Fák összeszámlálása

1. Tétel. *Legyen* $\{d_i\}_{i=1}^n \subset \mathbb{N}, n \geq 2$ *fokszámsorozat olyan, melyre teljesül a*

$$\sum_{i=1}^n d_i = 2(n-1)$$

egyenlőség, ekkor ezen fokszámsorozatot realizáló fák száma:

$$(n-2)! \prod_{i=1}^n \frac{d_i}{d_i!}. \tag{1}$$

Bizonyítás. Ha valamely j indexre $d_j = 0$, akkor a fokszámsorozat nem realizálható fával, hiszen legalább egy legalább két pontból álló fa csúcsainak fokszáma minimum 1. Ilyen esetben a formula értéke is 0.

Tegyük fel, hogy $1 \leq d_1 \leq d_2 \leq \cdots \leq d_n$ és a realizáló fa csúcsai $\{v_i\}_{i=1}^n$, ahol $d(v_i) = d_i$. Tudjuk, hogy

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n d_i = 2\frac{n-1}{n} < 2,$$

így $d_1 = 1$, azaz a v_1 csúcs minden realizáló fában levél. A realizáló fákat $n-1$ diszjunkt csoportba oszthatjuk aszerint, hogy a v_1 csúcsnak melyik másik csúcs a szomszédja. Ha realizáljuk a $d_2, d_3, \ldots, d_{i-1}, d_i - 1, d_{i+1}, \ldots, d_n$ fokszámsorozatot fával, akkor megkapjuk az eredeti fokszámsorozat egy realizációját, amelyben v_1 szomszédja v_i.

Ezt felhasználva teljes indukcióval igazoljuk a formula helyességét. Az állítás $n = 2$ esetén nílvánvalóan igaz. Tegyük fel, hogy (1) teljesül $n-r$ csúcsú fák esetén, ahol $r > 0$. Ekkor a $\{d_i\}_{i=1}^n$ fokszámsorozatot realizáló fák száma

$$\sum_{j=2}^n (n-3)! \left(\prod_{i=2}^{j-1} \frac{d_i}{d_i!}\right) \cdot \frac{d_j - 1}{(d_j-1)!} \cdot \left(\prod_{i=j+1}^{n} \frac{d_i}{d_i!}\right) =$$

$$(n-3)! \left(\prod_{i=1}^{n} \frac{d_i}{d_i!}\right) \sum_{j=2}^n (d_j - 1) = (n-2)! \prod_{i=1}^n \frac{d_i}{d_i!}.$$

∎

2. Következmény (Cayley). *Az* n *csúcsú teljes gráf,* K_n *feszítőfáinak száma* n^{n-2}.

Bizonyítás. Az összes n csúcsú fa K_n egy feszítőfája, így fokszámsorozataik szerint csoportosítva K_n feszítőfáinak számára a következő összefüggés adódik

$$\sum_{\substack{d_1, d_2, \ldots, d_n \in \mathbb{N} \\ d_1 + d_2 + \cdots + d_n = 2(n-1)}} (n-2)! \prod_{i=1}^n \frac{d_i}{d_i!} = \sum_{\widetilde{d_1} + \widetilde{d_2} + \cdots + \widetilde{d_n} = n-2} \frac{(n-2)!}{\prod_{i=1}^n \widetilde{d_i}!}, \tag{2}$$

ahol $\widetilde{d_i} = d_i - 1$. Vegyük észre, hogy a (2) egyenlőség jobb oldala a multinomiális tétel speciális esete, így

$$\sum_{\widetilde{d_1} + \widetilde{d_2} + \cdots + \widetilde{d_n} = n-2} \frac{(n-2)!}{\prod_{i=1}^n \widetilde{d_i}!} =$$

$$\sum_{\widetilde{d_1} + \widetilde{d_2} + \cdots + \widetilde{d_n} = n-2} 1^{\widetilde{d_1}} 1^{\widetilde{d_2}} \cdots 1^{\widetilde{d_n}} \frac{(n-2)!}{\prod_{i=1}^n \widetilde{d_i}!} = (1 + 1 + \cdots + 1)^{n-2} = n^{n-2}.$$

■

Definíció. Legyen G hurokél nélküli gráf, ekkor G pont-él illeszkedési mátrixán (incidencia mátrixán) egy olyan $L_G = (l_{v,e})_{v\in V, e\in E}$ mátrixot értünk, melyre

$$l_{v,e} = \begin{cases} 1, & \text{ha } vIe, \\ 0 & \text{különben.} \end{cases}$$

Megjegyzés. A G gráf incidencia mátrixa egy olyan mátrix, melynek minden oszlopában 2db 1-es szerepel, és minden sorában az 1-esek száma a sorhoz tartozó csúcs foka.

Definíció. Legyen L_G egy G gráf incidencia-mátrixa, ekkor az $\vec{L}_G$ mátrixot úgy képezzük, hogy L_G minden oszlopában megváltoztatjuk az egyik 1-es előjelét, az $\vec{L}_G^{-v}$ mátrixot úgy kapjuk, hogy elhagyjuk a v csúcshoz tartozó sort $\vec{L}_G$-ből. Legyen $F \subset E$, ekkor $\vec{L}_G^{-v}[F]$ az $\vec{L}_G^{-v}$ mátrix F-beli élekhez tartozó soraiból alkotott mátrix.

3. Tétel. *Legyen $F \subset E, |F| = |V| - 1 = n - 1$, legyen továbbá $v \in V$ tetszőleges. Ha $\vec{L}_G^{-v}[F]$ nemelfajuló, akkor F egy feszítőfa élhalmaza. Ha F egy feszítőfa élhalmaza, akkor* $\det\left(\vec{L}_G^{-v}[F]\right) \in \{-1, 1\}$.

