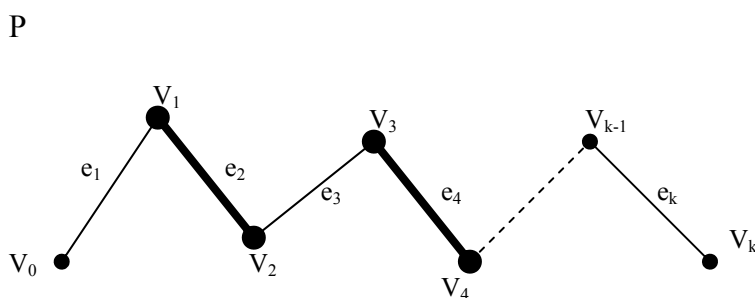


GRÁFELMÉLET

7. előadás

Javító utak, javító utak keresése, Edmonds-algoritmus

Definíció: egy P utat javító útnak nevezünk egy M párosításra nézve, ha az út páratlan hosszú, kezdő- és végpontjai nem párosítottak, és minden páros sokadik éle eleme az M párosításnak (\Rightarrow minden páratlan sokadik éle nem eleme az M párosításnak, 1. ábra).



1. ábra: Javító út

Javító utak segítségével egy M_0 kezdeti párosításból kiindulva újabb párosításokat kaphatunk, amelyek jobbak, mint az előző, és valahány iteráció elteltével az optimális M megoldást kaphatjuk meg. Egy párosítás javítása alatt a párosított és nem párosított élek cseréjét értjük az út mentén. Ezt formalizálja a következő lemma:

Lemma: Legyen G egy gráf, M párosítás G -ben. Ha P javító út M -re nézve, akkor M nem optimális elemszámú párosítás.

Bizonyítás: Legyen $M' = (M \setminus E(P)) \cup (E(P) \setminus M) = M \Delta E(P)$ egy párosítás. Ekkor $|M'| = |M| + 1$

Ez alapján megadható egy egyszerű bővítő eljárás: ha egy éllel az M párosítás bővíthető, akkor ez egy 1 hosszú javító útnak tekintendő. Ekkor M' megkapható úgy, hogy M -hez hozzávesszük ezt az élt. Állításunkat a következő lemma foglalja össze:

Lemma (Berge): Legyen G egy gráf, M párosítás G -ben. Ha M nem optimális, akkor létezik rá vonatkozó javító út.

A fenti két lemmából megkonstruálható egy maximális párosítást kereső eljárás. A továbbiakban bemutatjuk a javító utak keresésének egy mohó változatát. Ez egy fázisokra osztott címkézési eljárás. Előbb azonban meg kell adnunk a javító út kezdemény definícióját.

Definíció: egy P utat javító út kezdeménynek nevezünk, ha „elképzeltető” róla, hogy javító út kezdete. Formálisan: $v_0, e_1, v_1, e_2, v_2, \dots, v_{k-2}, e_{k-1}, v_{k-1}, e_k, v_k$ egy (M -re vonatkozó) javító út kezdemény, ha v_0 párosítatlan, és minden páros indexű él eleme M -nek.

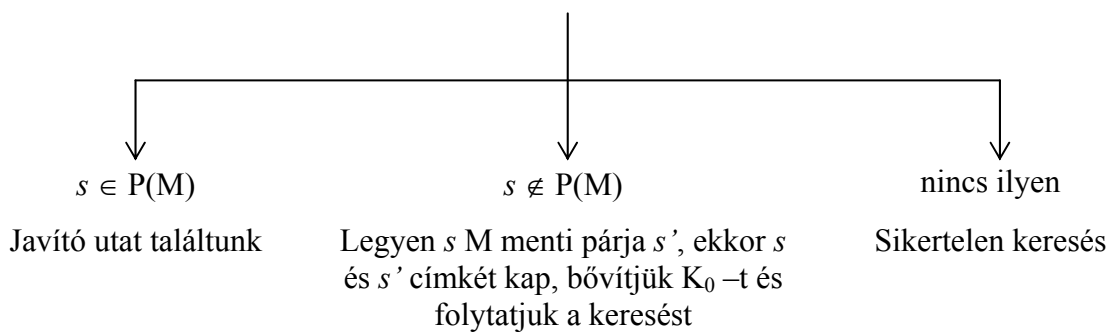
Egy párosítatlan csúc által alkotott egy hosszú sorozat egy 0 hosszú javító út kezdemény. A mohó javító út kereső algoritmus ilyen javító út kezdeményeket növel. Amennyiben eljutunk egy még párosítatlan csúcshoz, akkor találtunk egy javító utat. Az algoritmus mohó jellege abból fakad, hogy ha találtunk egy csúcshoz vezető javító út kezdeményt, akkor ez a csúc más javító út kezdemények növelésére nem használható fel.

