Gráfelmélet/Diszkrét Matematika MSc hallgatók számára

3. Előadás

Előadó: Hajnal Péter
Jegyzetelő: Pék Máté 2009. szeptember 21.

1. Folyamok

1.1. Definíció. *$\overrightarrow{G} = (V, E, K, B)$* **irányított gráf***, ha $\forall e \exists!\, v : eKv$ és $\forall e \exists!\, v : eBv$, ahol K illetve B a ki- és bemenő illeszkedési relációt jelentik.*

1.2. Definíció. *H* **hálózat** *$(\overrightarrow{G}, s, t, c)$, ahol G egy irányított gráf, $s \in V$ forrás, $t \in V$ nyelő, $c : E(G) \to \mathbb{R}^+$ pedig a kapacitásfüggvény.*

Szemléletesen a hálózat egy csőhálózat, a kapacitásfüggvény pedig az egyes csöveken való maximálisan átengedhető mennyiségű víz nagysága.

1.3. Definíció. *Az $f : E(G) \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ függvényt* **folyam***nak nevezzük a H hálózatban, ha*

I. $\forall e \in E$ esetén $\quad 0 \leq f(e) \leq c(e)$

II. $\forall v \in V \backslash \{s, t\}$ esetén $\quad \sum_{e \in E_{be}(v)} f(e) = \sum_{e \in E_{ki}(v)} f(e)$ (megmaradási feltétel)

Tehát a csövön nem folyhat át a kapacitásnál nagyobb mennyiség. Továbbá teljesülnek a fizikából ismeretes anyagmegmaradási törvények.

1.1. Példa. *Az $f \equiv 0$ folyam egy tetszőleges hálózatban. Ekkor minden élen 0 anyagmennyiség fut.*

Ahhoz, hogy könnyebben elképzeljük a folyamokkal kapcsolatos fogalmakat, nézzünk egy másik alkalmazást. Tekintsük egy város úthálózatát. A forrás lehet egyes lakótelepeket, lakóparkokat reprezentáló csúcs (ahonnan reggel a belvárosba szeretnének eljutni autóval az emberek). A belvárosi munkahelyeket reprezentálja a nyelő.

1.4. Definíció. *Legyen f folyam a H hálózatban.*

$$\text{Az } f \textbf{ értéke} := \textbf{value(f)} = \sum_{e:eKs} f(e) - \sum_{e:eBs} f(e)$$

Az f folyam értéke negatív is lehet, ilyenkor visszafele folyik a víz a csőhálózatban.

1.5. Definíció. *Legyen $\overrightarrow{G}$ egy irányított gráf. Egy $V = \{S, T\}$ vágás $\overrightarrow{G}$-ben a ponthalmaz egy kétosztályú partíciója. V egy* **s - t vágás***, ha $s \in S$, és $t \in T$.*

1.1. Lemma. *I.* $value(f) = \sum_{e:eBt} f(e) - \sum_{e:eKt} f(e)$

II. Tetszőleges $V = \{S, T\}$ *s-t vágásra:* $value(f) = \sum_{e:S\to T} f(e) - \sum_{e:T\to S} f(e)$

Tehát egy megfelelő V vágás alapján ki lehet fejezni a folyam értékét: a forrás felől átfolyó anyagmennyiségből kivonva a nyelő irányából visszafolyó anyagmennyiséget megkapjuk $value(f)$-t.

Bizonyítás. S minden elemére egy egyenlőséget írunk fel:
A folyam értékének definíciója alapján s (forráspontra):

$$\sum_{e:eKt} f(e) - \sum_{e:eBt} f(e) = value(f).$$

Majd felírjuk az anyagmegmaradás törvény rendezett formáját a $v \in S \setminus \{s\}$ csúcsokra (azaz a nem forrásokra):

$$\sum_{e:eKv} f(e) - \sum_{e:eBv} f(e) = 0.$$

Ezután összegezzük az összes S-beli csúcsra felírt egyenlőséget. A jobb oldal pontosan $value(f)$ lesz. Egy él viszonya a vágáshoz négyféle lehet:

I. $S \to S, T \to T$.Ezek az élek kiesnek, a jobb oldalon 2 egyenletben szerepelnek ellentétes előjellel, kiesnek.

II. az $S \to T, T \to S$ keresztélek maradnak, megfelelő előjellel.

Így az összegzés után a bal oldalon a folyam érték alternatív felírásához jutunk. ∎

Folyam probléma: Adott a H hálózat, az f folyam: $value(f) \to max$.
Tehát a célunk az, hogy egy adott folyam értékét maximalizáljuk.
Itt jegyezzük meg, hogy az értelmezési tartomány folytonos, az értékkészlet $\mathbb{R}$. Az értelmezési tartomány egy eleme, egy f folyam azonosítható az $f(e)$ számok vektorával: $f = \underline{f} \in \mathbb{R}^{E(\overrightarrow{G})}$, azaz ÉT $\subseteq \mathbb{R}^{E(\overrightarrow{G})}$. Az értelmezési tartomány kompakt halmaz, mivel korlátos $(0 \leq f(e) \leq c(e))$ és zárt. Mivel a folyam értéke folytonos az értelmezési tartományán, ezért felveszi maximumát. Ez alapján a max használata jogos.

