Gráfelmélet/Diszkrét Matematika MSc hallgatók számára

4. Előadás

Előadó: Hajnal Péter
Jegyzetelő: Magyari Nikolett 2009. szeptember 28.

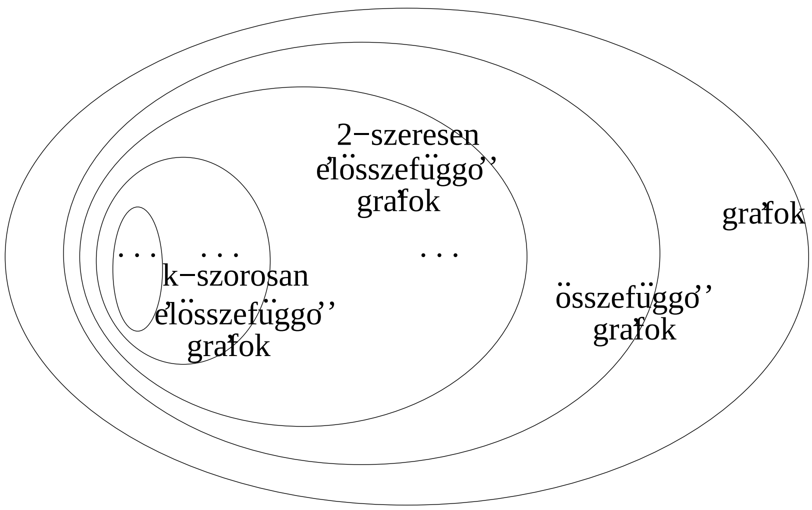
Definíció. *Legyen $k \in \mathbb{N}^+$. Azt mondjuk, hogy G k-szorosan élösszefüggő $\forall F \subseteq E$ esetén, ha $|F| < k$, akkor $G - F$ összefüggő*

Példa. *G 2-szeresen élösszefüggő akkor és csak akkor, ha G összefüggő és $\forall e \in E$ esetén $G - e$ is összefüggő.*

$k = 2$ esetén a szóbajövő F-ek: $\emptyset$, $\{e\}$.

Észrevétel. *G k-szorosan élösszefüggő, akkor G l-szeresen élösszefüggő, ahol $l < k$.*

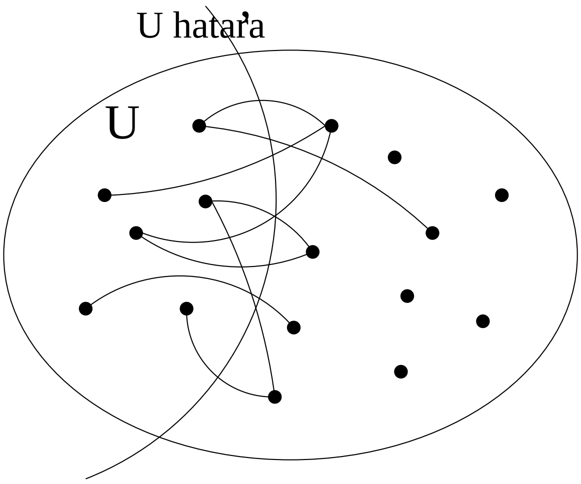
A különböző fokú összefüggőségi fogalmak közötti kapcsolat:
1-szeresen élösszefüggő $\equiv$ összefüggő $\Leftarrow$ 2-szeresen élösszefüggő $\Leftarrow$ 3-szorosan élösszefüggő $\Leftarrow$ ...
Venn-diagrammal:



1. ábra. Az élösszefüggőségi osztályok Venn-diagramja

Jelölés. *$U \subseteq V$. Legyen $\partial U = U$ (él)határa $= \{e = xy \in E : e$ két végét szeparálja $U\}$*
$\equiv \{$azon xy élek halmaza, amit szétvág az $U\} = \{e = xy : (x \in U$ és $y \notin U)$ vagy $(x \notin U$ és $y \in U)\}$.

Példa. *$\partial\emptyset = \partial V = \emptyset$ és $\partial U = \partial\overline{U}$.*
$\partial(\{x\}) = \{$rá illeszkedő nem hurokélek$\}$. Ha például G-ben nincs hurokél, akkor $|\partial(\{x\})| = d(x)$.



