Gráfelmélet órai jegyzet
2.óra

Készítette - Palatinus Endre

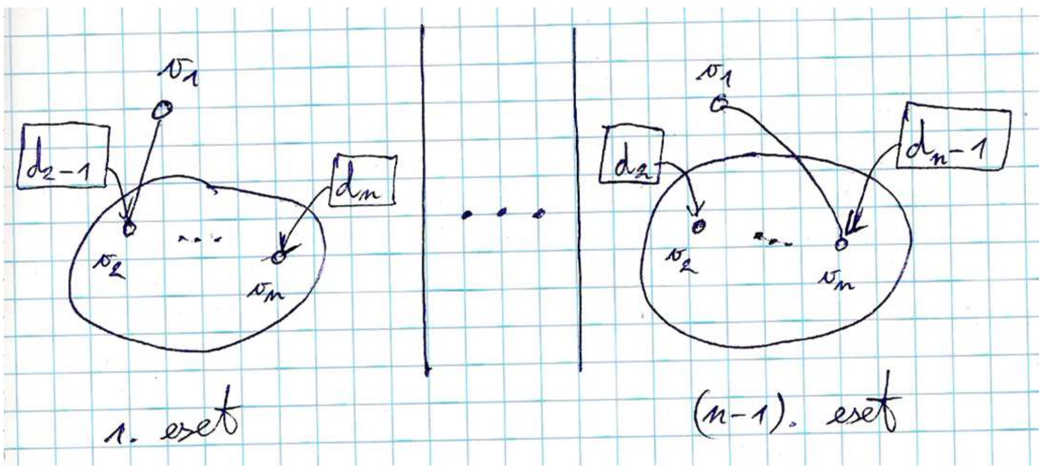
2009. szeptember 14.

1. Fák összeszámlálása

1.1. Tétel. *Legyen* $V = \{v_1, \dots, v_n\}$, $d(v_i) = d_i \in \mathbf{N}$, $n = |V|$, $n \geq 2$ *és* $\sum d_i = 2(n-1)$. *Ekkor a* $\{d_i\}$*-t realizáló fák száma:*

$$(n-2)! \cdot \prod_{i=1}^{n} \frac{d_i}{d_i!}$$

Bizonyítás. Feltehető, hogy $\{d_i\}$ nemcsökkenő sorozat. Ha valamely $d_i = 0$, akkor a gráf nem fa, mert van izolált pontja. Ekkor $d_i = 0$ miatt a szorzat értéke is 0 lesz, ami szintén azt jelenti, hogy nem létezik a $\{d_i\}$ sorozatot realizáló fa.



1. ábra. A diszjunkt esetek.

Ezek után feltehetjük, hogy $d_1 = 1$, mivel a fokszámsorozat nemcsökkenő sorrendben rendezett, és a $d_i = 0$ esetet már megvizsgáltuk.

Tekintsük most az 1. ábrát. Ha a bekarikázott csúcsokból álló gráfokat realizáljuk fával, méghozzá a téglalapokba írt $\{d_i\}$ szerint, akkor egy-egy fa realizálását kapjuk a teljes csúcshalmazon. Vegyük észre, hogy $n-1$ darab diszjunkt esetre bontottuk szét a problémát.

Most n-re vonatkozó indukcióval bebizonyítjuk az állítás helyességét. Ha $n = 2$, akkor csak egy realizáló fa létezik: a két csúcs össze van kötve egymással. A képletben n-t behelyettesítve szintén 1-et kapunk.

Most következzen az indukciós lépés: Tegyük fel, hogy $n-1$-re teljesül az állítás. A görbéken belül $n-1$ csúcs található, és a fokszámok összege $2(n-2)$. Minden egyes diszjunkt esetben a j-edik csúcs fokszáma eggyel kisebb, mint a kiindulási értéke, azaz $\widetilde{d_j} = d_j - 1$, mivel össze van kötve v_1-gyel. Ebből kifolyólag a realizáló fák száma:

$$\sum_{j=2}^{n} (n-3)! \cdot \prod_{i=2}^{j-1} \frac{d_i}{d_i!} \cdot \frac{d_j - 1}{(d_j - 1)!} \cdot \prod_{i=j+1}^{n} \frac{d_i}{d_i!} \tag{1}$$

