**Gráfelmélet/Diszkrét Matematika MSc hallgatók számára**

# 4. Előadás

*Előadó: Hajnal Péter*

*Jegyzetelő: Kertész Balázs* 2009. szeptember 28.

## 1. $k$-szoros élösszefüggőség

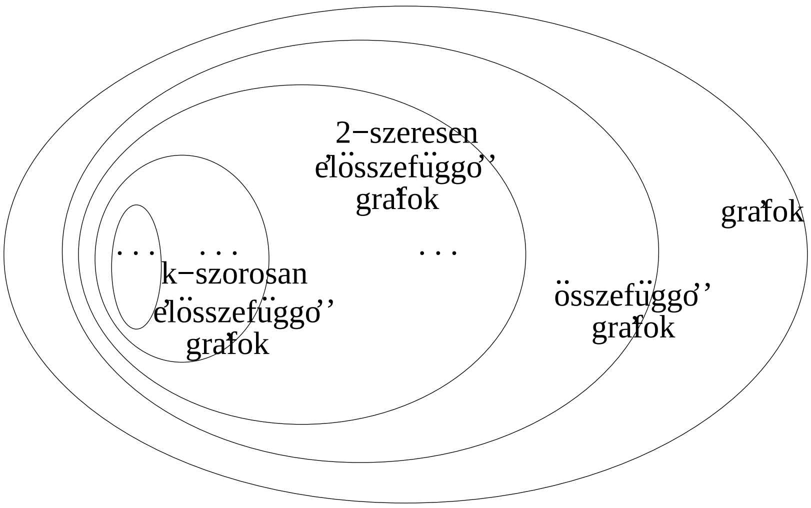
**Definíció.** Legyen $G$ gráf és $k \in \mathbb{N}^+$. Ekkor $G$-t *$k$-szorosan élösszefüggőnek* mondjuk, ha minden $F \subseteq E(G)$ és $|F| < k$-ból következik, hogy $G - F$ összefüggő.

***Példa.*** A $G$ gráf kétszeresen élösszefüggő akkor és csakis akkor, ha $G$ összefüggő és minden $e \in E(G)$ esetén az $e$ él elhagyásával $G$ még összefüggő marad.

***Észrevétel.***

(i) Gráfok egyszeres élösszefüggősége ekvivalens az összefüggőségükkel.

(ii) Legyen $l < k \in \mathbb{N}^+$, ekkor $G$ gráf $k$-szoros élösszefüggőségéből következik, hogy $G$ $l$-szeresen is élösszefüggő. Tehát öf $\equiv$ 1-élöf $\Leftarrow$ 2-élöf $\Leftarrow$ 3-élöf $\Leftarrow \dots$

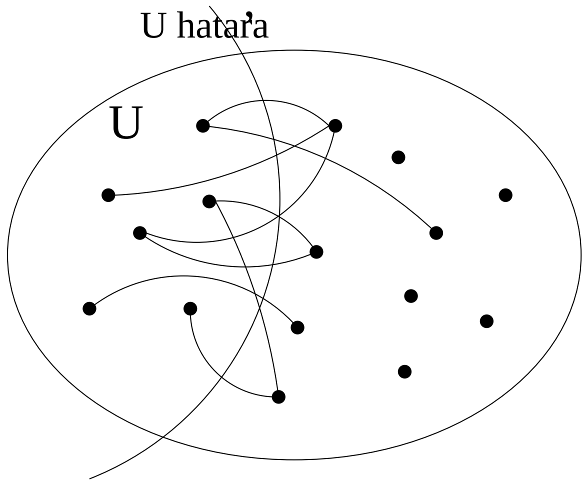



1. ábra. Az élösszefüggőségi osztályok Venn-diagramja

**Jelölés.** Legyen $G$ gráf, ekkor $U \subseteq V(G)$ esetén $U$ *élhatárán* a $\partial U = \{e \in E(G) \colon e$ két végét szeparálja $U\}$ halmazt értjük.

***Észrevétel.*** A $G$ gráf $k$-szorosan élösszefüggő akkor és csakis akkor, ha minden $U \subset V(G)$ csúcshalmazra, amelyre $U \neq \emptyset, V(G)$ fennáll, teljesül, hogy $|\partial U| \geq k$.