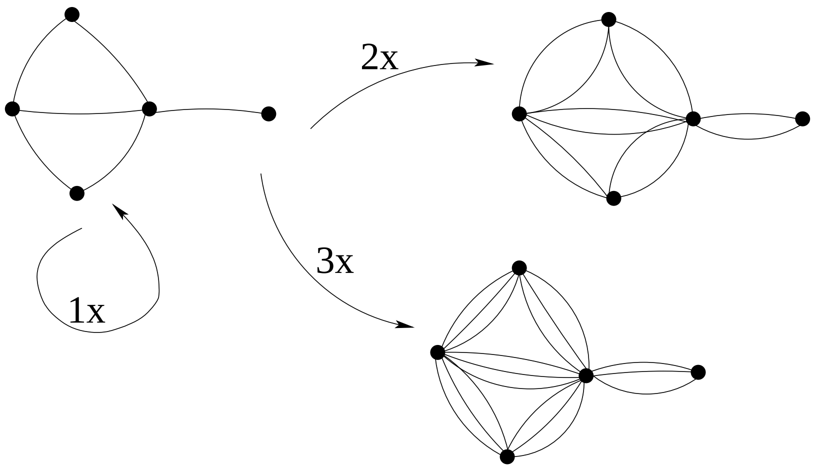
2. ábra. Egy U ponthalmaz (él)határa

Észrevétel. *G k-szorosan élösszefüggő akkor és csak akkor, ha* $\forall U \neq \emptyset, V \; |\partial U| \geq k$.

Megjegyzés. $G \underbrace{\longrightarrow}_{\textit{hurokélek elhagyása G-ből}} G_0$, *G k-szorosan élösszefüggő akkor és csak akkor, ha* G_0 *k-szorosan élösszefüggő.*

Az első példánkhoz egy jelölést vezetünk be:

Jelölés. $k \cdot G$ *gráfhoz G minden élét k párhuzamos élsereggel helyettesítjük.*



3. ábra. Példa egy gráf többszörözésére

Példa. *Legyen G összefüggő. Ekkor* $k \cdot G$ *k-szorosan élösszefüggő.*

Tegyük fel, hogy egy ellenség élek megszüntetésével nem összefüggővé akarja tenni gráfunkat. Ha tudjuk, hogy k-nál kevesebb élt szüntet meg, akkor az élek k-szorozásával összefüggő gráfunk "terrorista biztossá" válik.

Példa. *$K_{k+1} = k+1$ pontú teljes gráf k-szorosan élösszefüggő.*

De K_{k+1} nem $(k+1)$-szeresen élösszefüggő. Ehhez fokai túl kicsiek. Az észrevételünk lényegét a következő lemma összegzi.

1. Lemma. *Ha $|V| \geq 2$ és G k-szorosan élösszefüggő, akkor $\forall x \in V$ esetén $d(x) \geq k$.*

Definíció. *Legyen G összefüggő.*

$$\kappa_e(G) = \begin{cases} max\{k : G \text{ } k\text{-szorosan élösszefüggő}\} & G \text{ összefüggő} \\ 0 & G \text{ nem összefüggő.} \end{cases}$$

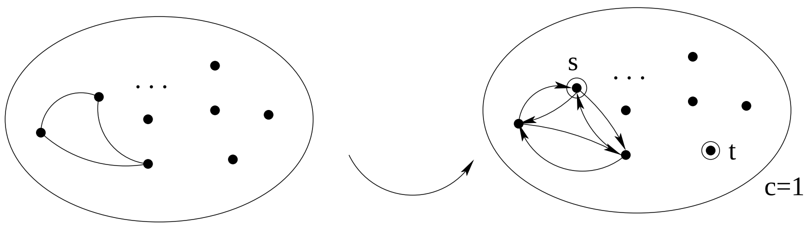
$\kappa_e(G)$-t G élösszefüggőségi paraméterének nevezzük.

