Gráfok színezése
Diszkrét matematika 2009/10 ősz, 9. előadás

A jegyzetet készítette: Szabó Tamás

2009. november 9.

1. Alapfogalmak

Egy gráf csúcsait vagy éleit bizonyos esetekben szeretnénk különböző osztályokba sorolni úgy, hogy a szomszédos csúcsok, illetve a közös végponttal rendelkező élek különböző osztályokba tartozzanak. Erre példa, ha egy gráf párosságát két csúcsosztály, A és F kijelölésével szeretnénk szemléltetni. Egy ilyen felosztást könnyen ábrázolhatunk, ha a a csúcsokat, illetve éleket különböző színekkel színezzük ki. A problémakör neve ezt a terminológiát tükrözi.

Definíció. Egy G gráf P palettával történő *csúcs-*, illetve *élszínezésén* egy

$$c : V(G) \to P, \text{ illetve } \gamma : E(G) \to P$$

leképezést értünk. Ekkor a $v \in V(G)$ csúcs, illetve az $e \in E(G)$ él *színének* nevezzük a $c(v)$, illetve $\gamma(e)$ értéket.

Megjegyzés. Szemléletesen a P paletta elemei színek. Mivel véges sok szín van, ezért általában a pozitív egész számok részhalmazait szoktuk palettának használni.

Definíció. Egy csúcsszínezést *jónak* nevezünk, ha bármely két szomszédos csúcs színe különböző. Egy élszínezést *jónak* nevezünk, ha bármely két, közös végponttal rendelkező él színe különböző.

Megjegyzés. Mindkét definícióban problémát okoz, ha a gráfban hurokélek is szerepelnek. Ekkor bizonyos csúcsok szomszédosak magukkal, továbbá egy él két végpontja egybeesik. Ezért a színezési problémakör további részében

csak hurokélmentes gráfokkal foglalkozunk.

Megállapodásunk után természetesen minden gráfnak van jó csúcs- és élszínezése is. Így triviálisan jó megoldás, ha minden csúcs, illetve él színe különböző. Az egyik fontos kérdés a paletta méretének minimalizálása lesz.

Definíció. Egy G gráf $\chi(G)$-vel jelölt *kromatikus számán*, illetve $\chi_e(G)$-vel jelölt *élkromatikus számán* a legkisebb olyan palettaméretet értjük, amelyre G jól csúcs-, illetve élszínezhető.

Mivel a színezés értékkészlete minden esetben véges, ezért segítségével ekvivalenciaosztályokat határozhatunk meg a gráf csúcs- és élhalmazán. Jelöljük az osztályozást C-vel, a C_i-vel jelölt i-edik osztály legyen $C_i = c^{-1}(i)$.

Csúcsszínezés esetén nyilvánvalóan $k = |c(V(G))|$ osztályra osztottuk fel a G gráf csúcshalmazát. A színezés akkor jó, ha az egyes osztályokon belüli pontok függetlenek. Hasonló eljárással osztályozhatjuk a gráf éleit is, ebben az esetben akkor lesz jó a színezés, ha az osztályok párosítások.

2. 3-reguláris, kétszeresen élösszefüggő síkgráfok élszínezései

Korábban láttuk, hogy egy 3-reguláris, kétszeresen élösszefüggő gráfban mindig található teljes párosítás. Ennek a szakasznak a célja az, hogy bebizonyítsunk egy erősebb állítást akkor, ha a gráf síkba rajzolható. Először tekintsük át a gráfok lerajzolásaival kapcsolatos fogalmakat

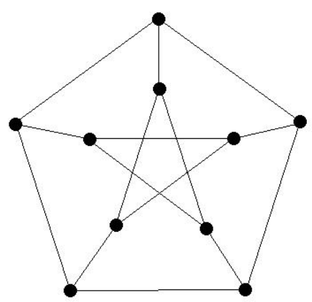
Definíció. Egy G gráf *lerajzolásán* egy (ϕ_V, ϕ_E) leképezésegyüttest értünk, ahol ϕ_V a gráf csúcsaihoz a sík pontjait, ϕ_E pedig a gráf éleihez a sík nem önátmetsző folytonos görbéit rendeli hozzá olyan módon, hogy ha az e él x-et és y-t köti össze G-ben, akkor $\phi_E(e)$ a $\phi_V(x)$ és $\phi_V(y)$ pontokat köti össze.