1.1. Megjegyzés. *Tulajdonképpen a folyam probléma a lineáris programozás feladat egy speciális esete: a maximalizálandó* $value(f)$ *függvény lineáris, valamint a folyamok halmaza lineáris egyenlőségekkel és egyenlőtlenségekkel van definiálva.*

Az alábbi becslést adhatjuk $value(f)$-re:

1.1. Következmény. *Legyen* f *tetszőleges folyam,* V *vágás. Ekkor*

$$value(f) \leq \sum_{e:S\to T} c(e) =: c(V),$$

mivel az egyes kapacitásoknál nem lehetnek nagyobbak a megfelelő folyamok. $c(V)$*-t a* **vágás kapacitás***ának nevezzük.*

Ennek legerősebb változata:

1.2. Következmény. $max_{f folyam} value(f) \le min_{V vagas} c(V)$, *tehát a maximális folyam érték $\le$ a minimális vágás kapacitásnál.*

Tudjuk, hogy véges sok vágás van egy n csúcsú gráfban, pontosan 2^{n-2} db. Azaz a jobb oldal egy véges halmazon vett optimalizálási probléma. Célunk, hogy belássuk, hogy " $\le$ " helyett " $=$ " írható. Ha f optimális / maximális értékű, akkor alkalmas vágással a forrás $\rightarrow$ nyelő ($S \rightarrow T$) élek kapacitásig kihasználtak és nincs visszafolyás.

1.6. Definíció. *Legyen $H(\overrightarrow{G}, s, t, c)$ hálózat, ebben pedig egy f folyam. Egy $S \rightarrow T$ utat nevezzünk el P útnak, majd hagyjuk el a $\overrightarrow{G}$ gráf irányítását (így kapjuk a G_0 irányítatlan gráfot). P egy éle két fajta lehet ($\overrightarrow{G}$-beli helyzetének megfelelően): vagy előrehaladó él (azaz $S \rightarrow T$ irányítású) vagy hátramutató él (azaz $T \rightarrow S$ irányítású). Ezen élek halmazai $E_{elore}(P)$ és $E_{hatra}(P)$. Így $E(P) = E_{elore}(P) \bigcup E_{hatra}(P)$. Ekkor* **P javítóút** *(f folyamra, $H(\overrightarrow{G}, s, t, c)$ hálózatban), ha*

I. út G_0-ban, azaz $E(P) = E_{elore}(P) \bigcup E_{hatra}(P)$,

II. $e \in E_{elore}(P):\quad f(e) < c(e)$, $e \in E_{hatra}(P):\quad f(e) > 0$, azaz ha az előrehaladó éleken nem folyik át a kapacitás által megengedett anyagmennyiség, valamint visszafele (a hátramutató éleken) is halad valamekkora (> 0) anyagmennyiség.

1.2. Lemma. *Legyen f egy folyam a $H(\overrightarrow{G}, s, t, c)$ hálózatban. Ekkor ha találunk egy P javító utat, akkor f folyam nem maximális értékű.*

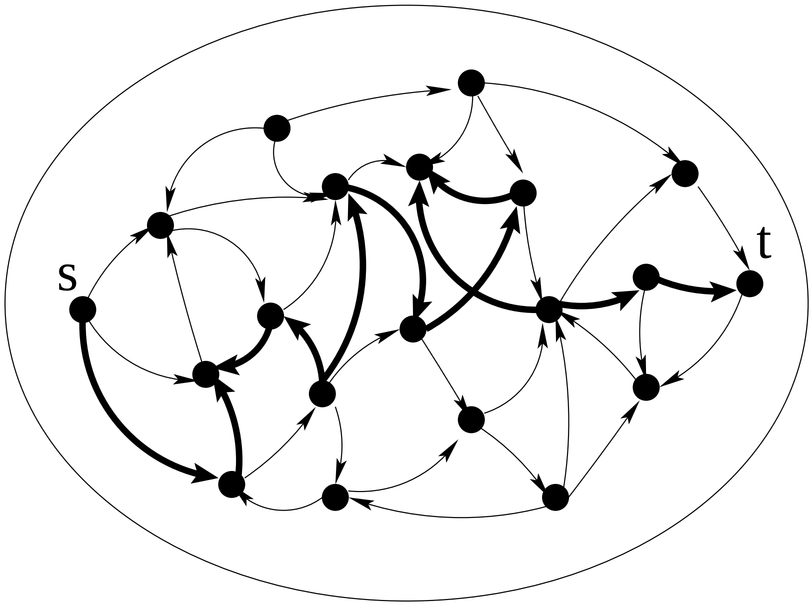
Bizonyítás. Legyen P egy javító út f-re. Legyen $min_{e \in E_{elore}(P)}(c(e) - f(e)) = \delta_{elore}$ (azaz, az e élen ennyivel növelhető az anyagmennyiség), hasonlóan $\delta_{hatra} = min_{e \in E_{hatra}} f(e)$, valamint a minimumuk: $\delta = min(\delta_{hatra}, \delta elore$. Javító út esetén $\delta > 0$, azaz lehet még növelni az anyagáramlást. Legyen a **módosított folyam** $\widetilde{f}(e) =$