Az előbbi képletben szeretnénk elérni, hogy csak egy produktum szerepeljen, amihez a $\frac{d_j-1}{(d_j-1)!}$ tagokat kell eltüntetnünk, így felhasználjuk a következőt:

$$\frac{d_j - 1}{(d_j - 1)!} = \frac{d_j}{d_j!} \cdot \frac{d_j!}{d_j} \cdot \frac{d_j - 1}{(d_j - 1)!} = \frac{d_j}{d_j!} \cdot (d_j - 1)$$

Ez alapján az 1. képletet átalakíthatjuk:

$$(n-3)! \cdot \prod_{i=2}^{n} \frac{d_i}{d_i!} \cdot \sum_{j=2}^{n} (d_j - 1) \tag{2}$$

Mivel a görbén belüli csúcsok fokszámainak összege $2(n-2)$, és az előző képletben $d_j - 1$-eket összegeztünk, ami ettől $n-1$-gyel kevesebb, a 2. képletet tovább alakíthatjuk:

$$(n-3)! \cdot \prod_{i=2}^{n} \frac{d_i}{d_i!} \cdot (n-2) \tag{3}$$

Mivel $d_1 = 1$, átalakítás után kapjuk az állításban szereplő képletet:

$$(n-2)! \cdot \prod_{i=1}^{n} \frac{d_i}{d_i!} \tag{4}$$

$\square$

A bizonyítás gondolatmenetét használhatjuk adott fokszámsorozathoz tartozó összes realizáló fa listázására is.

1.2. Következmény. *(Cayley-tétel) Egy adott n-elemű csúcshalmazon n^{n-2} különböző fa lehet.*

Bizonyítás. Tekintsük az összes, fát realizáló $\{d_i\}$ fokszámsorozatot. Az előző tételt felhasználva a különböző fák száma:

$$\sum_{\substack{d_1,\dots d_n \in \mathbf{N} \\ \sum d_i = 2(n-1)}} (n-2)! \cdot \prod_{i=1}^{n} \frac{d_i}{d_i!} \tag{5}$$

A $\frac{d_i}{d_i!}$ tört egyszerűsíthető: $\frac{1}{(d_i-1)!}$. Vegyük a $\widetilde{d_i} = d_i - 1$ jelölést! Ekkor az 5. képlet a következő alakú lesz:

$$\sum_{\substack{\widetilde{d_i} \in \mathbf{N} \\ \sum \widetilde{d_i} = n-2}} \frac{(n-2)!}{\prod \widetilde{d_i}!} \tag{6}$$

Most segítségül hívjuk a multinomiális tételt, azaz:

$$(x_1 + \ldots + x_k)^l = \sum_{\substack{i_1,\dots i_k \in \mathbf{N} \\ \sum i_j = l}} \frac{l!}{i_1! \cdot \ldots \cdot i_k!} \cdot x_1^{i_1} \cdot \ldots \cdot x_k^{i_k}$$

Ha az x_i-k értéke az előző képletben 1, és l értékének $(n-2)$-t választjuk, akkor a tétel jobb oldala megegyezik a 6. képlettel, így az egyenlő az előző képlet bal oldalával is, és így megkaptuk a bizonyítandó állítást:

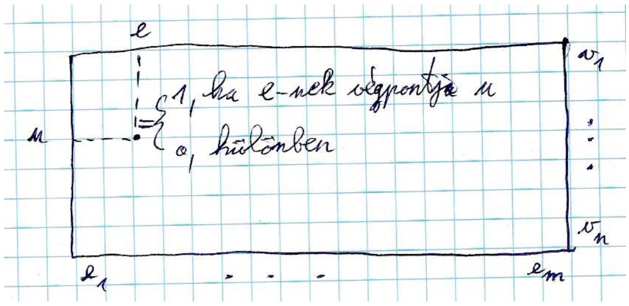
$$(1 + \ldots + 1)^{n-2} = n^{n-2} \tag{7}$$

□

1.3. Definíció. *Legyen G egy hurokél nélküli gráf. L_G jelöli a G pont–él illeszkedési mátrixát, amelynek a szerkezetét a 2. ábra szemlélteti.*

Minden oszlopban 2 darab 1-es, valamint 0-k szerepelnek. Minden sorban az 1-esek száma megegyezik a megfelelő csúcs fokszámával.