Mohó javító út kereső algoritmus:

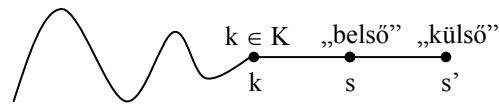
Kiindulunk 0-hosszú javító út kezdemények halmazából, $K_0 \subseteq P(M)$, ahol $P(M)$ a párosítatlan csúcsok halmaza.

– címkézési eljárás: ha egy x csúcsba vezető javító út kezdeményt találunk, akkor címkézzük meg x -et: „külső”-vel, ha páros hosszú az út, és „belső”-vel, ha páratlan. Címkéket csak eddig még nem címkézett pontoknak osztunk. Definiáljuk a következő halmazokat: $K = \{\text{„külső” címkéjű pontok}\}$, $B = \{\text{„belső” címkéjű pontok}\}$, $C = \{\text{címkézett pontok}\} = K \cup B$.

– címkénövelő eljárás: keressünk egy k külső pontnak egy címkézetlen s szomszédját, azaz olyan $ks \in E(G)$ -t, ahol $k \in K$ és $s \notin C$. Ekkor három eset lehetséges:



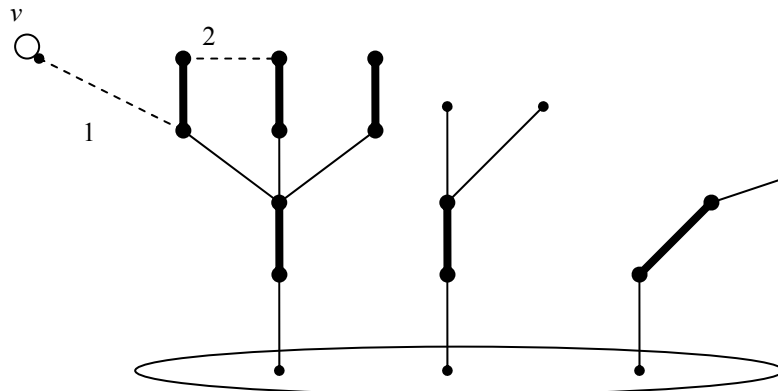
A keresés során mindig szomszédos pontokra lépünk. k után a címkék M -beli párokban jönnek, a „középső” eset miatt (2. ábra). Ebből adódik, hogy címke kiosztásnál s' is szükségszerűen címkézetlen csúc.



2. ábra: Címkenövelés

A keresés során bejárt irányított élek meghatároznak egy keresési erdőt. Ennek minden komponense K_0 valamelyik csúcsában gyökereztetett fa. A fa „2-hosszú ágak” hajtásával növekszik a külső pontokból.

A fenti algoritmus egy naiv algoritmus. A sikertelen futás nem jelenti azt, hogy nincs javító út a gráfban. A mohó jelleg miatt bizonyos javító út kezdeményeket nem veszünk figyelembe. Lehetséges, hogy a keresés egy v csúcsot „belső” pontként ér el. Ekkor a keresés következő lépése előírt, v v' párja felé halad tovább és v más szomszédja felé nem megy el. Egy esetleg kihagyott javító út kezdemény v -t külső pontként éri el. Ennek a lehetőségnek a kihagyása eredményezheti a sikertelenséget.



3. ábra: Példa sikertelen keresésre (létezik javító út)

A fenti ábrán látható egy sikertelen keresés. Az 1-es fázisban v -t külső pontként eléri, és címkét kap, azonban látható, hogy létezik javító út. Ezt akkor találnánk meg, ha a 2-es fázis szerint haladnánk v felé (a javító út keresése letről felfelé halad).