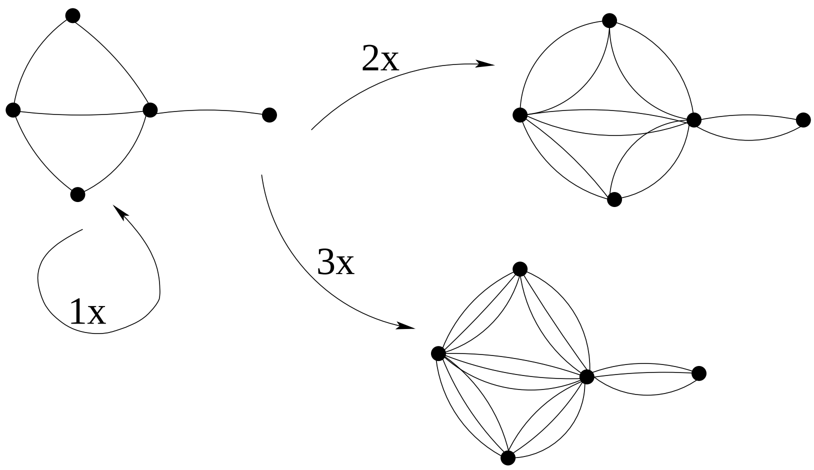
***Megjegyzés.*** $|\partial(\{x\})| = |\{$az $x$-re illeszkedő nem hurokélek$\}| = d(x)$, ha $G$-ben nincs hurokél.




2. ábra. Egy U ponthalmaz (él)határa

$$G \xrightarrow[\text{elhagyása}]{\text{hurokélek}} G_0 \qquad G\ k\text{-szorosan élösszefüggő} \Leftrightarrow G_0 \text{ is } k\text{-szorosan élösszefüggő}.$$

**Jelölés.** $k \geq 1$ egész esetén $G$ gráf minden *élének megk-szorozásán* azt a $k \cdot G$ gráfot értjük, amelyben $G$ minden élét $k$ párhuzamos élsereggel helyettesítjük.




3. ábra. Példa egy gráf többszörözésére

**1. Állítás.** *Tekintsük a $G$ összefüggő gráfhoz tartozó $k \cdot G$ gráfot, $k \geq 1$ egész, ekkor $k \cdot G$ $k$-szorosan élösszefüggő.*

**2. Állítás.** *A $K_{k+1}$, $k+1$ pontú teljes gráf, $k$-szorosan élösszefüggő.*

**3. Lemma.** *Legyen $G$ k-szorosan élösszefüggő gráf esetén $|V(G)| \geq 2$, ekkor $G$ minden $x$ csúcsára $d(x) \geq k$ teljesül.*

**Definíció.** $G$ gráf *élösszefüggőségi paraméterén* a következő mennyiséget értjük,

$$\kappa_e(G) = \begin{cases} \max\{k\colon G \text{ k-szorosan élösszefüggő}\} & G \text{ összefüggő} \\ 0 & G \text{ nem összefüggő.} \end{cases}$$

***Észrevétel.*** $\kappa_e(G) = \min\limits_{\substack{U \subseteq V(G) \\ U \neq \emptyset, V(G)}} |\partial U|$

***Megjegyzés.*** $\kappa_e(G)$ kiszámítható hatékony módon, méghozzá a folyam algoritmussal.

G-ből egy hálózatot készítünk minden élének oda-vissza irányításával és 1 kapacitás hozzárendelésével. Legyen $s$. illetve $t$ egy tetszőleges forrás és nyelő.

***Emlékeztető.*** $\mathcal{V}(G)$ két osztályt tartalmazó partícióját a $G$ gráf vágásának nevezzük, amit $\mathcal{V} = (S, T)$-vel jelölünk; itt $S$ és $T$ a két osztály. A vágás kapacitására a következő egyszerű összefüggést nyerjük:

$$c(\mathcal{V}) = \sum_{\substack{x \in S \\ y \in T}} c(\overrightarrow{xy}).$$

Ezt a fenti konstrukcióra alkalmazva a

$$c(\mathcal{V}) = |\partial S| = |\partial T|$$

eredményt kapjuk.

A folyam algoritmus ($\Leftarrow$ MFMC) meghatározza a $\min\limits_{\substack{S \text{ szétvágja az} \\ s\text{-}t \text{ csúcspárt}}} |\partial S|$ értéket.

$$\min_{U \neq \emptyset, V(G)} |\partial U| = \min_t ( \min_{s \ni S \notin t} |\partial S|)$$

## 2. Minimális $k$-szorosan élösszefüggő gráfok

Az összefüggő gráfok központi szerepet játszanak a gyakorlatban. Optimalizáló kérdések természetesen vezetnek el a fák/minimális összefüggő gráfok vizsgálatához. Ez motiválja a következő fogalmat.

