuk egy $\hat{x}$csúccsal. $\hat{x}$ szomszédsága x és $x'G$-beli szomszédságának uniója.



5. ábra. Példa a H2 operációra

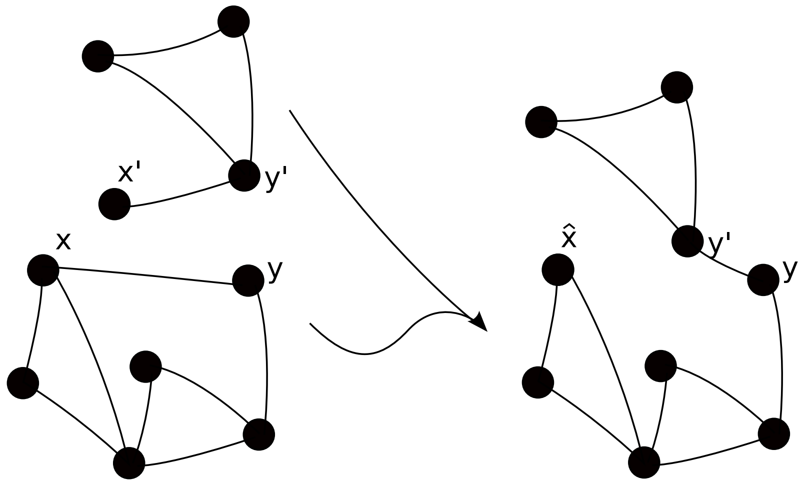
(H3): Legyen G és G' két gráf mindegyikben egy-egy éllel kitüntetve: $xy \in E(G), x'y' \in E(G')$. Legyen $\hat{G}$ a következő gráf: $V(\hat{G}) = (V(G)\setminus\{x\}) \cup (V(G')\setminus\{x'\}) \cup \{\hat{x}\}$, továbbá $E(\hat{G}) = E(G)\setminus\{xy, x'y'\} \cup \{yy'\}$

Észrevétel. (H1), (H2), (H3)-at olyan gráfokra alkalmazzuk, amelyek χ-je legalább k, akkor az eredmény $\hat{G}$ is olyan lesz, hogy $\hat{G}$ nem $k-1$ színezhető.

Bizonyítás. (H1)-re nyilvánvaló az állítás.

(H2): $G \overset{\text{H2}}{\to} \hat{G}$, akkor $\hat{G}$ jó s-színezéséből G egy jó s-színezése nyerhető.

(H3): $G, G' \overset{\text{H3}}{\to} \hat{G}$, akkor jó s-színezéséből G_1 vagy G_2 egy jó színezése nyerhető. Valóban: $\hat{G}$ jó színezésében y és y' színe különböző, tehát valamelyik színe nem egyenlő $c(\hat{x})$ színével. ■



6. ábra. Példa a H3 operációra

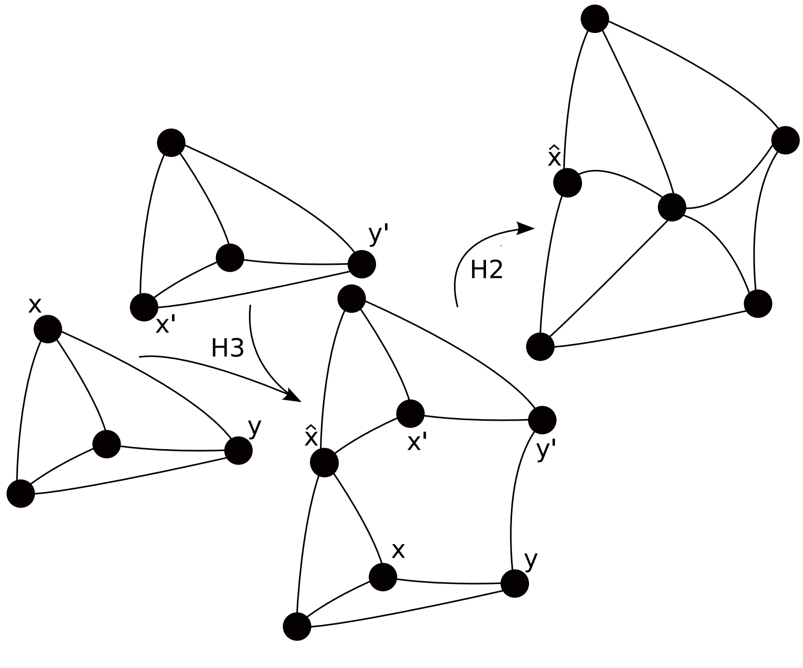
Most pedig megfogalmazunk egy fontos tételt, amely Hajós György nevéhez fűződik.