Észrevétel.

$$\kappa_e(G) = \min_{U \subseteq V,\ U \neq \emptyset, V} |\partial U|$$

Megjegyzés. *$\kappa_e(G)$ hatékony módon kiszámolható.*

A 0.11. Észrevétel igazolásához az alábbi módon G-ből $\overleftrightarrow{G}$ irányított gráfot képezünk:



4. ábra. Hálózat készítése egy gráfból

Emlékeztető: $\mathcal{V} = (S, T)$ vágás, ahol $s \in S$ és $t \in T$.
$c(\mathcal{V}) = \sum\limits_{x \in S,\ y \in T} c(e), \qquad e = \overrightarrow{xy}, \qquad c(\mathcal{V}) = |\partial S|.$
Továbbá Folyam algoritmussal

$$\min_{\mathcal{V}=(S,T) \text{ szétvágja } s-t \text{ csúcspárt}} c(\mathcal{V}) \qquad \text{meghatározható.}$$

$$\min_{U \neq \emptyset,\ V} |\partial U| = \min_{s \neq t} \min_{S:\ \text{szétvágja } s-t\text{-t}} c(\mathcal{V}), \text{ ahol } s \in S,\ t \notin S.$$

Definíció. *G minimális k-szorosan élösszefüggő gráf akkor és csak akkor, ha k-szorosan élösszefüggő és $\forall e \in E$ esetén $G - e$ már nem k-szorosan élösszefüggő.*

Példa.

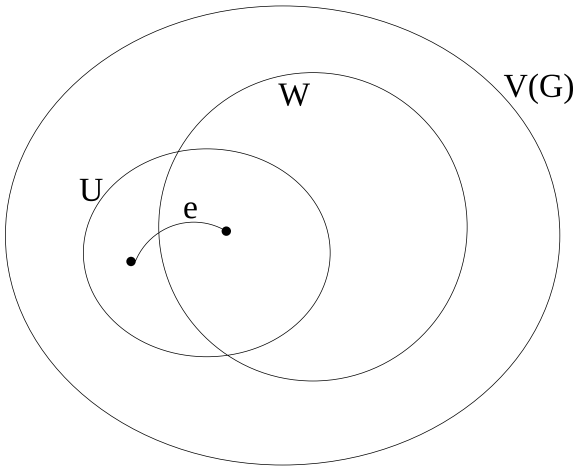
- *K_{k+1}, mivel bármely élt elhagyjuk, akkor k alá csökken a két csúcs fokszáma, így megszűnik a k-szoros élösszefüggőség.*
- *$k \cdot T$, ahol $T =$ fa (minimális összefüggő gráf) és ennek a többszörözött fának, ha elhagyjuk az egyik élét, akkor a mellette fekvő $k-1$ élpár elhagyására szétesik.*

2. Tétel. *G minimális k-szorosan élösszefüggő gráf, akkor G-ben van k fokú csúcs.*

$k = 1$-re (fák esete) tudjuk az állítást.

Bizonyítás. Először bevezetünk egy fogalmat: Ha $U \neq \emptyset, V$ és $|\partial U| = k$, akkor azt mondjuk, hogy U pontos. **Célunk**, hogy egy elemű pontos U-t találjunk. U legyen egy minimális (nem üres) pontos halmaz.

- U-n belül nem halad él. Ekkor $|\partial U| \geq k|U|$, ahol $|\partial U| = k \Rightarrow |U| = 1$.
- U-n belül halad e él. Ekkor $G - e$ nem k-szorosan élösszefüggő $\Rightarrow \exists W \subseteq V$, ahol $W \neq \emptyset, V$ illetve $|\partial_{G-e} W| < k$ és $|\partial_G W| \geq k \Rightarrow W$pontos G-ben, x, y-t elválasztja. Feltehető, hogy $x \in W$, $y \notin W$.



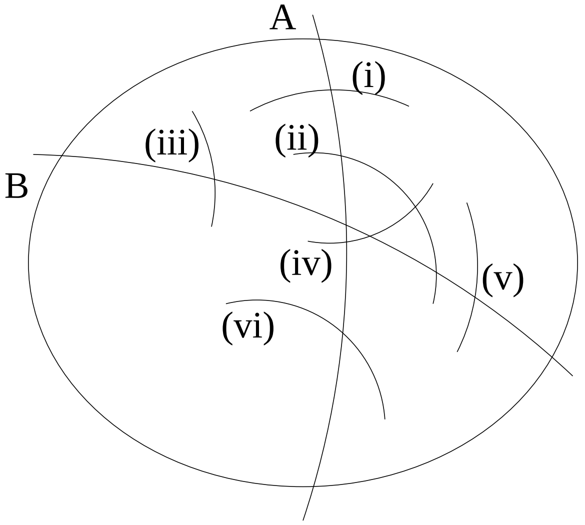
5. ábra. Az e él és a hozzátartozó két pontos halmaz

Vezessük be a következő lemmát a tétel bizonyításához:

3. Lemma. *Legyen $A, B \subseteq V(G)$, akkor*
$|\partial(A \cap B)| + |\partial(A \cup B)| \leq |\partial A| + |\partial B|$.