1.4. Definíció. *Legyen $\overrightarrow{L_G}$ az a mátrix, amelyet L_G-ből úgy kapunk, hogy minden oszlopban az egyik 1-est változatlanul hagyunk, a másik pedig negatív előjelet kap. Ez azt jelenti, hogy a G gráf minden éléhez irányítást rendelünk, tehát G egy irányítását kapjuk.*



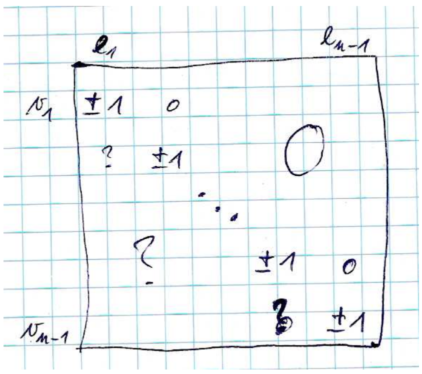
2. ábra. A pont–él illeszkedési mátrix.

1.5. Definíció. *Legyen* $\overrightarrow{L_G^{-v}}$ *az a mátrix, amelyet* $\overrightarrow{L_G}$*-ből kapunk a* v *csúcs sorának elhagyásával.*

1.6. Definíció. *Legyen* $F \subseteq E(G)$*, azaz a* G *gráf oszlophalmazának egy részhalmaza. Ekkor* $\overrightarrow{L_G^{-v}}[F]$ *az a mátrix, amelyet* $\overrightarrow{L_G^{-v}}$*-ből az* F*-beli oszlopok kiválasztásával kapunk.*

1.7. Tétel. *Legyen* $F \subseteq E(G)$, $|F| = |V| - 1 = n - 1$. $\overrightarrow{L_G^{-v}}[F]$ *egy* $(n-1) \times (n-1)$*-es mátrix, és a determinánsa akkor, csak akkor nem nulla, ha* F *egy feszítőfa élhalmaza. Továbbá ebben az esetben a determináns értéke* 1 *vagy* -1*.*

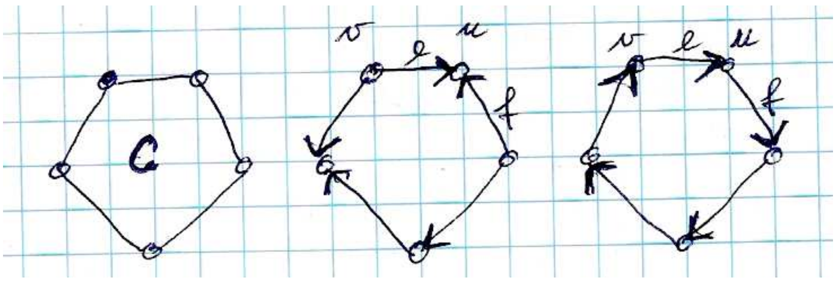
Bizonyítás. Legyen F egy feszítőfa élhalmaza. A feszítőfa levélcsípésekkel lebontható a v csúcsra. Az i-edik lecsípésnél lecsípett csúcsot jelöljük v_i-vel, a leccsípett élt e_i-vel. Ekkor az $\overrightarrow{L_G^{-v}}[F]$ mátrix a következő:



3. ábra. Az $\vec{L}_G^{-v}[F]$ mátrix.

Mivel ez a mátrix felső trianguláris, és a főátlójában ± 1-esek állnak, a determinánsának értéke 1 vagy -1.

Ha F nem egy feszítőfa élhalmaza, akkor F-ben létezik kör C élhalmazzal. Tekintsük most a következő ábrát:



4. ábra. A C élhalmazú kör G-ben, $\vec{L}_G$-ben, illetve az átalakított $\vec{L}_G$-ben.