1. Tétel. *Legyen G egyszerű gráf. $\chi(G) \geq k$ akkor és csak akor teljesül, ha G megkapható K_k példányaiból (H1), (H2) és (H3) segítségével (K_k teljes k pontú gráf).*

A bizonyítandó egyik iránya az előző észrevételből következik. A másik irányt pár példa bemutatása után igazoljuk.

Példa. Legyen G egy gráf, amelyben van k-klikk (és így $\chi(G) \geq k$ teljesül rá).
Ekkor G egyetlen K_k-ból csak (H1) alkalmazásával megkapható.

Példa. Az alábbiakban az 5-keréknek nevezett gráfot gyártjuk le K_4-ekből.

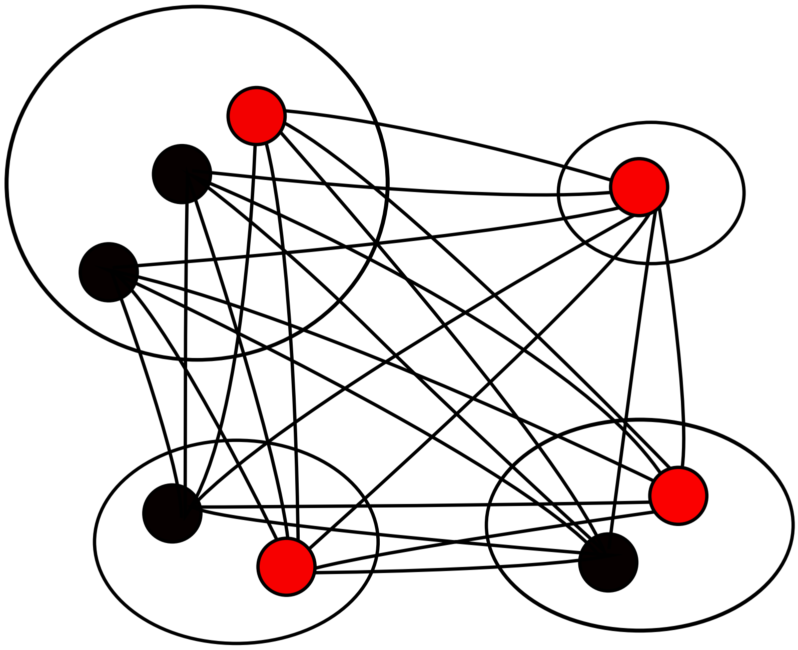


7. ábra.

Ez bizonyítja, hogy az 5-kerék nem három színezhető. Ez persze látható a Hajós-elmélet nélkül is. Igazoljuk így is!

A bizonyítás megkezdése előtt tekintsünk egy olyan fontos definíciót, amely a tétel bizonyításához elengedhetetlenül szükséges.

Definíció. A teljes r-részes részgráfot definiáljuk a következőképpen: A V csúcshalmaz r diszjunkt, nem-üres részből áll. Két csúcs akkor és csak akkor szomszédos, ha különböző részbe esnek.



8. ábra. Egy teljes 4-részes gráf. Minden részből egy-egy csúcsot kivéve 4-klikket kapunk.

A teljes r-részes gráfok egy alternatív definíciója a következő: olyan gráfok, amelyben a „nem összekötöttnek dvagy egyenlőnek lenni” reláció ekvivalenciareláció.

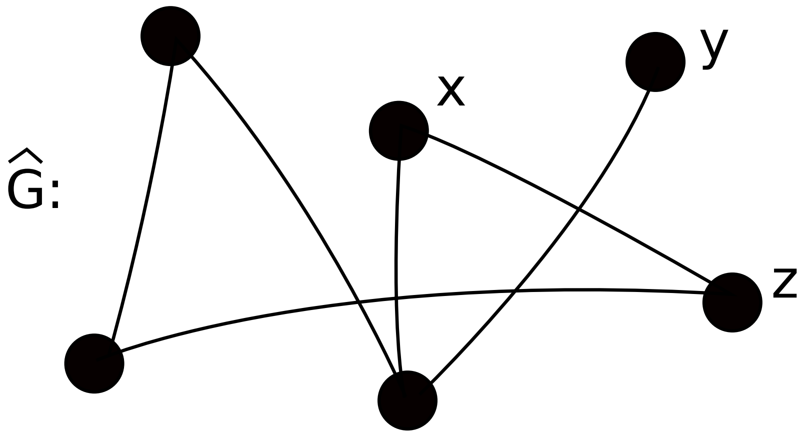
Most pedig tekintsük az 1. tétel bizonyítását.