Lemma ⇒ Tétel. Legyen $A = \overline{U}$ és $B = W$.
$A \cup B \neq V$, hiszen $y \notin A \cup B$. $A \cap B \neq \emptyset$, mert $W \subsetneq U$ nem lehet U minimalitása miatt. Tehát $A \cap B \neq \emptyset, V$ és $A \cup B \neq \emptyset, V$.

G k-szorosan élösszefüggő $\Rightarrow k+k \leq$ Jobb oldal $\overset{\text{Lemma}}{\leq}$ Bal oldal $= k+k$, ahol W és $\overline{U}/U$ pontos halmazok $\Rightarrow \overline{U} \cap W$, $\overline{U} \cup W$ is pontos. $\overline{U} \cup W$ pontos és $\overline{\overline{U} \cup W} \subsetneq U$, amely ELLENTMONDÁS, mert U minimális pontos halmaz volt.
Lemma bizonyítása: Minden élről azt állítjuk, hogy a bal oldalon legfeljebb annyiszor számoljuk meg, mint a jobb oldalon. Ez egyszerű eset analízis:



6. ábra. Nem "ugróélek", nincs szerepük. Ugróéleknek hat darab típusa van.

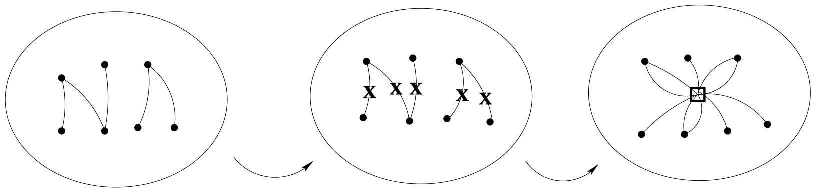
I. $A \cap \overline{B} - \overline{A} \cap \overline{B}$ él. Ilyenek hozzájárulása a jobb oldalhoz +1 és a bal oldalhoz is +1.
II. $A \cap \overline{B} - \overline{A} \cap B$ él. Ilyenek hozzájárulása a jobb oldalhoz +2 és a bal oldalhoz +0.
A további esetek hasonlóan tárgyalhatók.

Megjegyzés. *A bizonyításból következik a következő állítás: Ha U pontos, akkor tartalmaz egy elemű pontos halmazt is. Ezt alkalmazza U és $\overline{U}$-ra, kapjuk a következő következményt:*

4. Következmény. *Egy minimálisan k-szorosan élösszefüggő gráfban van legalább 2 darab k fokú pont.*

Ennél több nem is mondható. Ehhez vegyünk egy P utat és minden élét k-szorozzuk meg. Az út két végpontja lesz a kettő k fokú csúcs, minden más csúcs foka $2k$.

Definíció. *Legyen adott $l \in \mathbb{N}^+$. l élet kiválasztunk és közepeiken felvett egy-egy új csúcsot azonosítjuk egy $\square$ csúcsként. Az új $\square$ csúcs foka $2l$, azaz $d(\square) = 2l$.*



7. ábra. Élösszecsípés, $\ell = 5, k = 10$

5. Lemma. *Legyen k páros. Ekkor, ha G k-szorosan élösszefüggő és*

$$G \underbrace{\longrightarrow}_{\frac{k}{2}=l \text{ él összecsípésével jön}} \widehat{G},$$

akkor $\widehat{G}$ k-szorosan élösszefüggő.