Megjegyzés: Tegyük fel, hogy G páros, és $K_0 = P(M) \cap A$. Ekkor ha a keresés sikertelen, akkor nincs javító út.

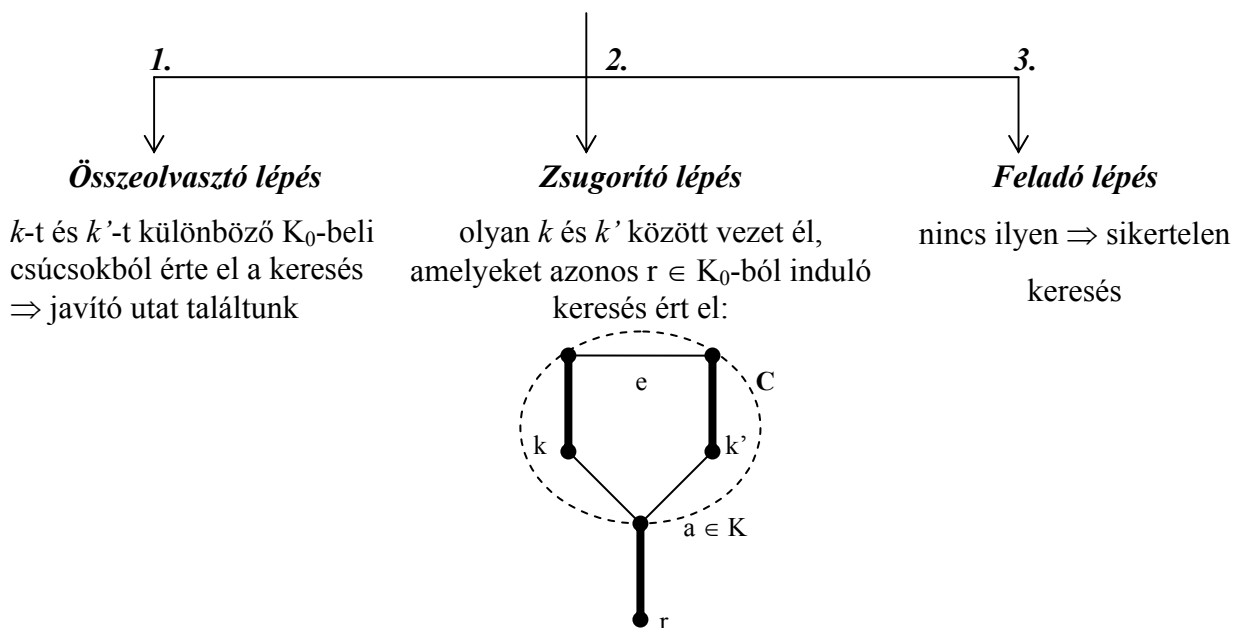
Az előbb megismert algoritmus páros gráfokra működik. A következőkben megismerünk egy olyan algoritmust, ami általános gráfokban keres javító utat.

Edmonds-algoritmus

Kiindulunk 0-hosszú javító út kezdemények halmazából, $K_0 \subseteq P(M)$, ahol $P(M)$ a párosítatlan csúcsok halmaza.

– hajtsuk végre a fentebb megismert címkenövelő eljárást elakadásig (sikertelen keresés, ez mindig be fog következni, mert a keresés az összes párosítatlan pontból indul, és az elért pontokat mindig megcímkézzük, és címkét nem írhatunk át)

– keressünk olyan kk' élt, amelyre $k, k' \in K$. Három lehetőség van:



Ekkor keletkezik egy C kör, az a csúcs az a csúcs, ahol a keresés kettéválik¹. Ekkor a zsugorító lépés következik

– zsugorító lépés: ebben a lépésben egy kör pontthalmazát egyetlen pontba húzzuk össze, majd a kapott új gráfra folytatjuk az algoritmust.