A G gráf tetszőleges irányítása mellett a C élhalmazból nem feltétlenül keletkezik egy irányított kör. A $\overrightarrow{L_G}$-ben a C élhalmazhoz tartozó oszlopok közül a megfelelők -1-gyel való szorzásával elérhetjük, hogy C egy irányított kör legyen. Ez az átalakítás a mátrix rangját nem változtatja meg. Azonban a C-beli élekhez tartozó oszlopok összege ezáltal 0 lesz, így a mátrix determinánsa is 0. $\square$

1.8. Tétel. *(Binet–Cauchy-tétel) Legyen A egy $n \times N$-es, B pedig egy $N \times n$-es mátrix. Jelölje $S(A)$ az A sorhalmazát, $O(B)$ pedig a B oszlophalmazát, továbbá $F \subseteq O(A)$ esetén $A[F]$ az F-nek megfelelő oszlophalmazát az A mátrixnak, és $B[F]$ pedig az F-nek megfelelő sorhalmazát a B mátrixnak.*

$$det(A \cdot B) = \sum_{\substack{F \subseteq O(A) \\ |F|=n}} det(A[F]) \cdot det(B[F])$$

1.9. Következmény. *(Kirchoff-tétel) Legyen G egyszerű gráf, $v \in V(G)$ tetszőleges csúcs. Ekkor G feszítőfáinak száma:*

$$det\ (\ \overrightarrow{L_G^{-v}} \cdot (\overrightarrow{L_G^{-v}})^T\ ) \tag{8}$$

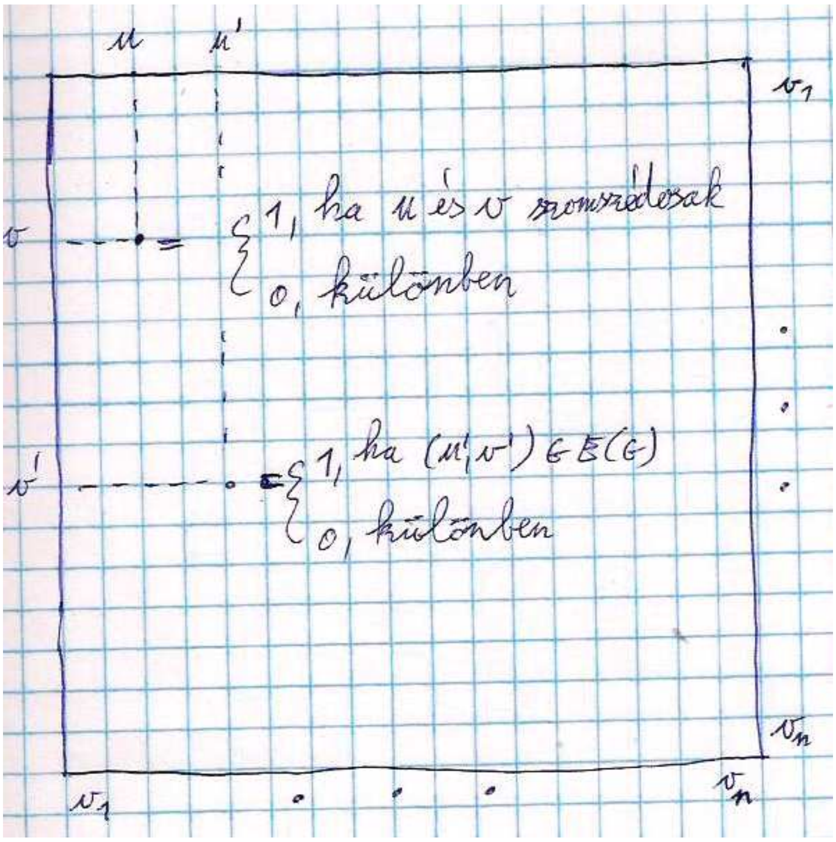
Bizonyítás. A Binet–Cauchy tétel alkalmazásával a 8. képletből kapjuk a következőt, ahol $(\overrightarrow{L_G^{-v}})^T\{F\}$ jelöli az $(\overrightarrow{L_G^{-v}})^T$-nak az F-nek megfelelő sorhalmazát:

$$\sum_{\substack{F \subseteq E(G) \\ |F|=n-1}} det(\overrightarrow{L_G^{-v}}[F]) \cdot det((\overrightarrow{L_G^{-v}})^T\{F\}) \tag{9}$$

Azonban a szummán belüli értékek 0-k, vagy 1-ek attól függően, hogy F egy feszítőfa élhalmaza-e, vagy sem. Ebből kifolyólag az összeg G feszítőfáinak számát adja meg. □