Bizonyítás:
Állítás (lemma) $\equiv U \subseteq V(\widehat{G}) = V(G)\dot{\cup}\{\square\}$, ahol $U \neq \emptyset, V$ és $|\partial_{\widehat{G}} U| \geq k$.
Elég azt az esetet vizsgálni, amikor $\square \notin U$, azaz $U \subseteq V(G)$. Ekkor $|\partial_{\widehat{G}} U| \geq |\partial_G U|$ könnyen ellenőrizhető. Mivel G k-szorosan élösszefüggő, $|\partial_G U| \geq k$.

Definíció. *G-ről azt mondjuk, hogy felépíthető l-élösszecsípés-operációkkal, ha létezik a következő gráfsorozat, amely minden eleme vagy l él összecsípése vagy él hozzáadásával (meglévő két csúcs összekötése) kapható az előző gráfból.*

6. Következmény. *Ha G felépíthető l-élösszecsípés-operációkkal, akkor G k-szorosan élösszefüggő.*

7. Tétel. *Legyen $k = 2l$ és $l \in \mathbb{N}^+ (\Rightarrow k \geq 2)$ és $|V| \geq 2$. G k-szorosan élösszefüggő, akkor és csak akkor, ha G felépíthető l él összecsípéseivel.*

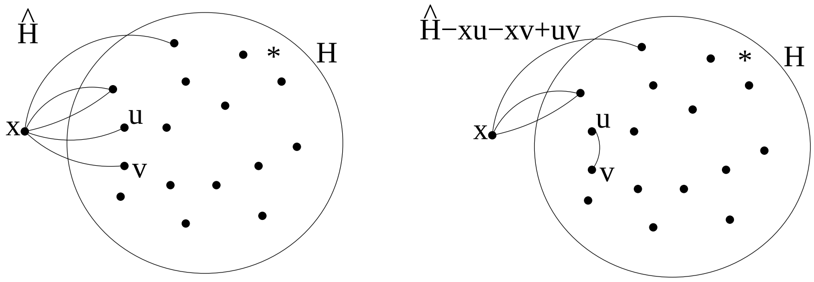
Bizonyítás: "$\Leftarrow$" az előző következmény.

"$\Rightarrow$": Indukció G méretére: $|V|$-ra, azon belül $|E|$-ra. Indukció kezdete: $|V| = 2$, rendben van.

Indukciós feltevés: tudjuk az állítást (kisebb pontszámra, illetve azonos pontszám mellett kevesebb él esetén.) Az indukciós lépés:

- ha G nem minimálisan k-szorosan élösszefüggő gráf, akkor $\exists e \in E$, hogy $G - e$ k-szorosan élösszefüggő. Indukciós feltevés: $G_0 \rightsquigarrow G - e \underbrace{\longrightarrow}_{\text{élhozzáadás}} G$
- G minimálisan k-szorosan élösszefüggő gráf, akkor $\exists x \in V$, hogy $d(x) = k$.

A kv̈etkező lemma adja a kulcsot a befejezśhez.



8. ábra. Lovász-féle "leemelés"

8. Lemma. *(Lovász László)*
Legyen $\widehat{H}$ *az a gráf, amelyet* H*-ból egy új* x *csúcs és* x*-ből* $2s$ H*-hoz vezető él hozzáadásával kapunk.* $(V(\widehat{H}) = V(H)\dot{\cup}\{x\})$.

Legyen $\star$ *a következő tulajdonság: Minden* $U \subseteq V(H)$, *(ahol* $U \neq \emptyset, V$*) esetén* $|\partial U| \geq k(= 2l)$. *Ekkor minden* xu *élhez található olyan* xv *él, hogy a* $\star$ *feltétel megmaradjon a* $\widehat{H} - xu - xv + uv$ *gráfra.*

A tétel hiányzó esete könnyen befejezhető a lemma ismételt alkalmazásával: $G = x - (G - x) \overset{\text{Lemma}}{\Rightarrow} x - G_1 \Rightarrow x - G_2 \Rightarrow \cdots \Rightarrow x - G_l$

G_l-re megőriztük a $\star$ feltételt. x egy izolált csúcs, így $\star$ alapján G_l k-szorosan élösszefüggő. Indukció alapján felépíthető, amiből G egy további összecsippentéssel megkapható.

A lemmát jövő órán bizonyítjuk.

Hasonló felépítési tétel adható k-szorosan élösszefüggő gráfokra páratlan k esetén is.