$$\begin{cases} f(e), & e \notin E(p) \\ f(e) + \delta, & e \in E_{elore}(P) \\ f(e) - \delta, & e \in E_{hatra}(P) \end{cases} \tag{1}$$

Ekkor a megmaradási törvények teljesülnek $\widetilde{f}$-ra, $\widetilde{f}(e)$ a $[0, c(e)]$ intervallumban marad és $value(\widetilde{f}(e)) = value(f) + \delta > value(e)$, azaz találtunk egy $\widetilde{f}(e)$-nél folyamot, tehát f nem maximális értékű. ∎

1.1. Tétel. *Legyen f egy folyam a $H(\overrightarrow{G}, s, t, c)$ hálózatban. A következő állítások ekvivalensek:*

I. f folyam értéke maximális



1. ábra. Egy irányítatlan st út

II. f-hez nincs javító út

III. f-hez van olyan $V = \{S, T\}$ vágás, hogy $value(f) = c(V)$

Bizonyítás. $(1) \Rightarrow (2)$: az előző lemmából következik.
$(2) \Rightarrow (3)$: a bizonyításhoz az alábbi fogalmat vezetjük be:

1.7. Definíció. *P* **javító út kezdemény***, ha:*

I. s-ből induló út G-ben,

II. $\forall e \in E_{elore}(P) : f(e) < c(e)$ és $\forall e \in E_{hatra}(P) : f(e) > 0$.

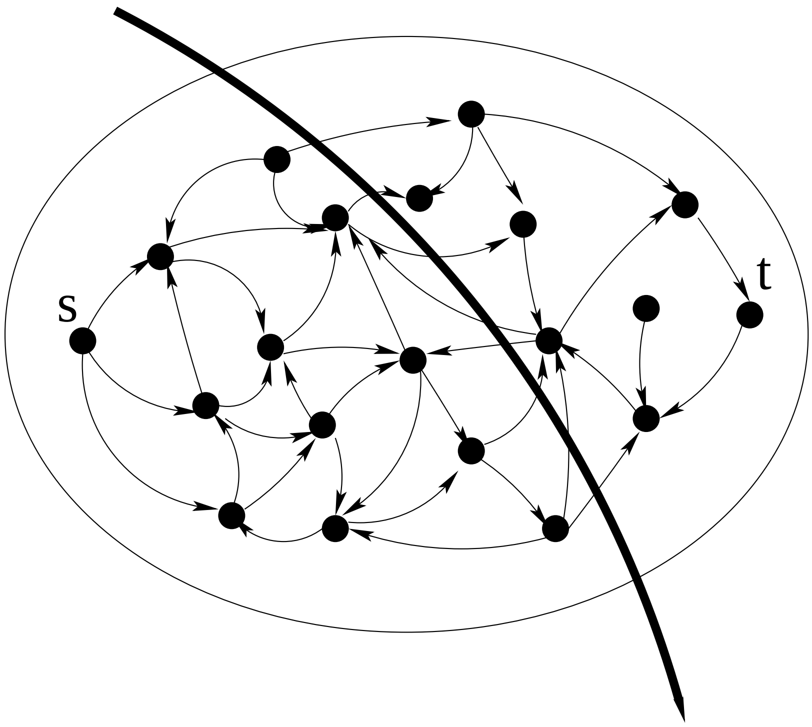
Legyen $s \in S = \{x \in V : \exists sx$ javítóút-kezdemény$\}$, $t \in T := V \setminus S$ ((2) miatt $t \notin S$) A két halmaz egy $V = \{S, T\}$ vágást határoz meg.

1.1. Állítás. *A $V = \{S, T\}$ vágásból következik* (3).