Bizonyítás. Indirekten bizonyítunk, azaz tegyük fel, hogy létezik ellenpélda, legyen ez a G^- gráf. G^--hoz adjunk éleket addig, amíg megtehetjük az ellenpéldaság megtartásával. Legyen $\hat{G}$ az így kapott gráf.

$\chi(\hat{G}) \geq k$, de $\hat{G}$ nem kapható meg K_k-ból Hajós-módon.

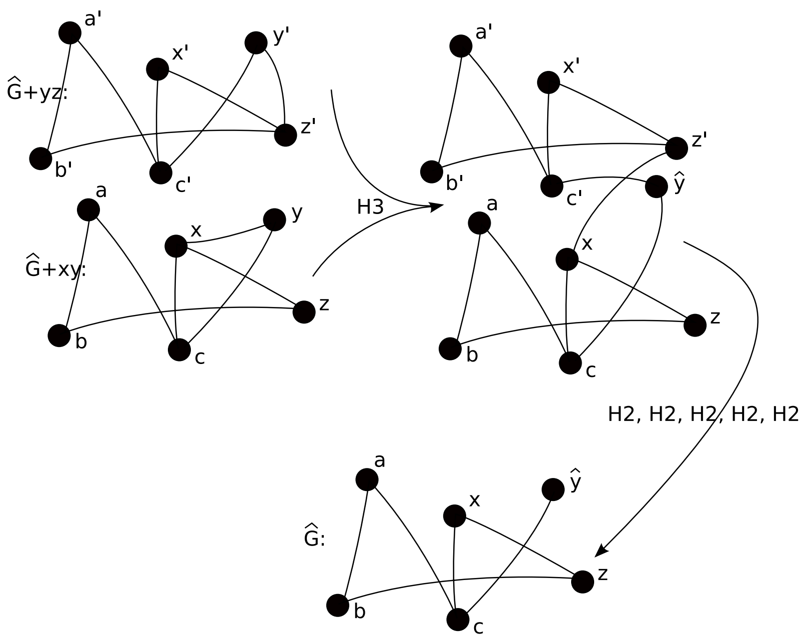
Egy teljes r-részes G gráf nem lehet ellenpélda. Ugyanis ekkor $\chi(G) \geq k$ miatt a nem üres osztályok száma legalább k, így létezik benne k elemű klikk, amelyből következik, hogy létezik Hajós-féle felépítése. Tehát $\hat{G}$ nem teljes r-részes gráf, azaz a „nem összekötöttnek vagy egyenlőnek lenni” nem ekvivalenciareláció. Ez csak úgy lehet, ha nem tranzitív reláció. Azaz alkalmas x, y nem szomszédos és y, z nem szomszédos csúcsok esetén x és y szomszédos.

$\hat{G}$ maximális ellenpélda, élhozzáadással megszűnik az ellenpéldasága: $\hat{G} \dot{+} xy$ és $\hat{G} \dot{+} yz$ nem ellenpélda. Azaz $H \cong \hat{G} \dot{+} xy$ és $H' \cong \hat{G} \dot{+} yz$ is Hajós konstrukcióval legyártható. (H csúcsai $\{x, y, z, \ldots\}$, H' csúcsai $\{x', y', z', \ldots\}$, ahol $a \mapsto$ a természetes megfeleltetés.



9. ábra. x, y, z a nem teljes r-részesség miatt ott van minden ellenpéldában

Az xy és $y'z'$ élpárra alkalmazzuk a H3 operációt, majd minden $(a,)$ párra ($a \in V(H) \setminus \{y\}$) alkalmazzuk a (H2) műveletet.



10. ábra. Példa a Hajós-tétel bizonyítására

amelynek során végeredményként megkapjuk a $\hat{G}$ gráfot. Így ez is Hajós-legyártható, ellentmondásra jutottunk. A tételt beláttuk. ∎