**Definíció.** $G$ gráf *minimális $k$-szorosan élösszefüggő*, ha $k$-szorosan élösszefüggő és minden $e$ élhalmazbeli elemre $G - e$ már nem $k$-szorosan élösszefüggő.

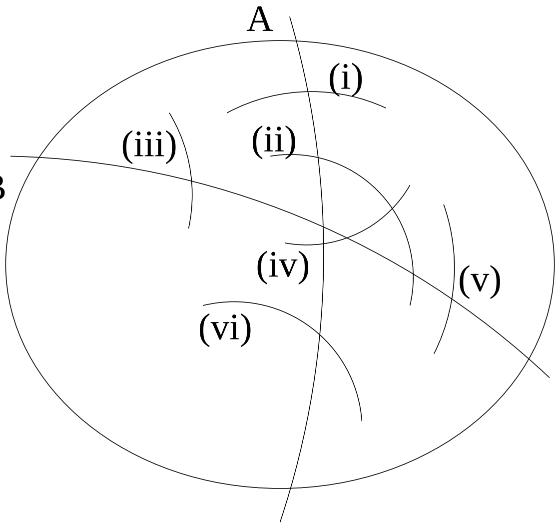
***Példa.*** A $k + 1$ pontú teljes gráf, valamint $k \cdot T$, ahol $T$ fa.

**4. Lemma.** *$A, B \subseteq V(G)$, akkor*

$$|\partial(A \cap B)| + |\partial(A \cup B)| \leq |\partial A| + |\partial B|$$

*Bizonyítás.* Mindkét oldal éleket számlál. Beláthatjuk, hogy minden élt a jobb oldal legalább annyiszor megszámlál, mint a bal. $A, B \subseteq V(G)$ 4 részre osztja $V(G)$-t: $A \cap B$, $A \cap \overline{B}$, $\overline{A} \cap B$, $\overline{A} \cap \overline{B}$. Ezekre nézve a nem ugróéleknek nincs szerepük. A további 6 típusba sorolhatóak.

(i) $A \cap \overline{B} - \overline{A} \cap \overline{B}$ él: a jobb és bal oldalhoz egyaránt egy-egy élt ad.




4. ábra. A hat eset

(ii) $A \cap \overline{B} - \overline{A} \cap B$ él: a jobb oldalhoz 2-t ad, a bal oldalhoz viszont egyet sem.

(iii)–(vi) eseteket hasonlóan vizsgálhatóak, de nem végezzük el.

□

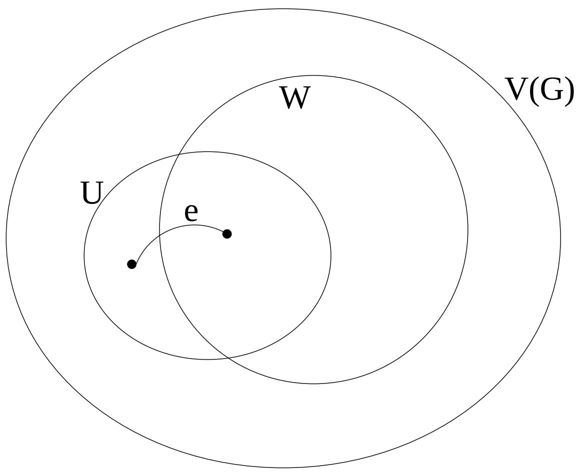
**5. Tétel.** *Ha $G$ gráf, melyre $|V(G)| \geq 2$, minimális $k$-szorosan élösszefüggő, akkor $G$-ben van $k$ fokú csúcs.*

*Bizonyítás.* Legyen $G$ minimális $k$-szorosan élösszefüggő gráf, ekkor létezik $U \neq \emptyset, V(G)$, hogy $|\partial U| = k$ ($\overset{\text{elnev.}}{\equiv}$ $U$ pontos). Célunk, hogy egyelemű pontos $U$-t találjunk. Vegyük észre, hogy $G$ minimalitása miatt nincs benne hurokél. $U \neq \emptyset$ legyen egy minimális pontos halmaz. Ekkor két lehetőség van:

– $U$-n belül nem halad él: $k = |\partial U| \geq k|U|,$ tehát $|U| = 1$.