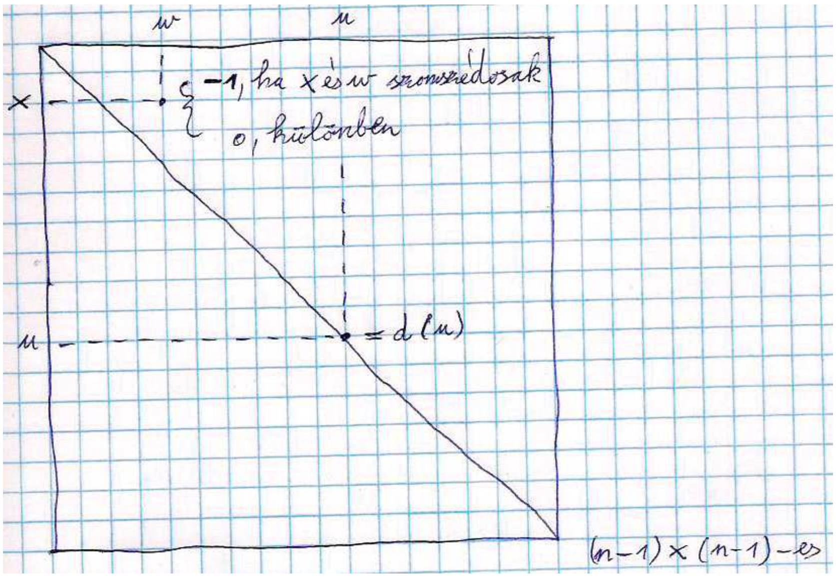
A továbbiakban a tételben szereplő mátrixot más alakban írjuk fel. Ehhez szükségünk lesz az alábbi definícióra.

1.10. Definíció. *Legyen G egy egyszerű gráf. A G gráf szomszédsági mátrixát A_G-vel jöljük, és a következő szerkezetű:*

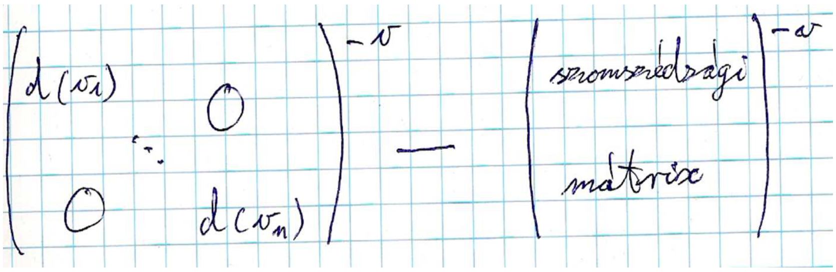


5. ábra. A szomszédsági mátrix.

1.11. Tétel. *(Kirchoff-tétel másik formában) Legyen M a 6. ábrán látható mátrix, amelyet a 7. ábrán látható módon kaptunk. Ekkor a G gráf összes feszítőfáinak száma: $det(M)$.*



6. ábra. Az M mátrix.

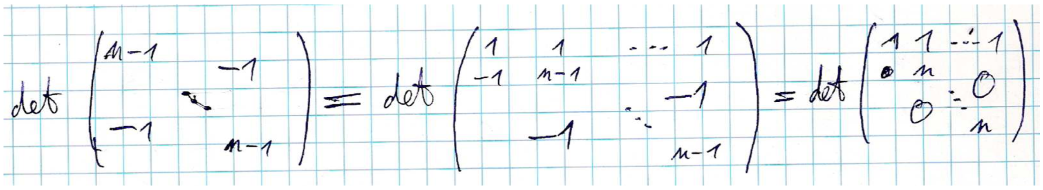


7. ábra. Az M mátrix előállítása.

2. Alkalmazások

2.1. Következmény. *(Cayley-tétel) Jelölje K_n az n-csúcsú teljes gráfot. K_n feszítőfáinak száma: n^{n-2}.*

Bizonyítás. Kirchoff tételének második formáját felhasználva kapjuk a 8. ábrán látható első mátrixot, amely $(n-1)\times(n-1)$-es. Ennek az első sorához hozzáadva az összes többit kapjuk az ábra második mátrixát. Ennek pedig az első sorát hozzáadva az összes többi sorához kapjuk az ábra harmadik mátrixát. Ez azonban felső trianguláris, így a determinánsának értéke: n^{n-2}.