Bizonyítás. Ha F egy feszítőfa élhalmaza, akkor ezen feszítőfa lebontható levéllecsípés operációval addig, míg csak a v csúcs marad meg, legyen v_i az i-edik lépésben lecsípett csúcs és e_i a lecsípett él. Ekkor $V = \{v_1, v_2, \dots, v_{n-1}, v\}$, legyen $F = \{e_1, e_2, \dots, e_{n-1}\}$. Ezen jelölések mellett

$$\vec{L}_G^{-v}[F] = \begin{pmatrix} \pm1 & 0 & \dots & & 0 \\ & \pm1 & 0 & \dots & 0 \\ & & \ddots & & \vdots \\ & & & \pm1 & 0 \\ & & & & \pm1 \end{pmatrix},$$

ami egy alsó trianguláris mátrix, melynek determinánsa ±1.

Tegyük fel, hogy F nem egy feszítőfa élhalmaza. Egy n pontból és $n-1$ élből álló gráf pontosan akkor nem fa, ha tartalmaz kört, így F tartalmazza egy kör éleit. Ha az irányítást megváltoztatjuk, akkor elérhető, hogy F elemei között szerepeljenek egy irányított kör élei. Ez a változtatás nincs hatással a mátrix rangjára. Az $\vec{L}_G$ mátrix ezen élekhez tartozó oszlopainak összege $\underline{0}$, és így $\det\left(\vec{L}_G^{-v}[F]\right) = 0$. ■

4. Tétel (Binet-Cauchy). *Legyen A egy $n \times N$-es mátrix, B pedig egy olyan $N \times n$-es mátrix amelyre teljesül, hogy B oszlopai megegyeznek A soraival. Jelölje az A mátrix oszlopait $\mathcal{O}(A)$, ekkor*

$$\det(A \cdot B) = \sum_{\substack{F \subset \mathcal{O}(A), \\ |F| = n}} \det(A[F]) \cdot \det\left(B^T[F]\right).$$

5. Tétel (Kirchoff). *Legyen G egyszerű gráf, ekkor G feszítőfáinak a száma*

$$\det\left(\vec{L}_G^{-v} \cdot \left(\vec{L}_G^{-v}\right)^T\right).$$

Bizonyítás. Alkalmazva a Binet-Cauchy tételt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}\det\left(\vec{L}_G^{-v}\cdot\left(\vec{L}_G^{-v}\right)^T\right) &= \sum_{\substack{F\subset E,\\ |F|=n-1}} \det\left(\vec{L}_G^{-v}[F]\right)\cdot\det\left(\left(\vec{L}_G^{-v}[F]^T\right)^T\right)\\ &= \sum_{\substack{F\subset E,\\ |F|=n-1}} \det\left(\vec{L}_G^{-v}[F]\right)^2.\end{aligned}$$

A 3. Tétel alapján

$$\det\left(\vec{L}_G^{-v}[F]\right)^2 = \begin{cases}1, & \text{ha } F \text{ feszítőfa élhalmaza,}\\ 0 & \text{különben.}\end{cases}$$

Ezt felhasználva adódik, hogy

$$\sum_{\substack{F\subset E,\\ |F|=n-1}} \det\left(\vec{L}_G^{-v}[F]\right)^2 = \sum_{\substack{F\subset E,\\ F \text{ feszítőfa élhalmaza}}} 1.$$

■

A következőkben a Kirchoff-tételben szereplő mátrix egy másik felírását mutatjuk meg.

Definíció. Legyen G egy egyszerű gráf, a G gráf szomszédsági mátrixán egy olyan $A_G = (a_{u,v})_{u,v\in V}$ mátrixot értünk, melyre

$$a_{u,v} = \begin{cases}1, & \text{ha } u \text{ és } v \text{ szomszédosak,}\\ 0 & \text{különben.}\end{cases}$$

6. Tétel (Kirchoff). *Legyen G egy egyszerű gráf, $V(G) = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ legyen továbbá*

$$D = \begin{pmatrix} d(v_1) & 0 & \ldots & 0\\ 0 & \ddots & & \vdots\\ \vdots & & \ddots & 0\\ 0 & \ldots & 0 & d(v_n)\end{pmatrix},$$

ekkor G feszítőfáinak száma

$$\det\left(D^{-v}\left[V\backslash\{v\}\right] - A_{G-v}\right).$$

7. Következmény (Cayley). *Az n csúcsú teljes gráf, K_n feszítőfáinak száma n^{n-2}.*

Bizonyítás. Alkalmazva a Kirchoff tételt kapjuk, hogy a feszítőfák száma

$$\det\begin{pmatrix} n-1 & -1 & \ldots & -1\\ -1 & n-1 & & \vdots\\ \vdots & & \ddots & -1\\ -1 & \ldots & -1 & n-1\end{pmatrix}.$$

Az összes sort az elsőhöz hozzáadva, majd az első sort az összes többi sorhoz hozzáadva kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}
\det\begin{pmatrix} n-1 & -1 & \dots & -1 \\ -1 & n-1 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & -1 \\ -1 & \dots & -1 & n-1 \end{pmatrix} &= \det\begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ -1 & n-1 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & -1 \\ -1 & \dots & -1 & n-1 \end{pmatrix} \\
&= \det\begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & n & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & n \end{pmatrix} = n^{n-2}.
\end{aligned}$$

■