Bizonyítás. Legyen $s \in S$, $xy \in E$. Az $sx + xy$ él egy sy út, ami nem lehet javítóút-kezdemény, ha $y \notin S$. Ez ekvivalens azzal, hogy $f(\overrightarrow{xy}) = c(\overrightarrow{xy})$ $x \in S, y \in T$ esetén. Teljesen hasonlóan működik visszafele: $\overrightarrow{uz} \in E, u \in T, z \in S)$ esetén $f(\overrightarrow{uz}) = 0$, különben létezne su javítóút-kezdemény. Tehát $value(f) \leq c(V)$ bizonyításában minden becslés "=", azaz $value(f) = c(V)$.

∎

(3)$\Rightarrow$(1): felülről becsültük $c(V)$-vel az $value(f)$-et (lásd az előző következményt), ezért a folyam értéke maximális lesz. ■



2. ábra. Egy vágás

1.3. Következmény. (MFMC tétel), *azaz maximális értékű folyam, minimális kapacitású vágás tétele (maximum flow minimal cut).*

$$max_{f folyam} value(f) = min_{V vagas} c(V)$$

2. Algoritmikus kérdések folyamokra

2.1. Következmény. Ford-Fulkerson algoritmus

Kiinduló lépés: Vegyünk egy tetszőleges f folyamot a H hálózatból.
1. lépés (keresés): Javító utat keresünk. Ha találunk javító utat, akkor a 2. lépéssel folytatjuk. Ha nem találtunk, akkor az aktuális folyam maximális (itt véget ér az algoritmus).
2. lépés (javítás): az előző lemma segítségével módosítjuk a folyamot, majd ezzel a módosított $\widetilde{f}$ folyammal térünk vissza az 1. lépéshez.

A javító utat kereső algoritmus (1. lépés) (f : folyam, H : hálózat).

P javító út, V vágás: $value(f) = c(V)$.

1.0. lépés: Legyen $S := \{s\}$ *javítóút-kezdemény keresése.*

1.1. lépés (bővítés): Legyen
$B_{elore} = \{x \in V \backslash S : \exists y \in S, \overrightarrow{xy} \in E : f(\overrightarrow{xy}) < c(\overrightarrow{xy})\}$ *és*
$B_{hatra} = \{x \in V \backslash S : \exists y \in S, \overrightarrow{xy} \in E : f(\overrightarrow{yx}) > 0\}$.
Ezután két esetet különböztetünk meg:

I. *ha* $B_{elore} = B_{hatra} =$ *, akkor f-hez nincs javító út, ezért a folyam értéke maximális, lásd 1.1. Állítás bizonyítását (itt véget ér az algoritmus).*

II. *máskülönben (azaz ha* $B_{elore} =$ *és/vagy* $B_{hatra} =$ *) további két van:*

1. *ha* $t \in S \bigcup B_{elore} \bigcup B_{hatra}$*, akkor találtunk javító utat az f folyamhoz, következik a 2. lépés (javítás).*
2. *máskülönben (azaz ha* $t \notin S \bigcup B_{elore} \bigcup B_{hatra}$*) legyen* $\overline{S} = S \bigcup B_{elore} \bigcup B_{hatra}$. *Az 1.1. lépést (bővítés)* $(\overline{S})$*-re végezzük el.*

Ciklizálhat-e az algoritmus?

2.1. Megjegyzés. *Ha a kapacitások egészek és a kiinduló folyam is egészértékű (folyam értékkészlete* $\mathbb{N}$*), akkor az algoritmus végig az egészek közt működik.*

A folyam minden javításánál a folyamérték ≥ 1-gyel nő, így nincs ciklizálás. Sőt a következő tételt kapjuk:

2.1. Tétel. *Legyen* $(\overrightarrow{G}, s, t, c)$ *hálózat, amelyben* $c : E(\overrightarrow{G}) \to \mathbb{N}$. *Ekkor létezik egész értéket felvevő* **optimális folyam**.

2.2. Megjegyzés. $c : E(\overrightarrow{G}) \to \mathbb{Q}^+$, $c(e) = \frac{\widetilde{c}(e)}{K}$, *ahol* $\widetilde{c} \in \mathbb{N}$. *Ekkor sincs ciklizálás.*

2.3. Megjegyzés. *Könnyen látható, hogy a Ford-Fulkerson algoritmus a legrövidebb javítóutat találja meg. Belátható, hogy ekkor az* $\mathbb{R}$ *aritmetikában sincs ciklizálás (ezt nem bizonyítjuk).*

Általában azonban lehetséges a ciklizálás: az $\mathbb{R}$-aritmetika és "hosszú"/"rossz" javítóutak ciklizáláshoz vezethetnek. A folyamértékek monoton növő korlátos sorozatot alkotnak, de lehetséges, hogy nem az optimumhoz tart a sorozat.