A definíció még mindig megenged különböző patologikus eseteket, ezért bizonyos olvashatósági feltevéseket tennünk kell: ilyen például, hogy egyik csúcs képe se legyen valamely él képének belső pontja, továbbá ha két él nem metszi egymást, akkor ne is érintkezzenek. A folytonos görbék osztálya sokszor túl általános, praktikus okokból megkövetelhetjük például, hogy minden él képe töröttvonal legyen.

E szerint a definíció szerint még minden gráfnak van lerajzolása. Ha egy további korlátozó feltételt teszünk, akkor már egy valódi gráfosztályhoz jutunk.

Definíció. Egy lerajzolást *szépnek* nevezünk, ha nincs átmetsző élgörbepárja. Egy G gráfot *síkgráfnak* nevezünk, ha van szép lerajzolása.

Habár „érezhető”, hogy van olyan gráf, amely nem síkgráf, bebizonyítani ezt nem annyira egyszerű. Klasszikusan ilyen például a „3 testvér - 3 kút”/„3 ház - 3 kút” problémájának gráfja, illetve az 1. ábrán látható Petersen-gráf. Ennek szép



1. ábra. A Petersen-gráf

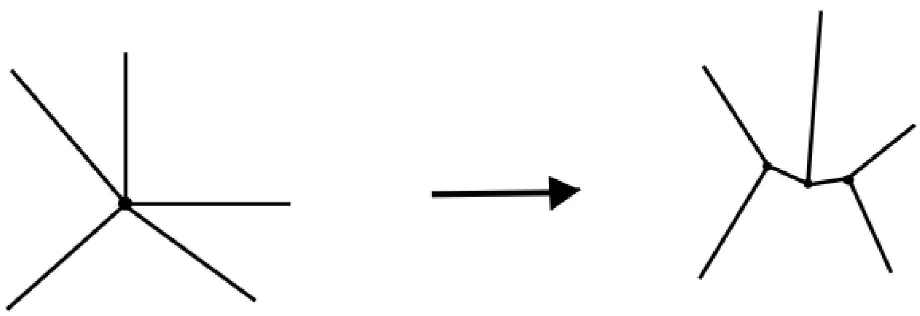
lerajzolása azt jelentené, hogy a K_5 ötcsúcsú teljes gráfot is le tudjuk szépen rajzolni, amennyiben a lerajzolásban a fenti ábra belső és külső 5-5 pontját értelemszerű módon „összeolvasztjuk”.

Az ötcsúcsú teljes gráf azonban nem rajzolható síkba. Ehhez gondoljuk meg, hogy először mindenképpen le kell rajzolnunk egy Hamilton-kört, amely két tartományra osztja a síkot. A belső és a külső tartományban is legfeljebb 2-2 nem átmetsző élt tudunk berajzolni, holott a gráf lerajzolásához a Hamilton-körön kívül még 5 élt be kéne húznunk.

Egy síkgráf élgörbéi természetes módon osztják tartományokra a síkot (ezek közül az egyik szükségképpen nem korlátos lesz). Ezekre ugyanúgy definiálhatunk színezést, mint a csúcsokra és élekre. A jó színezéshez definiálnunk kell továbbá a szomszédosságot a tartományok között. Két tartományt eszerint *szomszédosnak* mondunk, ha van közös határoló élgörbéjük. A gráf kétszeres élösszefüggősége azt jelenti, hogy nincs olyan élgörbe, amelynek mindkét oldalán ugyanaz a tartomány van, azaz nincs olyan tartomány, amely önmagával határos – ez nyilván megakadályozná a jól színezést, akárcsak egy hurokél a csúcsszínezést.