– $U$-n belül halad $e$ él: $G - e$ már nem $k$-szorosan élösszefüggő $\Rightarrow$ $\exists W \subseteq V(G)$:

$$\left.\begin{array}{l} G - e\text{-re vonatkozó határ} \rightarrow\ |\partial_{G-e} W| < k \\ G - e\text{-re vonatkozó határ} \ \rightarrow\ |\partial_G W| \geq k \end{array}\right\} \Rightarrow\ W \text{ pontos } V(G)\text{-ben, } xy\text{-t elválasztja}$$




5. ábra. Az $e$ él és a hozzátartozó két pontos halmaz

A lemma jelöléseit felhasználva legyen

$$\begin{cases} A = \overline{U} \\ B = W \end{cases}$$

$$\Rightarrow A \cap B \neq \emptyset, V(G) \qquad U \text{ minimálisan pontos halmaz, } W \text{ pontos halmaz}$$

$$A \cup B \neq \emptyset, V(G) \qquad y \notin \overline{U} \cup W$$

$G$ gráf $k$-szoros élösszefüggőségéből következik, hogy $k+k \leq$ jobb oldal $\overset{lemma}{\leq}$ bal oldal $= k+k$. Ebből adódik, hogy $\overline{U} \cap W$, és $\overline{U} \cup W$ pontosak. Így $\overline{\overline{U} \cup W} \subsetneq U$ is pontos. Ez ellentmondás, mert $U$ minimálisan pontos volt.

□

***Megjegyzés.*** A bizonyítás a következő állítást is adja. $U$ pontos halmaz esetén, $|U| \geq 2$-ből következik, hogy alkalmas $x \in U$ csúcsra $\{x\}$ pontos.

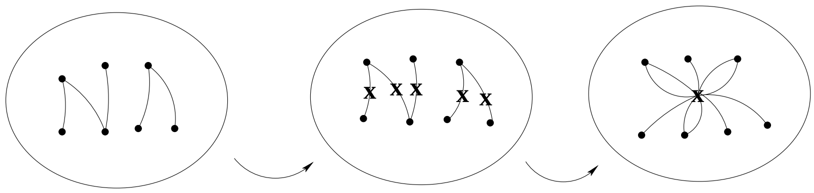
Ezt a megjegyzést $U$-ra és $\overline{U}$-ra is alkalmazva kapjuk a következő élesítést.

***Következmény.*** Létezik legalább 2 darab $k$-fokú pont is egy minimális $k$-szorosan összefüggő gráfban.

Ha megengedünk párhuzamos éleket is, akkor ennél többet nem is mondhatunk. Ezt egy $P$ út esetén $k \cdot P$ mutatja. Egyszerű gráfok esetén a $k$ fokú pontok fokszáma jobb becslés is adható.

## 3. A $k$-szorosan élösszefüggő gráfok felépítése

**Definíció.** Legyen $l \in \mathbb{N}^+$ és $k = 2l$. vegyünk $l$ élet és mindegyik közepén vegyünk fel egy új csúcsot. A kapott $l$ csúcsot azonosítsuk egy új csúccsá. A fent leírt operációt élösszecsípésnek nevezzük.



6. ábra. Élösszecsípés, $\ell = 5, k = 10$

Az operáció nem változtatja meg a régi csúcsok fokait, az új csúcs foka $k = 2l$ lesz.

**6. Lemma.** *Legyen $G$ $k$-szorosan élösszefüggő. Képezzük $\hat{G}$ gráfot, méghozzá úgy, hogy $l = k/2$ élét összecsípjük. Ekkor $\hat{G}$ is $k$-szorosan élösszefüggő.*

*A bizonyítandó:* $U \subseteq V(\hat{G}) = V(G) \cup \{\square\}$ esetén $|\partial_{\hat{G}} U| \geq k$, amennyiben $U \neq \emptyset, V(\hat{G})$. Elegendő a $\square \notin U$ (azaz $U \subseteq V(G)$) esetre ellenőrizni.

$$|\partial_{\hat{G}} U| \geq |\partial_G U|,$$

feltéve, hogy $\square \notin U$. Ennek ellenőrzése esetanalízissel adódik. Az állítás adódik abból, hogy $G$ $k$-szoros élösszefüggősége miatt $|\partial_G U| \geq k$.