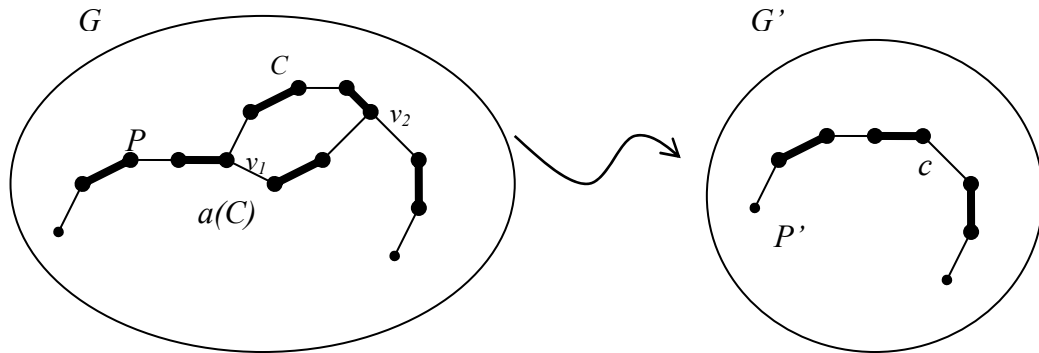
¹ Előadáson azt mondtuk ekkor, hogy „a csiga kidugja a szemeit”

Definíció: Egy G gráfban egy C kör zsugorításán a következő G' gráfot értjük:

$$V(G') = (V(G) \setminus V(C)) \cup \{c\}, \text{ ahol } c \notin V(G) \text{ egy új pont}$$

$$E(G') = E(G) \setminus \{uv \in E(G) : u, v \in V(C)\}$$

$$I(G') = I(G) \mid_{(V(G') \setminus \{c\}) \times E(G')} \cup \{(c, e) : e = xy \in E(G'), x \in V(C)\}$$



4. ábra: Példa zsugorításra

A 4. ábrán látható példán a v_1 és a v_2 végpontok egyesítésével, a köztük futó két élt eltüntetve a C kört egy pontba ejtjük össze². Legyen az M' az M párosítás K -n kívüli éleinek képe G' -ben, továbbá F egy alternáló erdő, amely G részgráfjaiból áll, és F' csúcsai F csúcsainak képe, élei F C -n kívüli éleinek képe. Az algoritmus meghívja önmagát a G' , M' , F' -vel a címkéző lépéssel.

Lemma: M' egy párosítás G' -ben, továbbá F' egy kereső (alternáló) erdő M' -re nézve

Ez a lépés (ti. hogy a címkéző lépéssel folytatjuk) rendkívül fontos. A C kör pontjai közt vannak belső és külső pontok, ezeket mind az új c pont reprezentálja, ami az F' erdőre nézve külső pont. Tehát a C kör belső pontjainak nem címkézett szomszédjai a c (külső) pont szomszédjaiként a keresés számára elérhetőek. A kör összes pontjának egy külső pontként való reprezentálása természetes, mert a kör mindegyik pontjába vezet páros hosszú javító út kezdemény. A kör belső pontjaihoz az elágazási pontból (a pont, lásd az ábra 2. lehetősége) nem az eredeti keresést, hanem a zsugorított kör másik ívét kell venni (lásd 3. ábra 2-es út).

A rekurzív algoritmus kimenete egy javító út egy (többszörösen) zsugorított gráfban, vagy a keresés sikertelenségének felismerése egy (többszörösen) zsugorított gráfban.

² Itt pedig azt mondtuk, hogy „a csiga visszahúzza a szemeit” ☺

1. Lemma: *Ha egy többszörösen zsugorított gráfban van javító út, akkor az eredetiben is.*

2. Lemma: *Ha egy többszörösen zsugorított gráfban az Edmonds-algoritmus a sikertelen keresési ágba jut, akkor nincs javító út, tehát az aktuális M párosítás maximális.*³

Végezetül még egyszer, röviden az Edmonds-algoritmus összefoglalva:

- **Bemenet:** G gráf és egy M párosítás
- **Kimenet:** M maximális elemszámú párosítás
- **Kiinduló lépés:** Legyen $M = \emptyset$
- **Bővítő lépés:** Keressünk M -re vonatkozó javító utat. Ha találunk, akkor az 1. lemma alapján keressünk egy G -belit, és bővítsük ezzel M -et. Ha sikertelen a keresés, akkor M maximális, vége az eljárásnak.

³ Az 1. lemma konstruktív bizonyítása az algoritmus fontos része, e két lemmát a következő órán bizonyítottuk