1. Lemma. *Bármely G 3-reguláris, kétszeresen élösszefüggő gráf szép lerajzolásának tartományai 4 színnel jól színezhetők.*

Megjegyzés. Az állítás a jóval általánosabb *négyszíntétel* (Kenneth Appel, Wolfgang Haken, 1976) következménye, amely ugyanezt állítja 3-regularitás nélkül. Igazából lemmánk a négyszíntétellel ekvivalens. Vegyük észre ugyanis, hogy a 3-regularitás kérdése könnyen kezelhető: ha egy csúcsban 3-nál több él is találkozik, kis átalakítással kaphatunk egy 3-reguláris gráfot, amelyben minden tartomány szomszédos minden korábbi szomszédjával, tehát az erre a gráfra kapott színezés az eredeti gráfra is megfelelő lesz.



2. ábra. Átalakítás 3-reguláris gráffá

A gráfok színezései közül az egyik legszemléletesebb a csúcsszínezés, ezért szeretnénk a négyszíntétel problémáját is átfogalmazni a csúcsszínezések nyelvére. Erre szolgál a duális fogalmának bevezetése.

Definíció. Legyen G egy szépen lerajzolt gráf. A gráf *duálisának* azt a G^* gráfot nevezzük, amelynek csúcsai a lerajzolás tartományai, élei pedig a lerajzolás éleinek feleltethetők meg oly módon, hogy ha a lerajzolásban az e él elválasztja az s és t tartományokat, akkor a duálisban az e^* él összeköti az s^* és t^* csúcsokat.

Megjegyzés. A definícióban nem véletlen, hogy mindig a lerajzolásra hivatkoztunk: egy gráf két különböző lerajzolásához különböző duálisok tartozhatnak.

Definíció. Azt mondjuk, hogy a G gráfnak az e él *elvágó éle*, ha e elhagyásával G valamelyik komponense szétesik. Ez a lerajzolásban megfelel annak, hogy e két oldalán ugyanaz a tartomány van, tehát a duálisban e^* hurokél.

Látható, hogy a G gráf elvágóél-mentessége a feltehető összefüggőséggel együtt pontosan a kétszeres élösszefüggőséget jelenti, ami így ekvivalens a duális hurokélmentességével. A duális jó csúcsszínezése nyilvánvaló módon ekvivalens a lerajzolás jó tartományszínezésével. A duális 3-regularitása ekvivalens azzal, hogy az eredeti gráf triangulált, azaz tartományai háromszögek. Ennek segítségével kimondhatjuk a következő lemmát.

2. Lemma. *Bármely hurokélmentes G síkgráf kromatikus száma legfeljebb 4.*

A csúcsszínezésekre vonatkozó állítást elég triangulált síkgráfokra belátni, így a lemma a négyszíntétel ekvivalens alakja – sőt, ez a négyszíntétel megszokott alakja.

Most már kimondhatjuk a 3-reguláris kétszeresen élösszefüggő síkgráfok élkromatikus számáról szóló tételt.

3. Tétel. *Legyen G egy 3-reguláris, kétszeresen élösszefüggő síkgráf. Ekkor G élkromatikus száma 3, azaz élhalmaza felbontható három diszjunkt teljes párosításra.*

Bizonyítás. Az 1. lemmára hivatkozunk. Vegyük a gráf egy szép lerajzolását és színezzük ki az 1, 2, 3, 4 színekkel a tartományokat. Az első párosítást azon élek alkotják, amelyek 1-es és 2-es vagy 3-as és 4-es színű tartományokat választanak el. A másodikat azok, amelyek 2-es és 4-es vagy 1-es és 3-as színűeket, a harmadikat pedig azok, amelyek 1-es és 4-es vagy 2-es és 3-as színűeket. A 3-regularitás miatt minden csúcsban három tartomány találkozik, amelyek három különböző színnel vannak színezve. Így ha két él közös csúcsba fut be, van egy olyan tartomány, amelyet mindketten határolnak, tehát az egyik oldalukon lévő színnek meg kell egyeznie. A másik oldalukon lévő színek viszont nem egyezhet meg, mivel két különböző, szomszédos tartományhoz tartoznak. Ez azt jelenti, hogy a fenti élosztályokon belül az élek függetlenek kell hogy legyenek, az osztályok pedig láthatóan lefedik a teljes élhalmazt. □

3. Páros gráfok élkromatikus száma

A következőkben páros gráfok élkromatikus számára akarunk becslést adni. Mint az imént, most is az egyszerűbb reguláris esettel kezdjük a vizsgálatot.