**Definíció.** $G$ gráf *felépíthető $l$ él összecsípéseivel*, ha $G_0 \rightsquigarrow G_1 \rightsquigarrow G_2 \rightsquigarrow \cdots \rightsquigarrow G_i \rightsquigarrow G_{i+1} \rightsquigarrow \cdots \rightsquigarrow G_s = G$ sorozatban az $i+1$-edik tag az $i$-edikből úgy kapható, hogy $l$ élét csípjük össze, vagy élt adunk hozzá két meglévő csúcs összekötésével. A sorozat első tagja 2 pontból és köztük $k$ párhuzamos élből áll.

***Következmény.*** Ha $G$ felépíthető $l = (\frac{1}{2}k)$ él összecsípésével, akkor $G$ $k$-szorosan élösszefüggő.

**7. Tétel.** *Legyen $k = 2l$, $l \in \mathbb{N}^+$ ($\Rightarrow k \geq 2$), $V(G) \geq 2$. Ekkor $G$ gráf $k$-szorosan élösszefüggő akkor és csakis akkor, ha $G$ felépíthető $l$ él összecsípésével.*

*Bizonyítás.* Az elegendőség triviálisan teljesül.

„$\Rightarrow$”: Tegyük fel, hogy $G$ $k$-szorosan élösszefüggő. Indukcióval bizonyítunk $G$ csúcsméretére, és azon belül élszámára.

Indukciós alapállapot: legyen $V(G) = 2$. Indukciós feltevés: tudjuk az állítást kisebb pontszámra illetve azonos pontszám mellett legfeljebb azonos élszám esetén.

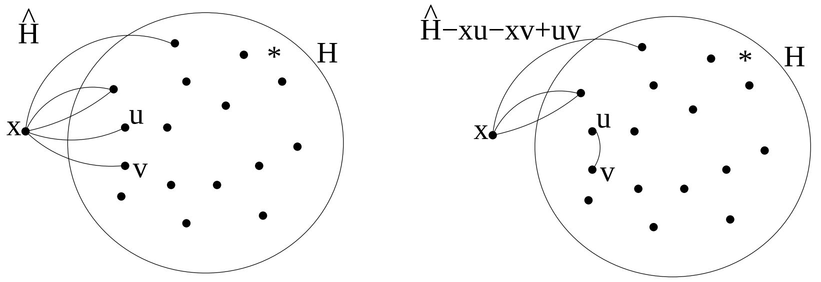
Indukciós lépés:

- $G$ nem minimális $k$-szorosan élösszefüggő gráf $\Rightarrow$ létezik $e \in E : G - e$ is $k$-szorosan élösszefüggő.
  indukciós feltevés: $G_0 \rightsquigarrow G - e \overset{\text{ellentmondás}}{\rightsquigarrow} G$

- $G$ minimális $k$-szorosan élösszefüggő. Ebből következik, hogy létezik $x \in V(G)$, amire $d(x) = k$.

  A következő lemma alapján ez az eset is könnyen tárgyalható.

  **8. Lemma (Lovász László).** *Legyen $\hat{H}$ egy gráf, amit $H$-ból nyerünk egy $x$ csúcs és ebből kiinduló, $H$-hoz vezető $2s$ darab él hozzáadásával.*




7. ábra. Lovász-féle "leemelés"

*Legyen az „$U \subseteq V(H)$ esetén $|\partial U| \geq \kappa(= 2l)$, ahol $U \neq \emptyset, V(H)$" tulajdonság ($\star$). Ekkor minden $xu$ élhez található olyan $xv$ él, ahol $\hat{H} - xu - xv \dotplus uv$ is ($\star$) tulajdonságú.*

A tétel bizonyításának folytatásához használjuk fel a lemma eredményét.

$$G \qquad x - (G - x) \overset{\text{lemma}}{\Rightarrow} x - G_1 \overset{\text{lemma}}{\Rightarrow} x - G_2 \overset{\text{lemma}}{\Rightarrow} \ldots \overset{\text{lemma}}{\Rightarrow} x \qquad G_l$$

Az utolsó gráfban (a lemma $l$-szeres alkalmazása után) $x$ izolált, a maradék $G$ gráf ($\star$) tulajdonságú, benne $k/2 = l$ darab él, amit a lemma alkalmazása hozott elő. $G$-t $G_l$-ből ezen $k/2$ él összecsípésével kapjuk. Mivel $G_l$ teljesíti a ($\star$) tuladonságot, így $k$-szorosan élösszefüggő. Indukciós feltevés alapján $G_l$ felépíthető, majd $G$ is egy további élcsípéssel adódik.

□

A lemmát a következő órán igazoljuk. Hasonló felépítés adható $k$-szorosan élösszefüggő gráfokra páratlan $k$ esetén is.