8. ábra. Bizonyítás a Kirchoff tétel második alakjával.

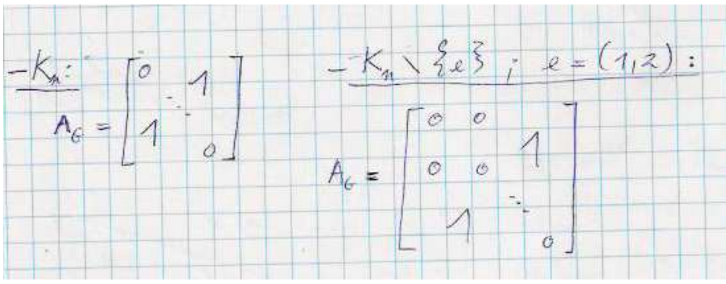
$\square$

Megjegyzés: A következő feladat nem szerepelt az előadáson, ez csak a tanultak gyakorlására szolgál.

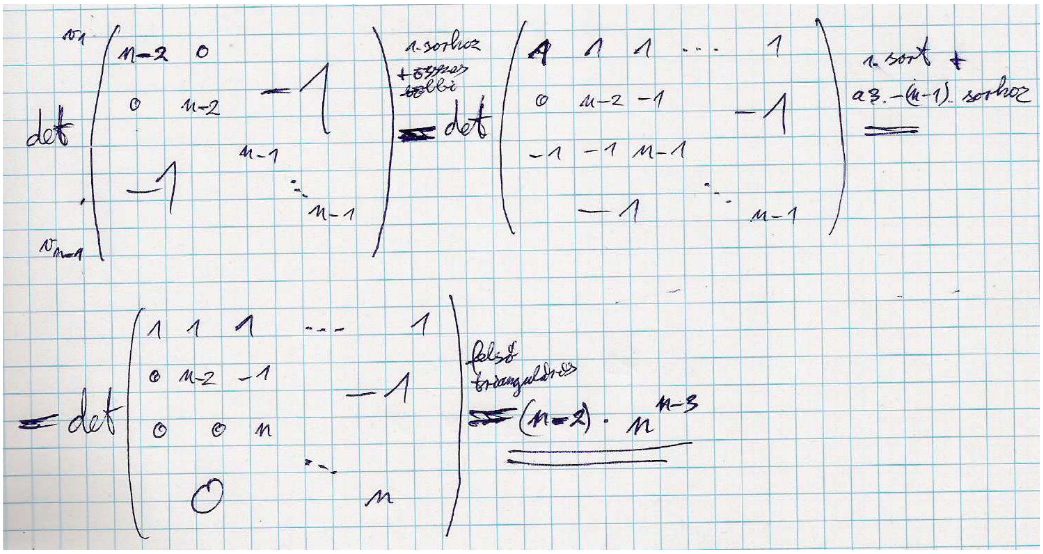
2.2. Példa. Hány feszítőfája lesz annak a gráfnak, amit a teljes gráfból egy tetszőleges él elhagyásával kapunk?

Megoldás: Használjuk fel Kirchoff-tételének második formáját! A 9. ábrán látható A_G jelöli a G gráf szomszédsági mátrixát, amiben minden csúcs fokszáma n, ezért a főátlót kivéve mindenhol 1-esek szerepelnek. Tegyük fel, hogy az $e = (1, 2)$ élet hagytuk el az n-csúcsú teljes gráfból. Ekkor G szomszédsági mátrixa a 9. ábrán látható módon változik meg. Ez egyben azt is jelenti, hogy az v_1 és v_2 csúcsok fokszáma $n-2$ lesz.

Ezek után a megoldás levezetését a 10. ábrán láthatjuk - amely nagyon hasonlít a Cayley-tétel bizonyításánál használthoz - és kapjuk, hogy a vizsgált gráf feszítőfáinak száma: $(n-2)\cdot n^{n-3}$.



9. ábra. A szomszédsági mátrix.



10. ábra. Megoldás a Kirchoff tétel második alakjával.