4. Lemma. *Legyen G egy k-reguláris páros gráf. Ekkor G élkromatikus száma k.*

Bizonyítás. A lemmát egy segédállítással bizonyítjuk be, amely szerint $k \geq 1$ esetén egy k-reguláris páros gráfban mindig van teljes párosítás. Ezt a következőképp láthatjuk be: a csúcsosztályok szokásos jelölésével a gráf élszáma

$$E = k \cdot |A| = k \cdot |F|.$$

A lefogási problémát így minimum $|A|$ db csúccsal lehet megoldani, a párosság miatt azonban ennyi elég is. A Kőnig-tétel szerint pedig ekkor létezik teljes párosítás.

A lemma bizonyítása innentől k szerinti teljes indukcióval elvégezhető. Keressünk egy teljes párosítást a gráfban, ennek éleit színezzük ki a k színnel. A megmaradt, még színezetlen élekkel a csúcsok egy $k-1$-reguláris páros gráfot alkotnak, amely az indukciós feltevés szerint $k-1$ színnel színezhető, $k=0$-ra pedig a lemma triviálisan teljesül. □

A lemma segítségével bizonyíthatjuk a következő tételt:

5. Tétel. *Legyen G páros gráf. Ekkor*

$$\chi_e(G) = \Delta(G),$$

ahol $\Delta(G)$ a maximális fokszámot jelöli.

Bizonyítás. Az nyilvánvaló, hogy $\chi_e(G) \geq \Delta(G)$, hiszen a legnagyobb fokszámú csúcsba összefutó élek mind különböző színűek kell hogy legyenek. Elég tehát a másik irányú egyenlőtlenséget igazolni. Legyenek G csúcsosztályai A és F. Ha $|A| \neq |F|$, akkor a kisebb osztályhoz vegyünk hozzá annyi csúcsot, hogy a két osztály elemszáma megegyezzen. Legyen $k = \Delta(G)$. Ha a gráfnak $k \cdot |A| = k \cdot |F|$-nél kevesebb éle van, akkor mindkét csúcsosztályban van olyan csúcs, amelynek foka k-nál kisebb, ugyanis az élek száma az osztályokon belül vett fokszámösszeg és minden fokszám legfeljebb k. Ezt a két csúcsot kössük össze egy újabb éllel, és ezt folytassuk mindaddig, amíg egy k-reguláris $\hat{G}$ gráfot nem kapunk. A 4. lemma szerint $\hat{G}$ élkromatikus száma k. G élei azonban $\hat{G}$-nak is élei és ha két él G-ben közös csúcsba fut össze, akkor $\hat{G}$-ban is. Így kaptuk, hogy G élei jól színezhetők k színnel, ami $\chi_e(G) \leq k = \Delta(G)$-t jelenti. □

4. További élszínezési tételek

Az élszínezésekről szóló egyik legerősebb tétel Vizing tétele, amelynek bizonyítása a 10. előadásra maradt:

6. Tétel (Vizing, 1964)**.** *Ha G egyszerű gráf, akkor*

$$\Delta(G) \leq \chi_e(G) \leq \Delta(G) + 1$$

Megjegyzendő, hogy az állításban a gráf egyszerűsége szükséges feltétel, ha például egy háromszöget veszünk, amelynek minden oldala k párhuzamos élből áll, világos, hogy minden él különböző színű kell hogy legyen, holott a maximális fokszám csak $2k$. Shannon tétele azt mondja ki, hogy ez a „legrosszabb" eset, az élkromatikus szám és a maximális fokszám eltérése itt lesz a legnagyobb.

7. Tétel (Shannon, 1949)**.** *Ha G tetszőleges gráf, akkor*

$$\Delta(G) \leq \chi_e(G) \leq \frac{3}{2}\Delta(G)$$

Vizing tétele után tudjuk, hogy egy adott G egyszerű gráf élkromatikus száma vagy $\Delta(G)$, vagy $\Delta(G) + 1$. A két lehetőség közti döntés azonban nagyon nehéz. Bizonyítás nélkül megemlítjük, hogy egyszerű gráfokra a „$\Delta(G)$-élszínezhető" tulajdonság NP-teljes.